MAT 2322B Calculus III
Winter 2001
FINAL EXAM
April 25, 2001

Instructor: Steve Desjardins

Duration / Durée : 3 hours / heures

Name / Nom :____

Student Number / Numéro :____________________________

Instructions:
- Print your name and student number on this page.
- Écrivez votre nom et numéro d'étudiant sur cette page.
- Verify that your copy of the exam has all 11 pages.
- Vérifiez que votre copie d'examen comprend 11 pages.
- You must answer all questions.
- Vous devez répondre à toutes les questions.
- Write your answers in the spaces below the questions. You may use the backs of the pages if necessary.
- Écrivez vos réponses dans les espaces au-dessous des questions. Vous pouvez aussi écrire sur le dos des pages si nécessaire.
- **No Notes or Books.**
- **Examen à livres fermés.**
- **Basic scientific calculators only - graphing and/or programmable calculators are NOT permitted.**
- **Calculatrices scientifiques de base seulement - les calculatrices graphiques et/ou programmable ne sont PAS permises.**

Question 1 (4 marks)

Evaluate / Évaluez: $$\int_0^2 \int_{e^y}^{e^2} \frac{x}{\ln x}\, dx\, dy.$$

Question 2 (6 marks)
Find the volume of the region above the plane $z = 3$ and below the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Trouvez le volume de la région au-dessus le plan $z = 3$ et au-dessous la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Question 3 (5 marks)
Suppose a vector field is defined by $\vec{F}(x, y, z) = xy\hat{\imath} + 2yz\hat{\jmath} + 3z\hat{k}$ and a curve C is given parametrically by $x(t) = t$, $y(t) = t$ and $z(t) = 2t^2$, for $0 \leq t \leq 1$. Evaluate the line integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Soit un champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = xy\hat{\imath} + 2yz\hat{\jmath} + 3z\hat{k}$. Soit C la courbe définie paramétriquement par $x(t) = t$, $y(t) = t$ et $z(t) = 2t^2$, pour $0 \leq t \leq 1$. Évaluez l'intégrale curviligne $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Question 4 (7 marks)
Let $\vec{F}(x,y) = 2y\hat{\imath} + 7x\hat{\jmath}$ and let C be the triangle with vertices at $(0,0)$, $(2,0)$ and $(0,1)$, oriented counterclockwise. Calculate $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ in two ways:
a) directly and b) use Green's Theorem.

Soit $\vec{F}(x,y) = 2y\hat{\imath} + 7x\hat{\jmath}$ et soit C le triangle ayant les sommets en $(0,0)$, $(2,0)$ et $(0,1)$, parcouru dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Calculez $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ de deux manières:
a) directement et b) utilisez le Théorème de Green.

Question 5 (7 marks)
Show that the vector field
$\vec{F}(x, y, z) = (2xyz^3 + y^2)\hat{\imath} + (x^2z^3 + 2xy)\hat{\jmath} + 3x^2yz^2\hat{k}$ is path independent by the Curl Test and then find a potential function for $\vec{F}$.

Montrez que le champ vectoriel
$\vec{F}(x, y, z) = (2xyz^3 + y^2)\hat{\imath} + (x^2z^3 + 2xy)\hat{\jmath} + 3x^2yz^2\hat{k}$ est indépendant du chemin par le Test de Rotationel et trouvez une fonction potentiel pour $\vec{F}$.

Question 6 (6 marks)
Let S be the the part of the graph of $z = x^2 - y^2$ above the region $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, oriented upwards. A vector field is defined by $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. Find the flux of $\vec{F}$ through S.

Soit S la partie du graphe de $z = x^2 - y^2$ se trouvant au-dessus de la région $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, orientée vers le haut. Soit un champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. Trouvez le flux de $\vec{F}$ à travers S.

Question 7 (6 marks)
Find the flux of $\vec{F}(x,y,z) = xz\hat{\imath}+yz\hat{\jmath}+xyz^2\hat{k}$ through the cylinder $x^2+y^2=4$, $0 \le z \le 5$, oriented outward.

Trouvez le flux de $\vec{F}(x,y,z) = xz\hat{\imath} + yz\hat{\jmath} + xyz^2\hat{k}$ à travers le cylindre $x^2+y^2=4$, $0 \le z \le 5$, orienté vers l'extérieur.

Question 8 (5 marks)
Let / Soit $\vec{F}(x, y, z) = 2x^2y^2\hat{\imath} + 3x^2z\hat{\jmath} + y^2z^2\hat{k}$.
Find / Trouvez a) $\nabla \cdot \vec{F}$ b) $\nabla \times \vec{F}$ c) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})$.

Question 9 (7 marks)
Find the flux of $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ through the sphere of radius R centred at the origin and oriented outwards in two ways:
a) directly and b) use the Divergence Theorem.

Trouvez le flux de $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ à travers la sphère de rayon R centrée à l'origine et orientée vers l'extérieur de deux manières:
a) directement et b) utilisez le Théorème de Divergence.

Question 10 (7 marks)
Let $\vec{F}(x,y,z) = (2\pi yz^4 - y)\hat{\imath} + (2\pi xz^4 + x)\hat{\jmath} + 8\pi xyz^3\hat{k}$ and let C be the circle of radius 2 in the xy plane, centred at the origin and oriented counterclockwise when viewed from above. Calculate $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ in two ways:
a) directly and b) use Stokes' Theorem.

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (2\pi yz^4 - y)\hat{\imath} + (2\pi xz^4 + x)\hat{\jmath} + 8\pi xyz^3\hat{k}$ et soit C le cercle de rayon 2 dans le plan xy, centré à l'origine et parcouru dans le sens contraire des aiguilles d'une montre quand on le regarde d'en haut. Calculez $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ de deux manières:
a) directement et b) utilisez le Théorème de Stokes.