Dr. Arian Novruzi
Département de Mathématiques et Statistiques
Tel: (613) 562 5800 x 3530

Le 11 Décembre, 2005

MAT2731A: Equations différentielles et méthodes numériques
Examen Final (automne 2005)

+ Solution.

NOM, PRENOM:
Nr. d'étudiant:

Instructions:

- Ecrire votre NOM, PRENOM
- Durée de l'examen: 3 heures
- Cet examen comporte 8 problèmes
- Ecrire votre solution dans l'espace blanche suivant tout problème. Utiliser le dos de la page si besoin, et indiquer quand c'est le cas
- Vous devez montrer tous les détails de votre travail
- Il est interdit d'utiliser des livres ou des notes
- Une feuille de formules est attachée à votre examen
- Vous pouvez utiliser un calculateur simple (ayant pas de fonctions graphiques ou de programmation)

Prob.	Points	Vous
1	7	
2	8	
3	8	
4	8	
5	8	
6	7	
7	7	
8	7	
Total	60	

Problem 1 *(7 points) Resoudre le problème de Cauchy:*

$$(e^x y - y\sin x)\,dx + (2e^x + 2\cos x + 3y)\,dy = 0, \qquad y(0) = -1.$$

$M(x,y) = e^x \cdot y - y\sin x$; $\quad M_y = e^x - \sin x$;

$N(x,y) = 2e^x + 2\cos x + 3y$; $\quad N_x = 2e^x - 2\sin x$; $\quad M_y \neq N_x$ pas exacte

Facteur :

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-e^x + \sin x}{2e^x + 2\cos x + 3y} \neq g(x)$$

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{e^x - \sin x}{e^x \cdot y - y\sin x} = \frac{1}{y} = g(y) \Rightarrow \mu(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{\ln|y|} = \pm y$$

$\mu(y) = y$.

Alors, l'E.D. devient

$$\underbrace{(e^x y^2 - y^2 \sin x)}_{\bar{M}(x,y)} dx + \underbrace{(2e^x \cdot y + 2y\cos x + 3y^2)}_{\bar{N}(x,y)} dy = 0$$

$\bar{M}_y = 2e^x y - 2y\sin x$, $\quad \bar{N}_x = 2e^x y - 2y \sin x \Rightarrow$ exacte

Alors, $y(x)$ satisfait $u(x,y) = C$; on a

$u(x,y) = \int \bar{M}\,dx + h(y) = e^x y^2 + y^2\cos x + h(y)$

$u_y = \bar{N} \Rightarrow 2e^x y + 2y\cos x + h'(y) = 2e^x y + 2y\cos x + 3y^2 \Rightarrow$

$h'(y) = 3y^2$, $\quad h(y) = y^3 + \cancel{C}$, $\quad h(y) = y^3 \Rightarrow$

$u(x,y) = e^x y^2 + y^2 \cos x + y^3$ et la sol. est donnée par

$$\boxed{e^x y^2 + y^2\cos x + y^3 = C} \quad (\text{sol. gén})$$

Cauchy: $y(0) = -1 \Rightarrow 1 + 1 - 1 = C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow$

$$\boxed{e^x y^2 + y^2 \cos x + y^3 = 1} \quad (\text{sol. de Cauchy})$$

Problem 2 *(8 points) Resoudre le problème de Cauchy:*

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2e^x - 12x^2 + 44x - 30, \qquad y(0) = 7, \quad y'(0) = 15, \quad y''(0) = 42.$$

E.H: $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

E.C. $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

Sol. gén: $\boxed{y_h(x) = Ae^x + Be^{2x} + Ce^{3x}}$

E.N.H: $r(x) = 2e^x$; $\begin{cases} y(x) = Dxe^x \\ y'(x) = Dxe^x + De^x \\ y''(x) = Dxe^x + 2De^x \\ y'''(x) = Dxe^x + 3De^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} -6y &= -6Dxe^x \\ 11y' &= 11Dxe^x + 11De^x \\ -6y'' &= -6Dxe^x - 12De^x \\ y''' &= Dxe^x + 3De^x \\ \hline 2e^x &= 2De^x \Rightarrow D = 1 \end{aligned}$$

$\boxed{y(x) = xe^x}$

$r(x) = -12x^2 + 44x - 30$;

$\begin{cases} y(x) = ax^2 + bx + c \\ y'(x) = 2ax + b \\ y''(x) = 2a \\ y'''(x) = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} -6y &= -6ax^2 - 6bx - 6c \\ 11y' &= +22ax + 11b \\ -6y'' &= -12a \\ y''' &= 0 \\ \hline -12x^2 + 44x - 30 &= -6ax^2 \\ &\quad + (6b + 22a)\cdot x \\ &\quad - (6c - 11b + 12a) \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = 2, \ b = 0, \ c = 1 \Rightarrow \boxed{y(x) = 2x^2 + 1}$

Sol gén $\boxed{y(x) = Ae^x + Be^{2x} + Ce^{3x} + xe^x + 2x^2 + 1}$

Cauchy: $\begin{cases} y(0) = A + B + C + 1 = 7 \\ y'(0) = A + 2B + 3C + 1 = 15 \\ y''(0) = A + 4B + 9C + 6 = 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} y(x) &= e^x + e^{2x} + e^{3x} \\ &+ xe^x + 2x^2 + 1 \end{aligned}}$

est sol. de Cauchy

Problem 3 *(8 points) Resoudre le problème de Cauchy:*

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2}, \quad y(1) = 3e^2, \;\; y'(1) = 7e^2.$$

E.H. $y'' - 4y' + 4y = 0$

E.C. $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2$

Sol. gén : $y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = x\, e^{2x}$

$$\boxed{y_h(x) = A e^{2x} + B\, x e^{2x}}$$

E.N.H: $y(x) = A(x)\, e^{2x} + B(x)\, x e^{2x} \Rightarrow A'(x),\, B'(x)$ satisfont.

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^{-2} e^{2x} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e^{2x} & x e^{2x} \\ 2e^{2x} & 2x e^{2x} + e^{2x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^{-2} e^{2x} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} e^{2x} & x e^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^{-2} e^{2x} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x^{-1} e^{2x} \\ x^{-2} e^{2x} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} e^{2x} \cdot A' = -x^{-1} e^{2x} \\ e^{2x} \cdot B' = x^{-2} e^{2x} \end{cases}, \quad \begin{cases} A' = -x^{-1} \\ B' = -x^{-2} \end{cases}, \quad \begin{cases} A(x) = -\ln x \\ B(x) = x^{-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$y(x) = -\ln x \cdot e^{2x} + x^{-1} \cdot x\, e^{2x} \Rightarrow \boxed{y(x) = e^{2x} - \ln x\, e^{2x}} \quad \text{(sol. partic)}$$

Sol. gén : $\boxed{y(x) = A e^{2x} + B\, x e^{2x} - \ln x \cdot e^{2x}}$

(remarquons que le term e^{2x} de la sol. partic. est sol. de l'eq. hom; donc, il est inclu dans le terme Ae^{2x})

Cauchy

$$\begin{cases} y(1) = (A + B)e^2 = 3e^2 \\ y'(1) = (2A + 3B)e^2 - e^2 = 7e^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\boxed{y(x) = e^{2x} + 2x e^{2x} - \ln x\, e^{2x}}$ est sol. du Cauchy

Problem 4 *(8 points) Resoudre l'équation différentielle non-homogène:*

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6t \\ -18t^2 + 11 \end{bmatrix}$$

Système homogène $\vec{y}' = A \cdot \vec{y}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

valeurs propres : $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 3 \end{array}$

vecteurs propres : 2 sol. indep :

$\lambda_1 = 3$ $\quad (A - \lambda_1 I) u^1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow u^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\left(\text{ou } u^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

d'où $y_1(x) = A e^{3x} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Puisqu'on n'a qu'un vecteur propre, pour trouver l'autre sol. lin. indep $y_2(x)$ on resout

$(A - \lambda_1 I) u^2 = u^1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow u^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left(\text{ou } u^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

D'où $y_2(x) = B\left(x e^{3x} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{3x} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

sol. gén $\boxed{\vec{y}(x) = A e^{3x} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + B\left(x e^{3x} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{3x} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$

Système non hom $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{r}(x)$, $\vec{r}(x) = t^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -18 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \end{bmatrix}$

$\vec{y}(x) = t^2 \vec{\alpha} + t\vec{\beta} + \vec{\gamma} \Rightarrow 2t\vec{\alpha} + \vec{\beta} = A \cdot (t^2 \vec{\alpha} + t\vec{\beta} + \vec{\gamma}) + \vec{r} \Rightarrow$

$$\begin{cases} A \cdot \vec{\alpha} + \begin{bmatrix} 0 \\ -18 \end{bmatrix} = \vec{0} \\ A\vec{\beta} - 2\vec{\alpha} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0} \\ A\vec{\gamma} - \vec{\beta} + \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \end{bmatrix} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} +2 \\ +4 \end{bmatrix} \\ \vec{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \vec{\gamma} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{y}(x) = A e^{3x} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + B\left(x e^{3x} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{3x} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 2x^2 - 1 \\ 4x^2 + 2x - 2 \end{bmatrix}}$$

Problem 5 *(8 points) Trouver la transformation de Laplace ou la transformation de Laplace inverse de:*

a) $\mathcal{L}\{te^{3t}\sin(2t)\}$, c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-18}{s^2-s-12}\right\}$

b) $\mathcal{L}\{u(t-3)\,(t^2+4t+2)\}$, d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3\,e^{-2s}}{s^2-4}\right\}$

a) $$\mathcal{L}\left(te^{3t}\sin(2t)\right)(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left(e^{3t}\sin(2t)\right)(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\sin(2t))(s-3)$$

$$= -\frac{d}{ds}\frac{2}{(s-3)^2+2^2} = \boxed{\frac{4(s-3)}{\left((s-3)^2+4\right)^2}}$$

b) $$\mathcal{L}\left(u(t-3)(t^2+4t+2)\right)(s) = e^{-3s}\mathcal{L}\left((t+3)^2+4(t+3)+2\right)(s)$$

$$= e^{-3s}\,\mathcal{L}(t^2+10t+23)(s) = \boxed{e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{10}{s^2}+\frac{23}{s}\right)}$$

c) $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-18}{s^2-s-12}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-18}{(s-4)(s+3)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s-4}+\frac{B}{s+3}\right) \qquad \begin{bmatrix} A+B=1 \\ 3A-4B=-18 \end{bmatrix}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s+3}-\frac{2}{s-4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\left(3e^{-3t}-2e^{4t}\right) = \boxed{3e^{-3t}-2e^{4t}}$$

d) $$\mathcal{L}^{-1}\left(3\frac{e^{-2s}}{s^2-4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{2}e^{-2s}\frac{2}{s^2-2^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{2}e^{-2s}\mathcal{L}(\sinh(2t))\right)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\left(\frac{3}{2}H(t-2)\sinh(2(t-2))\right) = \boxed{\frac{3}{2}H(t-2)\sinh(2t-4)}$$

Problem 6 *(7 points) Utiliser la transformation de Laplace pour resoudre le problème de Cauchy:*

$$y'' - 2y' + 5y = \delta(t-2), \qquad y(0) = 3, \;\; y'(0) = 1.$$

$Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$, alors en prenant le Laplace de l'E.D. :

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) - 2(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = e^{-2s}$$

$$(s^2 - 2s + 5)Y(s) = s y(0) - 2y(0) + y'(0) + e^{-2s}$$

$$(s^2 - 2s + 5)Y(s) = 3s - 5 + e^{-2s}$$

$$Y(s) = \frac{3s-5}{s^2-2s+5} + e^{-2s}\frac{1}{s^2-2s+5} =$$

$$= \frac{3(s-1)-2}{(s-1)^2+2^2} + \frac{e^{-2s}}{2}\cdot\frac{2}{(s-1)^2+2^2}$$

$$= 3\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2} - \frac{2}{(s-1)^2+2^2} + \frac{e^{-2s}}{2}\frac{2}{(s-1)^2+2^2}$$

$$= 3\mathcal{L}(\cos(2t))(s-1) - \mathcal{L}(\sin(2t))(s-1) + \frac{e^{-2s}}{2}\mathcal{L}(\sin(2t))(s-1)$$

$$= \mathcal{L}\left(e^{t}(3\cos(2t) - \sin(2t))\right)(s) + \frac{e^{-2s}}{2}\mathcal{L}\left(e^{t}\sin(2t)\right)(s)$$

$$= \mathcal{L}\left(e^{t}(3\cos(2t) - \sin(2t))\right)(s) + \mathcal{L}\left(\tfrac{1}{2}H(t-2)e^{t-2}\sin(2(t-2))\right)(s)$$

Donc

$$\boxed{y(t) = e^{t}(3\cos(2t) - \sin(2t)) + \tfrac{1}{2}H(t-2)e^{t-2}\sin(2t-4)}$$

Problem 7 *(7 points) A l'aide de la méthode numérique du point fixe trouver une approximation à 6 décimales de la racine de $f(x) = x^4 + 7x - 5$ dans $[0, 1]$. Prendre $x_0 = 0.5$.*
Donner une justification pourquoi la méthode numérique donne toujours une approximation de la racine si $x_0 \in [0, 1]$.

$f(x) = x^4 + 7x - 5 = 0 \Rightarrow \quad x = \dfrac{5 - x^4}{7} =: g(x).$

Donc, à résoudre $x = g(x)$.

Ici, $|g'(x)| = \left|\frac{4}{7}x^3\right| \leq \frac{4}{7} < 1$, pour $x \in [0, 1]$. et aussi

$0 \leq \frac{4}{7} \leq g(x) = \dfrac{5 - x^4}{7} \leq \frac{5}{7} \leq 1$

Donc, la methode fixe converge pour tout $x_0 \in [0, 1]$.

$x_0 = 0.5$

$x_1 = g(x_0) = \dfrac{5 - (0.5)^4}{7} = 0.705\ 357$

$x_2 = 0.678\ 924$

$x_3 = 0.683\ 934$

$x_4 = 0.683\ 028$

$x_5 = 0.683\ 193$

$x_6 = 0.683\ 163$

$x_7 = 0.683\ 169$

$x_8 = 0.683\ 168$

$x_9 = x_8$; arrêt

(vérification: $f(x_8) = f(0.683168) \simeq 2 \cdot 10^{-6}$)

Problem 8 *(7 points) A l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, trouver y_1 et y_2, des approximations de $y(x_1)$, $y(x_2)$, où $y(x)$ est la solution de $y' = x/y$, $y(0) = 1$. Prendre $h = 0.5$ et montrer les résultats à 6 chiffres décimales.*
Comparer les approximations avec les valeurs exactes en calculant les erreurs absolues, i.e. calculer |sol. exacte - sol. approchée|.

Sol. exacte $\quad yy' = x, \quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad y = \pm\sqrt{x^2+2C}$

$y(0)=1 \Rightarrow 1 = \pm\sqrt{2C} \Rightarrow$ (+) signe et $2C = 1 \Rightarrow$

$$\boxed{y(x) = \sqrt{x^2+1}}$$

R-K 4 $\quad f(x,y) = \frac{x}{y}, \quad x_0 = 0, \; y_0 = 1, \quad h = 0.5$

$x_1 = 0.5$

$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0$

$k_2 = h\, f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = 0.5 \cdot (0 + \frac{1}{2}\, 0.5)/1 = 0{,}125$

$k_3 = h \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2) = 0.5\,(0 + \frac{1}{2}\,0.5)/(1 + \frac{1}{2}\cdot 0.125) = 0{,}117\,647$

$k_4 = h\, f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.5 \cdot (0 + 0.5)/(1 + 0{,}117\,647) = 0{,}223\,684.$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \underline{1.118\,163}$

$x_2 = 1.0$

$k_1 = 0{,}223\,580$

$k_2 = 0{,}304\,889$

$k_3 = 0{,}295\,134$

$k_4 = 0{,}353\,782$

$y_2 = 1{,}414\,398.$

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	erreur
1	0.5	1.118 163	1.118 038	0,000129
2.	1.0	1.414 398	1.414 214	0,000 184.