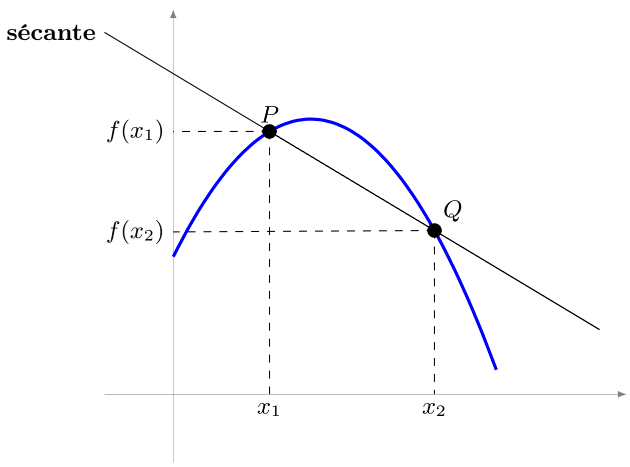
Taux de variation, Dérivée

☞ week 3.

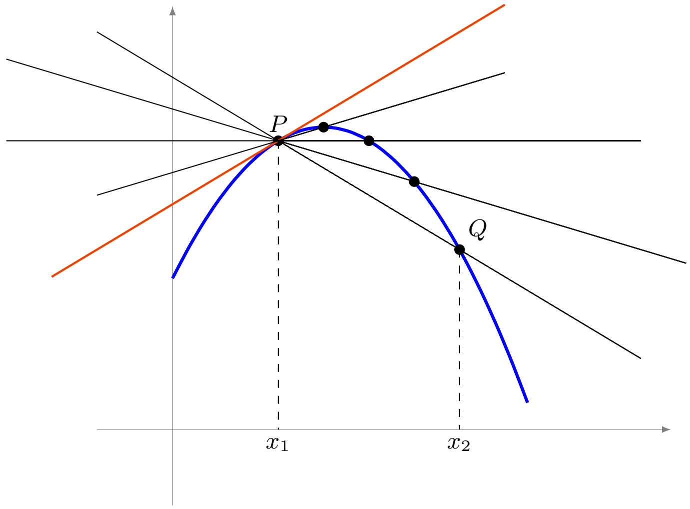
1. Dérivées et taux de variation – section 2.7

1.1. Tangentes

Le taux de variation moyen entre deux points $P(x_1, y_1)$ et $Q(x_2, y_2)$ correspond à **la pente de la sécante** qui relie ces points.



Le taux de variation instantané mesure une variation qui se produit en **un point précis** et représente la **pente de la tangente** à $f(x)$ en $x = a$.



Rappel 1. La tangente

La **droite tangente** à la courbe $y = f(x)$ au point $\big(a, f(a)\big)$ est la droite qui passe par P et dont la pente est

$$\boxed{m = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

si la limite existe.

Une équation de la **tangente** est

$$\boxed{y = m\,(x - a) + f(a)}$$

Par exemple, l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \sqrt{x+3}$ au point $P\big(2, f(2)\big)$:

Pour la suite, on modifie la formule du taux de variation moyen. Pour ce faire, posons $h = x - a$. Alors, $x = a + h$ et le taux de variation moyen de la fonction f sera

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lorsque $x \to a$, alors $h \to 0$. Par conséquent, la pente de la tangente devient :

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Par exemple, la pente de la tangente à la courbe de $y = 1/x$ au point $(1, 1)$ est

1.2. Vitesses

Dans la section précédente, on a approximé la vitesse instantanée lorsque $t = a$ par

$$\boxed{V_{inst} = \lim_{t \to a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a}}$$

On utilise le même raisonnement en posant $h = t - a$:

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Par exemple, si $s(t) = -4,9t^2$, alors la vitesse au moment où $t = 5s$ est

☞ Faire les exercices suivants du manuel **I** :
Page : **166**. No : **3ab, 5, 8, 13, 15, 25, 31, 33, 35, 49**

1.3. La fonction dérivée – section 2.8

Définition 1

La dérivée d'une fonction $f(x)$ est une nouvelle fonction $f'(x)$ définie par

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

si la **limite existe**.

Cette expression sert à calculer la dérivée de la fonction pour **n'importe quelle** valeur de x qui appartient au domaine de définition de la fonction.

Exemple 1

Calculons les dérivées des fonctions suivantes,

1. $f(x) = 2x - 1$

2. $f(x) = x^2$

Notation : dans le cadre de ce cours, on utilisera $\quad f'(x), \ \dfrac{df}{dx}, \ y', \ \dfrac{dy}{dx}$

$$\text{aussi} \quad f'(a) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

Exercice 1

1. Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ en $x = 2$.

2. Trouvez la dérivée de $g(x) = 1 - x^2$.

3. Trouver la dérivée de $f(x) = \frac{1}{x}$ lorsque $x = 1$.

Dérivabilité et continuité

Par définition, la dérivée existe si la limite suivante existe

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

et par définition, la limite en un point existe si les limites à gauche et à droite en ce point existent et sont égales. Par conséquent, la dérivée en $x = a$ existe si

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

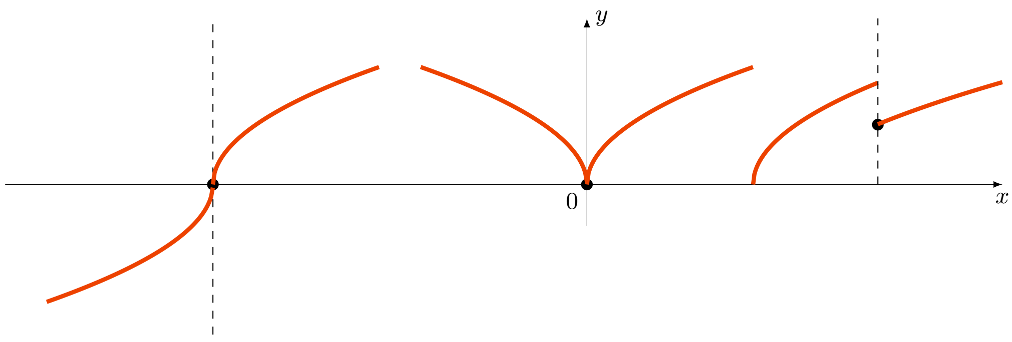
Par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable lorsque $x = 0$, en effet

Proposition 1

Soit $f(x)$ une fonction définie dans son domaine D_f et soit $a \in D_f$.

- Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
- Si f est dérivable sur D_f alors f est continue sur D_f.
- Si f n'est pas continue en a alors f n'est pas dérivable en a

Des cas où la dérivée n'existe pas : **la fonction a une tangente verticale, a des coins (points anguleux ou points de rebroussement) ou n'est pas continue**.



1.4. Les dérivées d'ordres supérieurs

En générale, la dérivée n-ième d'une fonction $f(x)$ sera notée par : $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^n f}{dx^n}$, $y^{(n)}$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$

Exercice 2

Un travailleur de la construction échappe accidentellement un marteau, d'une hauteur de 90 m, alors qu'il travaille sur le toit d'un nouvel immeuble d'habitation. La hauteur du marteau, en mètres, après t secondes, est modélisée par la fonction $s(t) = 90 - 4,9\,t^2$.

a) Déterminer la vitesse du marteau à la première seconde.

b) À quel moment le marteau atteindra-t-il le sol ?

c) Détermine la fonction accélération ? Interprète ton résultat.

☞ Faire les exercices suivants du manuel **I** :
Page : **178**. No : **3, 13, 25, 27, 29, 39, 47, 49**

2. Les règles de dérivation – section 3.1

2.1. La dérivée de fonctions polynômes

	Fonction	Dérivée
Fonction constante	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
Fonction identité	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Fonction puissance	$f(x) = x^n \qquad (n \in \mathbb{R})$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$

Exemple 2

Calculer la dérivée des fonctions suivantes

1. $f(x) = x^6$
2. $m(x) = x^{1.32}$
3. $g(t) = \pi$
4. $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$
5. $l(z) = \sqrt[3]{z^2}$

Exercice 3

Trouvez l'équation de la tangente à la courbe $y = x\sqrt{x}$ au point $(1, 1)$.

2.2. Somme, différence,...

La proposition suivante nous énumère quelques formules de dérivation pour les opérations sur les fonctions. Ainsi, nous seront en mesure de décomposer les fonctions complexes puis les dériver.

Proposition 2

Soient f, g deux fonctions dérivables. Alors,

1. $(kf(x))' = kf'(x)$ où k est un réel fixé,
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
3. $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

Nota : Prendre la dérivée peut être embêtant. Il est préférable de simplifier l'expression le plus possible en premier avant de faire la dérivation.

Exemple 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 4x^5 - 3x^e$
2. $k(x) = \dfrac{x^5 + 4\sqrt{x} - \frac{1}{x}}{x^2}$
3. $g(t) = \sqrt{t}\left(t^2 - \sqrt{t^3}\right)$

Exemple 4

Trouvez les points de la courbe $y = x^4 - 6x^2 + 4$ où la tangente est horizontale.

2.3. Dérivées de fonctions exponentielles

Rappel 2

La fonction exponentielle $y = e^x$ vérifie les propriétés suivantes :

— $e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(e^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

— $e^{a+b} = e^a \times e^b$

— $e^{nx} = (e^x)^n$

— $e^x : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante vérifiant

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$$

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est concave vers le haut et $e^x \geqslant 1 + x$

Par définition, pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{a^x = e^{\left(x \ln a\right)}}$$

Remarque

— $\sqrt{a} = a^{1/2} = e^{\left(\frac{1}{2} \ln a\right)}$

— $\sqrt[n]{a} = a^{1/n} = e^{\left(1/n \ln a\right)}$ (la **racine** n**-ième** de a)

— Les fonctions a^x s'appellent aussi des fonctions exponentielles et se ramènent systématiquement à la fonction exponentielle classique par l'égalité $a^x = e^{x \ln a}$.

— Il ne faut surtout pas les confondre avec les fonctions puissances x^a.

Proposition 3

La fonction exponentielle est l'unique fonction qui vérifie

$$\boxed{\left(e^x\right)' = e^x \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

Où le nombre irrationnel $e \simeq 2,718\ldots$ est tel que

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

	Fonction	Dérivée
Fonction exponentielle à base e	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
Fonction exponentielle à base a	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$

Exemple 5

Dériver les fonctions suivantes.

1. $f(x) = 3^x$

2. $h(x) = \pi^x + x^\pi$

3. $y = e^{x+2} - 5$

4. $y = e^x - e^{-x}$

Exercice 4

Soit $f(x) = e^x - x$. Trouvez f', puis comparez les courbes de f et f'.

Exercice 5

En quel point de la courbe $f(x) = e^x$ la tangente est-elle parallèle à la droite $y = 2x$

Exercice 6

Nous définissons les fonctions hyperboliques de la façon suivantes :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

a) Démontrer que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

b) Démontrer que $\dfrac{d}{dx}\big(\cosh(x)\big) = \sinh(x)$ et que $\dfrac{d}{dx}\big(\sinh(x)\big) = \cosh(x)$.

☞ Faire les exercices suivants du manuel **I** :
Page : **201**. No : **3, 5, 7, 9, 12, 13, 14, 16, 18, 21, 23, 25, 27, 33, 47, 49, 53, 55, 57, 65**

2.4. La dérivée du produit et du quotient de fonctions – section 3.2

Proposition 4

Soient f, g deux fonctions dérivables. Alors,

1. $\big(f(x) \times g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
2. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (si $g(x) \neq 0$).

Exemple 6

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $g(x) = (x^2 + 1)(2x + 5)$
2. $v(x) = \dfrac{4x^3}{x^2 + 1}$

Exercice 7

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. Déterminez en quel(s) point(s) la tangente à la courbe est horizontale.

Exercice 8

Sachant que $f(x) = \sqrt{x}g(x)$ tel que $g(4) = 2$ et $g'(4) = 3$, trouver $f'(4)$

☞ Faire les exercices suivants du manuel **I** :
Pages : **210**. No : **1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 41, 43, 45, 47, 51, 55, 61**

3. Dérivées des fonctions trigonométriques – section 3.3

Les deux égalités suivantes sont à savoir sans démonstration.

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0}$$

Elles sont utiles dans la démonstration de plusieurs formules de dérivation ainsi que d'autres limites, par exemple calculons la limite suivante

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{4x}$$

Maintenant, on a les dérivées suivantes

	Fonction	**Dérivée**
Fonction cosinus	$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
Fonction sinus	$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$

Démonstration.

Exemple 7

Dériver les fonctions suivantes,

1. $f(x) = \sqrt{x}\cos x$

2. $h(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

Voici les dérivées des autres fonctions trigonométriques

	Fonction	**Dérivée**
Fonction tangente	$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \sec^2 x$
Fonction secante	$f(x) = \sec x$	$f'(x) = \sec x \tan x$
Fonction cosécante	$f(x) = \csc x$	$f'(x) = -\csc x \cot x$
Fonction cotangente	$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -\csc^2 x$

Exercice 9

Montrer que $\sec' x = \sec x \tan x$

Exercice 10

Soit $f(x) = x\cos x$.

1. Trouver les zéros de f

2. Déterminer l'équation de la droite tangente à f en $x = \pi$

3. Montrer que $f(x)$ est solution de l'équation $\dfrac{d^2 f}{dx^2} + f(x) = -2\sin x$

☞ Faire les exercices suivants du manuel **I** :
Pages : **217**. No : **1, 3, 5, 8, 10, 12, 14, 17, 21, 23, 25, 29, 35, 37, 39, 41, 43, 59, 61**

4. Règle de dérivation en chaîne – 3.4

La règle de dérivation en chaîne s'utilise pour calculer la dérivée d'une fonction composée.
Si f et g sont des fonctions, alors leur **composition**, est définie comme $f\big(g(x)\big)$.

Proposition 5

Soit h et g deux fonctions dérivables, alors la dérivée de la fonction composée : $f(x) = g\big(h(x)\big)$ est la fonction

$$\boxed{f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)}$$

Soit $y = f(u)$ et $u(x)$ deux fonctions dérivables. Selon la notation de **Leibniz**, la règle de dérivation en chaîne peut s'écrire comme

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}}$$

Exemple 8

Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

1. Avec notation prime :

2. Avec la notation de Leibniz :

Exemple 9

Dériver les fonctions suivantes.

1. $r(z) = (z^2 - 3z)^5$

2. $f(x) = \cos(2x + 1)\sin(x^2 - 3)$

3. $h(x) = e^{\sin^2 x}$

4. $h(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

Exercice 11

Dériver les fonctions suivantes.

1. $\sin\big(\cos\big(\tan x\big)\big)$

2. $f(t) = \sin\big(e^t\big) + e^{\sin t}$

3. $h(x) = \left(\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}\right)^3$

☞ Faire les exercices suivants du manuel **I** :
Pages : **225**. No : **1, 3, 5, 7, 9, 11, 20, 22, 24, 26, 28, 32, 34, 42, 44, 48, 50, 52, 54, 56, 60, 62, 64, 67, 71, 73, 79, 81, 83,89, 91, 95, 99**

Professeurs

Hicham Loukrati