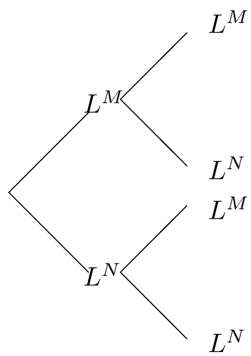
MAT 2779, Introduction à la bio-statistique

Solutionnaire du Devoir 1
Échéance : mercredi, le 21 septembre, 2011

$Total = 20$ points

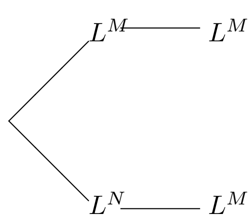
Problème 2.1. (2 points) (a)



Femelle	Mâle $\frac{1}{2}L^M$	$\frac{1}{2}L^N$
$\frac{1}{2}L^M$	$\frac{1}{4}L^M L^M$ (type M)	$\frac{1}{4}L^M L^N$ (type MN)
$\frac{1}{2}L^N$	$\frac{1}{4}L^M L^N$ (type MN)	$\frac{1}{4}L^N L^N$ (type N)

La progéniture peut avoir du sang de type M avec une probabilité de 1/4, de type N avec une probabilité de 1/4, et de type MN avec une probabilité de 1/2.

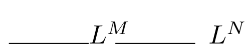
(b)



Femelle	Mâle $\frac{1}{2}L^M$	$\frac{1}{2}L^N$
L^M	$\frac{1}{2}L^M L^M$ (type M)	$\frac{1}{2}L^M L^N$ (type MN)

La progéniture peut être de type M ou de type MN, chacun avec la probabilité 1/2.

(c)



Femelle	Mâle L^N
L^M	$L^M L^N$ (type MN)

La progéniture a le type MN avec une probabilité de 1.

Problème 2.5. (2 points) (a) La fleur est mauve seulement si le génotype est $CCPP$, $CCPp$ $CcPP$ ou $CcPp$. La fleur est blanche dans tous les autres cas, c.-à-d. pour les génotypes $ccPP, ccPp, CCpp, Ccpp, ccpp$.
(b) Nous croisons $CcPp \times CcPp$.

Femelle Gamete	Mâle $\frac{1}{4}CP$	$\frac{1}{4}Cp$	$\frac{1}{4}cP$	$\frac{1}{4}cp$
$\frac{1}{4}CP$	$\frac{1}{16}CC\ PP$ (mauve)	$\frac{1}{16}CC\ Pp$ (mauve)	$\frac{1}{16}Cc\ PP$ (mauve)	$\frac{1}{16}Cc\ Pp$ (mauve)
$\frac{1}{4}Cp$	$\frac{1}{16}CC\ Pp$ (mauve)	$\frac{1}{16}CC\ pp$ (blanc)	$\frac{1}{16}Cc\ Pp$ (mauve)	$\frac{1}{16}Cc\ pp$ (blanc)
$\frac{1}{4}cP$	$\frac{1}{16}Cc\ PP$ (mauve)	$\frac{1}{16}Cc\ Pp$ (mauve)	$\frac{1}{16}cc\ PP$ (blanc)	$\frac{1}{16}cc\ Pp$ (blanc)
$\frac{1}{4}cp$	$\frac{1}{16}Cc\ Pp$ (mauve)	$\frac{1}{16}Cc\ pp$ (blanc)	$\frac{1}{16}cc\ Pp$ (blanc)	$\frac{1}{16}cc\ pp$ (blanc)

La probabilité que les descendants ont des fleurs mauves est 9/16.

Problème 3.2. (2 points) Soient A=“parle anglais” et B=“parle français”. On a

$$P(A \cap B') = 0{,}599; P(A' \cap B) = 0{,}016; P(A' \cap B') = 0{,}013.$$

(a) On veut $P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B') = 1 - 0{,}013 = 0{,}987$.
(b) Par l'additivité (voir un diagramme de Venn),

$$P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(A' \cap B) + P(A \cap B).$$

Alors, la probabilité qu'un résident choisi au hasard parle les deux langues offcielles est

$$P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B') - P(A' \cap B) = 0{,}987 - 0{,}599 - 0{,}016 = 0{,}372.$$

Problème 3.5. (2 points) Soit A l'événement que la tomate ait une plus grande résistance aux insecte et B l'événement qu'elle ait une plus longue durée de conservation. On sait que $P(A) = 0{,}75$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$.

N.B. La traduction n'est pas exactement comme la question du manuel. Alors les deux solutions seront acceptées.

Solution basée sur la question du manuel :
(a) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}75 - 0{,}3 = 0{,}45$.
(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}75 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}95$.
(c) $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$.
(d) $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$.

Solution basée sur la question traduite :
(a) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}75 - 0{,}3 = 0{,}45$.
(b) $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$.
(c) $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$, où

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}75 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}95.$$

Problème 4.3. (2 points) Soit M l'événement que l'individu a le cancer de la prostrate. Soit A l'événement qu'il a un niveau d'APS supérieur à 10, B l'événement qu'il a un niveau d'APS entre 4 et 10, et C l'événement qu'il a un niveau d'APS inférieur à 4. On sait que $P(M|A) = 0{,}67$, $P(M|B) = 0{,}25$ et $P(M|C) = 0{,}05$. En outre, on sait que $P(A) = 0{,}15$, $P(B) = 0{,}1$ et $P(C) = 0{,}75$.

N.B. La traduction n'est pas exactement comme la question du manuel. Alors les deux solutions seront acceptées.

Solution basée sur la question du manuel :
(a) Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B) + P(M|C)P(C) \\ &= (0{,}67)(0{,}15) + (0{,}25)(0{,}10) + (0{,}05)(0{,}75) \\ &= 0{,}1005 + 0{,}025 + 0{,}0375 = 0{,}163. \end{aligned}$$

(b) Par la formule de Bayes,

$$P(A|M) = \frac{P(M \cap A)}{P(M)} = \frac{P(M|A)P(A)}{P(M)} = \frac{0{,}1005}{0{,}163} = 0{,}62.$$

Solution basée sur la traduction de la question :
(a) Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B) + P(M|C)P(C) \\ &= (0{,}67)(0{,}15) + (0{,}25)(0{,}10) + (0{,}05)(0{,}75) \\ &= 0{,}1005 + 0{,}025 + 0{,}0375 = 0{,}163. \end{aligned}$$

(b) On veut $P(M|A) = 0{,}67$.

Problème 4.4. (2 points) On observe

	avec la maladie $U+$	sans la maladie $U-$
Test $+$	197	8
Test $-$	3	92
Total	200	100

(a) Le taux des faux-positifs est $P(T + |U-) = 8/100 = 0{,}08$.
Le taux des faux-négatifs est $P(T - |U+) = 3/200 = 0{,}015$.

(b) La sensibilité est $P(T + |U+) = 197/200 = 0{,}985$.
La spécificité est $P(T - |U-) = 92/100 = 0{,}92$.

(c) La valeur prédictive positive est

$$\begin{aligned} \mathsf{VPP} = P(U + |T+) &= \frac{P(T + |U+)P(U+)}{P(T + |U+)P(U+) + P(T + |U-)P(U-)} \\ &= \frac{(0{,}985)(0{,}15)}{(0{,}985)(0{,}15) + (0{,}08)(0{,}85)} = 0{,}685. \end{aligned}$$

La valeur prédictive négative du test est

$$\begin{aligned} \mathsf{VPN} = P(U - |T-) &= \frac{P(T - |U-)P(U-)}{P(T - |U-)P(U-) + P(T - |U+)P(U+)} \\ &= \frac{(0{,}92)(0{,}85)}{(0{,}92)(0{,}85) + (0{,}015)(0{,}15)} = 0{,}9971. \end{aligned}$$

(d) La valeur prédictive positive est

$$\begin{aligned}\mathsf{VPP} = P(U+|T+) &= \frac{P(T+|U+)P(U+)}{P(T+|U+)P(U+) + P(T+|U-)P(U-)} \\ &= \frac{(0{,}92)(0{,}01)}{(0{,}92)(0{,}01) + (0{,}015)(0{,}99)} = 0{,}1106.\end{aligned}$$

La valeur prédictive négative du test est

$$\begin{aligned}\mathsf{VPN} = P(U-|T-) &= \frac{P(T-|U-)P(U-)}{P(T-|U-)P(U-) + P(T-|U+)P(U+)} \\ &= \frac{(0{,}92)(0{,}99)}{(0{,}92)(0{,}99) + (0{,}015)(0{,}01)} = 0{,}9998.\end{aligned}$$

Problème 5.1. (2 points) Soit A_1, A_2, A_3, A_4 les événements que le donneur est de type est O, A, B, et AB, respectivement. Soit B_1, B_2, B_3, B_4 les événements que le patient qui reçoit la transfusion est de type O, A, B, et AB, respectivement. L'événement A_i est indépendant de B_j, pour tout $i = 1, 2, 3, 4$ et $j = 1, 2, 3, 4$. On peut écrire l'événement C que la transfusion soit un succès par une union d'événement mutuellement exclusifs :

$$C = (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_1 \cap B_3) \cup (A_1 \cap B_4) \cup (A_2 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_4) \cup$$

$$(A_3 \cap B_3) \cup (A_3 \cap B_4) \cup (A_4 \cap B_4).$$

Alors,

$$\begin{aligned}P(C) &= P(A_1)P(B_1) + P(A_1)P(B_2) + P(A_1)P(B_3) + P(A_1)P(B_4) + P(A_2)P(B_2) + \\ &\quad P(A_2)P(B_4) + P(A_3)P(B_3) + P(A_3)P(B_4) + P(A_4)P(B_4) \\ &= (0{,}46)(0{,}46) + (0{,}46)(0{,}42) + (0{,}46)(0{,}09) + (0{,}46)(0{,}03) + (0{,}42)(0{,}42) + \\ &\quad (0{,}42)(0{,}03) + (0{,}09)(0{,}09) + (0{,}09)(0{,}03) + (0{,}03)(0{,}03) \\ &= 0{,}6607.\end{aligned}$$

La probabilité que la transfusion n'est pas un succès est

$$P(C') = 1 - P(C) = 1 - 0{,}6607 = 0{,}3393.$$

Problème 5.3. (2 points)
(a) Soit p_1 la probabilité d'être un homme et p_2 la probabilité d'être une femme. On sait que $p_1/p_2 = 0{,}83$. Alors $p_1 = (0{,}83)p_2$. Mais, $p_1 + p_2 = 1$. Alors : $(0{,}83)p_2 + p_2 = 1$. Donc, $p_2 = 1/1{,}83 = 0{,}5464$ et $p_1 = 1 - 0{,}546 = 0{,}4536$.

(b) Soit F et H les événements d'être une femme et d'être un homme, respectivement. Soit D l'événement que la personne souffre de la dépression. On a $P(F) = 0{,}5464$, $P(H) = 0{,}4536$, $P(D|F) = 0{,}16$ et $P(D|H) = 0{,}08$.

Par la formule des probabilités totales,

$$P(D) = P(D|F)P(F) + P(D|M)P(M) = (0{,}16)(0{,}5464) + (0{,}08)(0{,}4536) = 0{,}1237.$$

(c) Puisque $P(D) \neq P(D|F)$, alors D et F ne sont pas indépendants.

(d) Par la formule de Bayes,

$$P(F|D) = \frac{P(F \cap D)}{P(D)} = \frac{(0{,}16)(0{,}5464)}{0{,}1237} = 0{,}7067.$$

Problem 8.5. (2 points) Soit A l'événement que la personne ait accès à de l'eau potable sécuritaire, et M l'événement que la personne souffre d'une maladie hydrique. On sait que $P(A) = 0{,}45$, $P(M|A) = 0{,}32$ et $P(M|A') = 0{,}88$.

(a) Par la formule des probabilités totales,

$$P(M) = P(M|A)P(A) + P(M|A')P(A') = (0{,}32)(0{,}45) + (0{,}88)(0{,}55) = 0{,}144 + 0{,}484 = 0{,}628.$$

(b) Par la formule de Bayes,

$$P(A'|M) = \frac{P(M|A')P(A')}{P(M)} = \frac{(0{,}88)(0{,}55)}{0{,}628} = 0{,}771.$$

Problème 8.7. (2 points)

(a) Soit A_i l'événement que la ième sélection est un drosophile noir, pour $i = 1, 2$. Par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|A_1')P(A_1') \\ &= \frac{4}{24} \cdot \frac{5}{25} + \frac{5}{24} \cdot \frac{20}{25} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Puisque $P(A_2|A_1) = 4/24 = 1/6 \neq 1/5 = P(A_2)$, alors A_1 et A_2 ne sont pas indépendants.

(b) Similaire à la partie (a), on a

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|A_1')P(A_1') \\ &= \frac{1\ 999}{9\ 999} \cdot \frac{2\ 000}{10\ 000} + \frac{2\ 000}{9\ 999} \cdot \frac{8\ 000}{10\ 000} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Alors $P(A_2|A_1) = 1\ 999/9\ 999 \approx 0{,}2 = P(A_2)$, alors A_1 et A_2 sont indépendants (après l'arrondissement).

N.B. Si vous concluez que $P(A_2|A_1) \neq P(A_2)$, alors il faut conclure que A_1 et A_2 ne sont pas indépendants.

Les deux solutions seront acceptées depuis que l'argumentation est bonne.