Examen[1] de partique I

Professor: Abdelkrim El basraoui

- **Question 1:**
  Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & 1 \end{bmatrix}$. Trouvez les valeurs de $x,\ y$ et z pour que A soit sous forme échelonnée réduite. (ici il s'agit seulement de voir quelles valeurs de $x,\ y$ et z donnent une matrice sous forme échelonnée réduite).
  Solution:
  $x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$
- **Question 2:**
  Quelles parmis les matrices suivantes repésente la matrice des coéfficients d'un système linéaire avec une solution unique. (Pour votre information tous les système associés à ces matrices sont compatibles).
  $$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 5 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$
  Solution: Seulement B.
- **Question 3:**
  Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants:
  $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ -h^2 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ h \end{bmatrix}$. Trouvez les valeurs de h pour lesquelles le vecteur $\overrightarrow{b} \notin \mathcal{L}(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$.

  Solution: $h = 3$.

- **Question 4:**
  On considère le système linéaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & - & x_5 & = & 1 \end{array} \right.$$

[1] Il y aura environ 8 questions dans le mi-session

(1) Donnez la matrice augmentée de ce système.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

(2) En utilisant l'algorithme décrit en classe trouvez la matrice échelonnée réduite de la matrice augmentée de ce système. (Il faut préciser toutes les opérations que vous faites.)
La matrice échelonnée réduite est:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Il faut faire les opérations suivantes:
$L_3 \to L_3 - L_1$; $L_3 \to L_3 - L_2$ pour la matrice échelonnée, puis $L_3 \to -L_3$; $L_2 \to L_2 - L3$; $L_1 \to L_1 + L_3$; $L_1 \to L_1 + L_2$ pour la matrice échelonnée réduite.

(3) Écrivez la solution générale trouvée dans la question précédente sous forme paramétrique.
Les variables de base sont, d'après 1, x_1, x_2 et x_3 et x_4 et x_5 sont libres. On pose $x_4 = s$ et $x_5 = t$. La solution sous-forme paramétrique est donc

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+t \\ s+t \\ 1 \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

où $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ sont des paramètres.

- **Question 5:**

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(1) Donnez l'argument qui justifie la validité de l'opération $A\overrightarrow{b}$; c-à-d le produit de A avec $\overrightarrow{b}$.
C'est possible car le nombre de colonnes de A est égale à celui des lignes de $\overrightarrow{b}$.

(2) Calculez le produit $A\overrightarrow{b}$. (Donnez les détails du calcul).
$A\overrightarrow{b} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \end{bmatrix}$

- **Question 6:**
On considère le système linéaire homogène suivant:

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{cases}$$

(1) Résolvez ce systéme homogéne.
La matrice augmentée est (j'ignore la colonne des constantes car il n'y a que des zeros et rien de se passera au niveau de cette colonne)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \simeq \cdots \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les opérations sont: $L_3 \to L_3 - L_1$; $L_3 \to L_3 - L_2$; $L_1 \to L_1 - 2L_2$. Donc les variables de bases sont $x_1,\ x_2$ et x_3 est libre. La solution générale est

$$\begin{cases} x_1 & = & 3x_3 \\ x_2 & = & -2x_3 \\ x_3 & & \textit{libre} \end{cases}$$

(2) En déduire la forme paramétrique de la solution générale trouvée dans la question précédente.
Sous forme paramétrique la solution est donc: on pose $x_3 = s,\ s \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} & x_1 \\ \overrightarrow{x} = & x_2 \\ & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3s \\ -2s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ s \in \mathbb{R}.$$

[N.B.: géométriquement, c'est une droite passant par l'origine et parallèle àu vecteur $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$].

- **Question 9:**

Soit l'ensemble de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivant: $S = \{\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4}\}$.
Parmis les énoncés suivants lesquels sont corrects:

(1) S est linéairement **indépendant** si $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3} + 2\overrightarrow{u_4}$.
(2) Si $\overrightarrow{u_1} = 2\overrightarrow{u_2}$ alors S est linéairement **dépendant**.
(3) Si S est linéairement **indépendant** alors la matrice $[\overrightarrow{u_1}\ \overrightarrow{u_2}\ \overrightarrow{u_3}\ \overrightarrow{u_4}]$ est équivalente par rapport aux lignes à la matrice unité I_4.
(4) Si S est linéairement **dépendant** alors tout vecteur de S s'écrit comme combinaison linéaire des autres.
(5) Si $\{\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3}\}$ est linéairement **indépendant** alors S est aussi linéairement **indépendant**.
(6) Si $\{\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3}\}$ est linéairement **indépendant** et si $\overrightarrow{u_4} = \overrightarrow{0}$ alors S est linéairement **indépendant**.

Solution: 2 et 3.

- **Question 10:**

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \overrightarrow{u_3} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ b \end{bmatrix}.$$

Quelles sont les valeurs de a et b pour que $\{\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3}\}$ est linéairement **dépendant**.

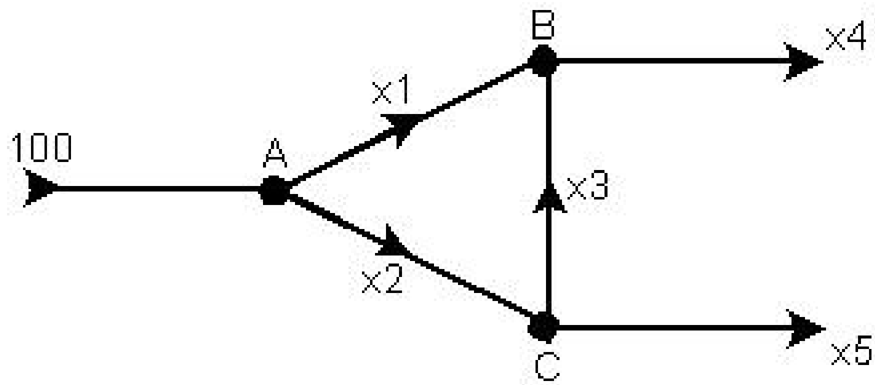
Solution: On considère la matrice $A = [\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_3}]$. On a A est équivalente par rapport au lignes à $(L_3 \to L_3 + L_1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+b \end{bmatrix}.$$

Donc pour que ce système soit linéairement dépendant il faut que $a = -b$ (il faut avoir: # pivots < # vecteurs).

- **Question 11:**

Supposez que la circuation dans un réseau s'éffectue dans les sens que montre la figure suivante:



(1) Écrivez le système linéaire associé à ce réseau. (**Ne pas résoudre ce système**.)

$$\left[\begin{array}{c|ccccc|c} A & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ B & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ C & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ Total & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 100 \end{array}\right].$$

(2) Supposons maintenant que la matrice échelonnée réduite associée à ce réseau est:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Écrivez la solution générale pour cette matrice sous forme paramétrique.
Les variables de base sont $x_1,\ x_2$ et x_4; x_3 et x_5 sont libres.
On pose $x_3 = s,\ x_5 = t,\ s,\ t \in \mathbb{R}$ et on a

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 - s - t \\ s + t \\ s \\ 100 - t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ s,\ t \in \mathbb{R}.$$

(3) Si on ferme la route qui correspond à x_5, c'est-à-dire $x_5 = 0$, quelle est la valeur maximale de x_1. (Ici seule les valeurs positives ou nulles sont permises.)
On a $x_1 = 100 - s - t$ d'après 2. Mais par hypothèse $x_5 = t = 0$ et donc $x_1 = 100 - s$. D'où, puisque $x_1 \geq 0$, $\Leftrightarrow$ $100 - s \geq 0 \Leftrightarrow 100 \geq s \geq 0$, la valeur maximale de x_1 est 100. Elle correspond à la valeur minimal de s, qui est 0. Notez qu'on a utilisé seule les valeurs naturelles pour la variables; c-à-d on a résolu le système dans l'ensemble des entiers naturels.

- **Question 12:**

Trouvez les valeurs de h et k le système linéaire suivant est:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & & & 2x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ hx_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & k \end{array}\right.$$

(1) incompatible;
(2) compatible avec solution unique;
(3) compatible avec infinité de solutions.