**Introduction à l'Algèbre linéaire (MAT1741 A)**

**EXAMEN FINAL (Automne 2012)**

**Professeur: Joseph Khoury.** **Durée: 3 heures**

Nom de famille: ____________________

Prénom: ____________________

Numéro d'étudiant: ____________________

**Aucune note n'est permise.**

**Les calculatrices ne sont pas permises.**

Cet examen comporte 15 questions et 16 pages. Les questions à choix multiples (1 à 10) valent chacune 1 point sur les 40 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

Les questions 11 à 15 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution. Vous pouvez utiliser le verso des pages si vous manquez d'espace au recto et les deux pages additionnelles à la fin.

**1.** Parmi les cinq sous-ensembles suivants de l'espace $\mathbb{P}_2$ des ploynômes de degré inférieur ou égal à 2, seulement deux sont des sous-espaces de $\mathbb{P}_2$. Lesquels?

$$S = \{p(x) \in \mathbb{P}_2;\ \ p(0) \leq 2\}$$

$$T = \{p(x) \in \mathbb{P}_2;\ \ 2p(0) + 3p(1) = 0\}$$

$$U = \{p(x) \in \mathbb{P}_2;\ \ p(-x) - 2p(x) = -1\}$$

$$V = \{p(x) \in \mathbb{P}_2;\ \ p(-1)f(2) = 0\}$$

$$W = \left\{p(x) \in \mathbb{P}_2;\ \ (p(-1))^2 + (p(2))^2 = 0\right\}$$

**A**. $U$ et $T$ **B**. $T$ et $W$ **C**. $S$ et $T$
**D**. $U$ et $S$ **E**. $V$ et $W$ **F**. $U$ et $V$

**2.** Lesquels des énoncés suivants sont **vrais**?

(1) Si $u$, $v$, $w$ sont trois vecteurs linéairement indépendants dans un espace vectoriel $V$, alors $u - v + w$, $u + v$ et $w$ sont aussi linéairement indépendants.

(2) Si $\{u - v + w,\, u + v,\, w\}$ est un système générateur d'un espace vectoriel $V$, alors il en est de même pour l'ensemble $\{u,\, v,\, w\}$.

(3) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$, alors $\begin{vmatrix} -3a & -3g & -3d \\ b-2c & h-2i & e-2f \\ c & i & f \end{vmatrix} = 6$.

(4) Si $A$ et $B$ sont deux matrices carrées inversibles de même format, alors

$$\left(A^{-1}BA\right)^{-1} = AB^{-1}A^{-1}.$$

(5) $\left\{1,\, 1+x,\, 1+x+x^2\right\}$ est une base de $\mathbb{P}_2$

**A**. (1) et (4) seulement **B**. (1), (3) et (4) seulement
**C**. (1), (2) et (5) seulement **D**. (3) et (4) seulement
**E**. (3) seulement **F**. (2), (4) et (5) seulement

**3.** Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}_{22}(\mathbb{R})$ une application linéaire qui satisfait:

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trouver $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$.

**A**. $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **B**. $\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **C**. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

**D**. $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **E**. $\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **F**. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

**4.** Considérer le sous-ensemble

$$W = \left\{ A \in \mathbb{M}_{33};\ \ A^T = -A^T \right\}$$

de $\mathbb{M}_{33}$. Parmi les énoncés suivants, un seul est vrai. Lequel?

**A**. $W$ n'est pas un sous-espace de $\mathbb{M}_{33}$
**B**. $W$ est un sous-espace de $\mathbb{M}_{33}$ de dimension 4
**C**. $W$ est un sous-espace de $\mathbb{M}_{33}$ de dimension 3
**D**. $W$ est un sous-espace de $\mathbb{M}_{33}$ de dimension 2
**E**. $W$ est un sous-espace de $\mathbb{M}_{33}$ de dimension 1
**F**. $W$ est un sous-espace de $\mathbb{M}_{33}$ de dimension 0

**5.** Calculer

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{2012}.$$

**A**. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2012 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2012 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**B**. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**C**. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2012 & 2012 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**D**. Aucune des autres réponses

**E**. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2012 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**F**. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**6.** Donner les dimensions des sous-espaces:

$$U = \text{span}\,\{\sin x, \cos x, \sin(x+1)\}$$
$$W = \text{span}\,\{2\sin x, 3\cos x\}$$

de $\mathbb{F}\,(\mathbb{R},\,\mathbb{R})$. (Indication: $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$)

**A**. $\dim U = 1$, $\dim W = 3$

**B**. $\dim U = 2$, $\dim W = 2$

**C**. $\dim U = 3$, $\dim W = 2$

**D**. $\dim U = 1$, $\dim W = 2$

**E**. $\dim U = 2$, $\dim W = 3$

**F**. $\dim U = 3$, $\dim W = 3$

**7.** Considérer la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \\ 1 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$$

où $a \in \mathbb{R}$. Laquelle des combinaisons suivantes représente les réponses aux deux questions suivantes:

(1) Pour quelles valeurs de $a$, la matrice $A$ est-elle **inversible**?

(2) Pour $a = 0$, quelle est la première ligne de $A^{-1}$?

**A**. $a \neq \pm 1$, $[\, \frac{2}{3} \quad -\frac{4}{3} \quad \frac{1}{3} \,]$
**B**. Aucune de ces combinaisons
**C**. $a \neq -3$, $[\, \frac{2}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{1}{3} \,]$
**D**. $a \neq 1$, $[\, \frac{2}{3} \quad -\frac{4}{3} \quad \frac{1}{3} \,]$
**E**. $a \neq -1$, $[\, \frac{2}{3} \quad -\frac{4}{3} \quad \frac{1}{3} \,]$
**F**. $a \neq -1$, $[\, -\frac{2}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{1}{3} \,]$

**8.** L'ensemble $B = \{v_1 = (1,\, -2,\, 0),\ v_2 = (0,\, 0,\, 1),\ v_3 = (2,\, 1,\, 0)\}$ forme une **base orthogonale** de $\mathbb{R}^3$. Trouver les coefficients de Fourrier du vecteur $v = (-1,\, 1,\, 1) \in \mathbb{R}^3$ dans la base $B$. Autrement dit, trouver le triplet $(c_1,\, c_2,\, c_3)$ tel que

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3.$$

**A**. $\left(\frac{3}{\sqrt{5}},\, \frac{1}{\sqrt{5}},\, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
**B**. $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}},\, -\frac{1}{\sqrt{5}},\, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
**C**. $\left(-\frac{3}{5},\, -1,\, -\frac{1}{5}\right)$
**D**. Aucune des autres réponses
**E**. $\left(\frac{3}{5},\, -1,\, -\frac{1}{5}\right)$
**F**. $\left(-\frac{3}{5},\, 1,\, -\frac{1}{5}\right)$

**9.** Soit $A$ une matrice carrée de format $n \times n$. Parmi les énoncés suivants, un seul n'est pas équivalent à la condition **"Le système homogène $AX = 0$ n'admet pas une solution non triviale"**. Lequel?

**A**. Les colonnes de $A$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.
**B**. Les colonnes de $A$ forment un système générateur de $\mathbb{R}^n$.
**C**. 0 est une valeur propre de $A$.
**D**. Le déterminant de $A$ n'est pas nul.
**E**. 0 n'est pas une valeur propre de $A$.
**F**. Les lignes de $A$ sont linéairement indépendantes comme vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

**10.** Soit $A$ une matrice de format $2012 \times 2000$ et soit $B \in \mathbb{R}^{2000}$ un vecteur non nul. Répondre aux trois questions suivantes.

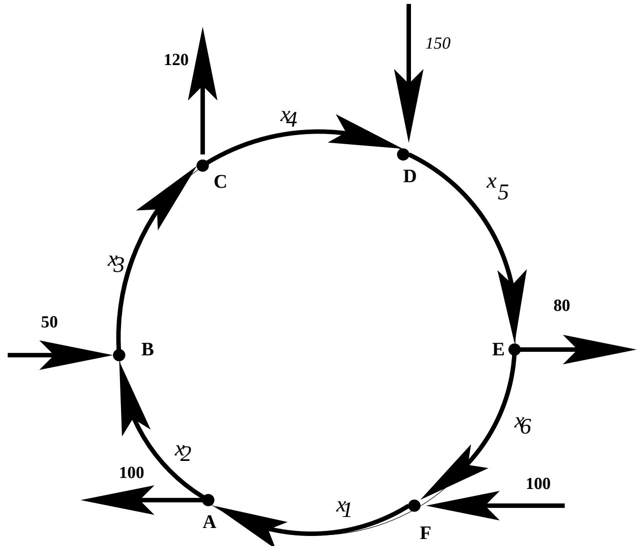
(1) Le système $AX = B$ peut-il être incompatible?

(2) Le système $AX = B$ peut-il avoir une infinité de solutions?

(3) Le système $AX = B$ peut-il avoir une solution unique?

**A**. Non, Non, Oui **B**. Non, Oui, Non **C**. Oui, Oui, Oui
**D**. Non, Non, Non **E**. Oui, Non, Oui **F**. Oui, Non, Non

**11.** Le diagramme suivant représente un "rond point" de réseau routier où les lettres $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ et $F$ représentent les intersections, les flèches indiquent le sens du traffic. Les nombres et les variables $x_i$ autour des flèches indiquent le nombre de voitures qui passent par l'intersection durant la même période du temps.




(1) Écrire le système $(S)$ d'équations linéaires qui décrit le réseau. Indiquer aussi toutes les contraintes sur les variables $x_i$. **Pour cette partie, n'effectuer aucune réduction du système. Juste donner le système $(S)$ avec les contraintes. La réduction de la matrice augmentée du système est faite pour vous à la partie suivante.**

(2) Sachant que la **forme échelonnée réduite** de la matrice augmentée du système $(S)$ est:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

donner la solution générale du Système $(S)$ (Ignorer les contraintes sur les variables pour cette partie).

(3) En utilisant votre réponse à la partie (2), déterminer le flux minimal le long du chemin $FA$.

(4) Si le chemin $CD$ est fermé pour la construction, utiliser votre réponse à la partie (2) pour déterminer les flux le long de chaque portion du rond point.

**12.** Considérer les 5 vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (-1, 1, 0, 1),\ v_2 = (1, 1, 0, 0),\ v_3 = (1, 0, 0, 1),\ v_4 = (1, 2, 0, 2),\ v_5 = (-2, 2, 0, 2)$$

et posons $U = \text{span}\,\{v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4\, v_5\}$.

(1) Sans faire aucun calcul, expliquer pourquoi l'ensemble

$$\{v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4,\, v_5\}$$

est nécessairement linéairement dépendant dans $\mathbb{R}^4$.

(2) Donner une base de $U$ formée par un sous-ensemble de $\{v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4,\, v_5\}$.

(3) Donner une base orthogonale de $U$.

(4) Soit $v = (1,\, 1,\, 2,\, -2) \in \mathbb{R}^4$. Donner la meilleure approximation de $v$ par un élément de $U$.

(5) Donner une base **orthogonale de** $\mathbb{R}^4$ qui contient la base trouvée à la partie (2).

**13. [6 points]** Considérer la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Donner le polynôme caractéristique de $A$ et en déduire que les valeurs propres de $A$ sont 1 et 2.

(b) Trouver une base et donner la dimension de l'espace propre $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3;\ Av = v\}$ associé à la valeur propre 0.

(c) Trouver une base et donner la dimension de l'espace propre $E_2 = \{v \in \mathbb{R}^3;\ Av = 2v\}$ associé à la valeur propre 2.

(d) La matrice $A$ est-elle diagonalisable? si vous dites oui, trouver une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ telle que $A = PDP^{-1}$. **Utiliser la méthode de votre choix pour justifier que $P$ est inversible.**

**14.** Considérer les deux vecteurs $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. On définit une application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de la façon suivante:

$$T(u) = u \times (v \times w), \qquad \forall u \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Si $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, trouver une formule pour $T\,(u)$.

(b) Montrer que $T$ est une application linéaire.

(c) Donner la matrice standard de $T$.

(d) Donner une base et la dimension de l'image, $\mathrm{Im}(T)$, de $T$. Donner aussi une description géomértique complète de $\mathrm{Im}(T)$.

(e) Donner une base et la dimension du noyau, $\ker(T)$, de $T$. Donner aussi une description géomértique complète de $\ker(T)$.

**15.** Pour chacun des énoncés suivants, déterminer si l'énoncé est **vrai** or **faux**. **Si vous dites que l'énoncé est vrai, expliquer pourquoi et si vous dites qu'il est faux, donner un exemple pour illustrer.**

(1) Si $A$ est une matrice carrée de format $2012 \times 2012$ telle $A^2 = -A$, alors $\det(A) = 0$ ou $\det(A) = 1$.

(2) Chaque matrice inversible est diagonalisable.

(3) Si $A$ est une matrice de format $2000 \times 2012$, alors les colonnes de $A$ sont toujours linéairement dépendantes.

(4) $\{\cos(2x),\ \sin(x)\}$ est linéairement indépendant dans l'espace $\mathbb{F}([0, \pi], \mathbb{R})$.

(5) Soit $A$ une matrice de format $5 \times 6$. Si une forme échelonnée de $A$ admet une ligne nulle, alors le système homogène $AX = 0$ admet une infinité de solutions.

(6) Si $T : \mathbb{M}_{44} \to \mathbb{P}_4$ est une transformation linéaire, alors $\dim(\ker T) \leq 4$.