

Université d'Ottawa
Faculté de génie

École d'ingénierie et de
technologie de l'information



University of Ottawa
Faculty of Engineering

School of Information
Technology and Engineering

ELG 3106 / 3506 Electromagnetic Engineering / Électromagnétisme Appliqué Fall/Automne 2009

FINAL EXAMINATION (3 hours) / EXAMEN FINAL (3 heures)

Professors K. Hinzer, H. Schriemer,

Nom/Name : SOLUTIONS

Date Dec. 18th, 18 déc. 2008

St./Étudiant #: _____

- This booklet contains 12 pages, including the cover page.
- DO NOT SEPARATE THE PAGES OF THIS BOOKLET!
- Answer all the questions.
- This is a closed-book exam. Equations are provided on the last page of this booklet.
- Calculators are permitted, but must not be pre-programmable.
- Remember to provide units.
- Write down any assumptions that you make.
- Multiple choice questions are worth 1 mark. The worth of long answer questions is as indicated below.

- Ce livret contient 12 pages, incluant la page de couverture.
- NE PAS SÉPARER LES PAGES DE CE LIVRET !
- Répondre à toutes les questions.
- Cet examen est à livres fermés. Les équations sont fournies à la dernière page de ce livret.
- Les calculatrices sont permises, mais ne doivent pas être pré-programmables.
- Ne pas oublier de préciser les unités.
- Écrire lisiblement toute supposition que vous faites.
- Les questions à choix multiples valent 1 point chaque. Les questions à réponse longue ont leur pointage indiqué ici-bas.

Q1/	/ 10
Q2/	/ 10
Q3/	/ 10
Q4/	/ 10

Final Mark / Note finale:

/55

Questions à Choix Multiples // Multiple Choice Questions

1. If the load impedance of a transmission line one-half-wavelength in length is $(50 + j150) \Omega$, its input impedance is

Si l'impédance de charge d'une ligne de transmission ayant une longueur d'une demi-longueur d'onde est $(50 + j150) \Omega$, son impédance d'entrée est

- (a) $(50 - j150) \Omega$
- (b) $(50 + j100) \Omega$
- ☒ (c) $(50 + j150) \Omega$
- (d) $(1 + j1.5) \Omega$

2. If maximum and minimum voltages on a transmission line are 4 V and 2 V, respectively, the VSWR is

Si les tensions maximales et minimales sur une ligne de transmission sont de 4 V et 2 V, respectivement, le taux d'onde stationnaire (TOS) est

- (a) 0.5
- ☒ (b) 2
- (c) 1
- (d) 8

3. A transmission line can be used as

Une ligne de transmission peut être utilisée comme

- | | |
|--|---|
| (a) a resonant circuit | (a) un circuit résonant |
| (b) a filter | (b) un filtre |
| (c) a waveshaping network | (c) un circuit de formation d'onde |
| <input checked="" type="checkbox"/> (d) all of the above | <input checked="" type="checkbox"/> (d) tout ce qui précède |

4. The primary parameters of a transmission line are

Les paramètres principaux d'une ligne de transmission sont

- (a) I, V, γ
- ☒ (b) R, G, L, C
- (c) α, β, Z_0
- (d) E, B, J, D

5. A uniform plane wave is

Une onde plane uniforme est

- | | |
|--|--|
| (a) longitudinal in nature | (a) de nature longitudinale |
| <input checked="" type="checkbox"/> (b) transverse in nature | <input checked="" type="checkbox"/> (b) de nature transverse |
| (c) neither transverse nor longitudinal | (c) ni transverse, ni longitudinale |
| (d) x-directed | (d) va dans la direction de l'axe des x |

6. The phase velocity of an electromagnetic wave in free space is

La vitesse de phase d'une onde électromagnétique dans l'espace libre est

- | | |
|--|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> (a) independent of frequency | <input checked="" type="checkbox"/> (a) indépendante de la fréquence |
| (b) increases with increase in frequency | (b) augmente avec l'augmentation de la fréquence |
| (c) decreases with increase in frequency | (c) diminue avec l'augmentation de la fréquence |
| (d) zero | (d) zéro |

7. A wave with a propagation constant given by $0.1\pi + j0.2\pi$ has a wavelength of

Une onde ayant une constante de propagation donnée par $0.1\pi + j0.2\pi$ a une longueur d'onde de

- ☒ (a) 10 m
(b) 20 m
(c) 30 m
(d) 25 m

8. The direction of propagation of an electromagnetic wave is given by the direction of

La direction de propagation d'une onde électromagnétique est obtenue à partir de

- (a) **E**
(b) **H**
☒ (c) **$\mathbf{E} \times \mathbf{H}$**
(d) **$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$**

9. Maxwell's equations give the relations between

Les équations de Maxwell donnent les relations entre

- | | |
|--|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> (a) different fields | <input checked="" type="checkbox"/> (a) différents champs |
| (b) different sources | (b) différentes sources |
| (c) different boundary conditions | (c) différentes conditions frontières |
| (d) none of the above | (d) aucune de ces réponses |

10. The intrinsic impedance of a medium with $\sigma = 0$, $\epsilon_r = 9$ and $\mu_r = 1$ is

L'impédance intrinsèque d'un milieu ayant $\sigma = 0$, $\epsilon_r = 9$ et $\mu_r = 1$ est

- ☒ (a) $40\pi \Omega$
(b) 9Ω
(c) $120\pi \Omega$
(d) $60\pi \Omega$

11. The intrinsic impedance of a medium with $\sigma = 0$, $\epsilon_r = 9$ and $\mu_r = 1$ is

L'impédance intrinsèque d'un milieu ayant $\sigma = 0$, $\epsilon_r = 9$ et $\mu_r = 1$ est

- ☒ (a) $40\pi \Omega$
- (b) 9Ω
- (c) $120\pi \Omega$
- (d) $60\pi \Omega$

12. In free space,

Dans l'espace libre,

- (a) $\sigma = \infty$
- ☒ (b) $\sigma = 0$
- (c) $J \neq 0$
- (d) none of these answers / aucune de ces réponses

13. For a wave propagating in a hollow waveguide, oriented in the z-direction, a TEM wave has

Pour une onde se propageant dans un guide d'onde creux, orienté dans la direction z, une onde TEM a

- (a) $E_z = 0$
- (b) $H_z = 0$
- ☒ (c) all components of **E** and **H** equal to zero / toutes composantes de **E** et **H** égales zéro
- (d) $E_z = 0$ and $H_z = 0$ / $E_z = 0$ et $H_z = 0$.

14. The cut-off frequency of a TEM wave is

La fréquence de coupure d'une onde TEM est

- | | |
|--|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> (a) zero | <input checked="" type="checkbox"/> (a) zéro |
| (b) f | (b) f |
| (c) infinity | (c) l'infini |
| (d) the same as a TE ₁₀ mode. | (d) la même que le mode TE ₁₀ . |

15. If $\beta = 30$ rad/m for a TE₂₁ mode in a rectangular waveguide, the wavelength of this mode in the guide is

Si $\beta = 30$ rad/m pour un mode TE₂₁ dans un guide d'onde rectangulaire, la longueur d'onde du mode dans ce guide est

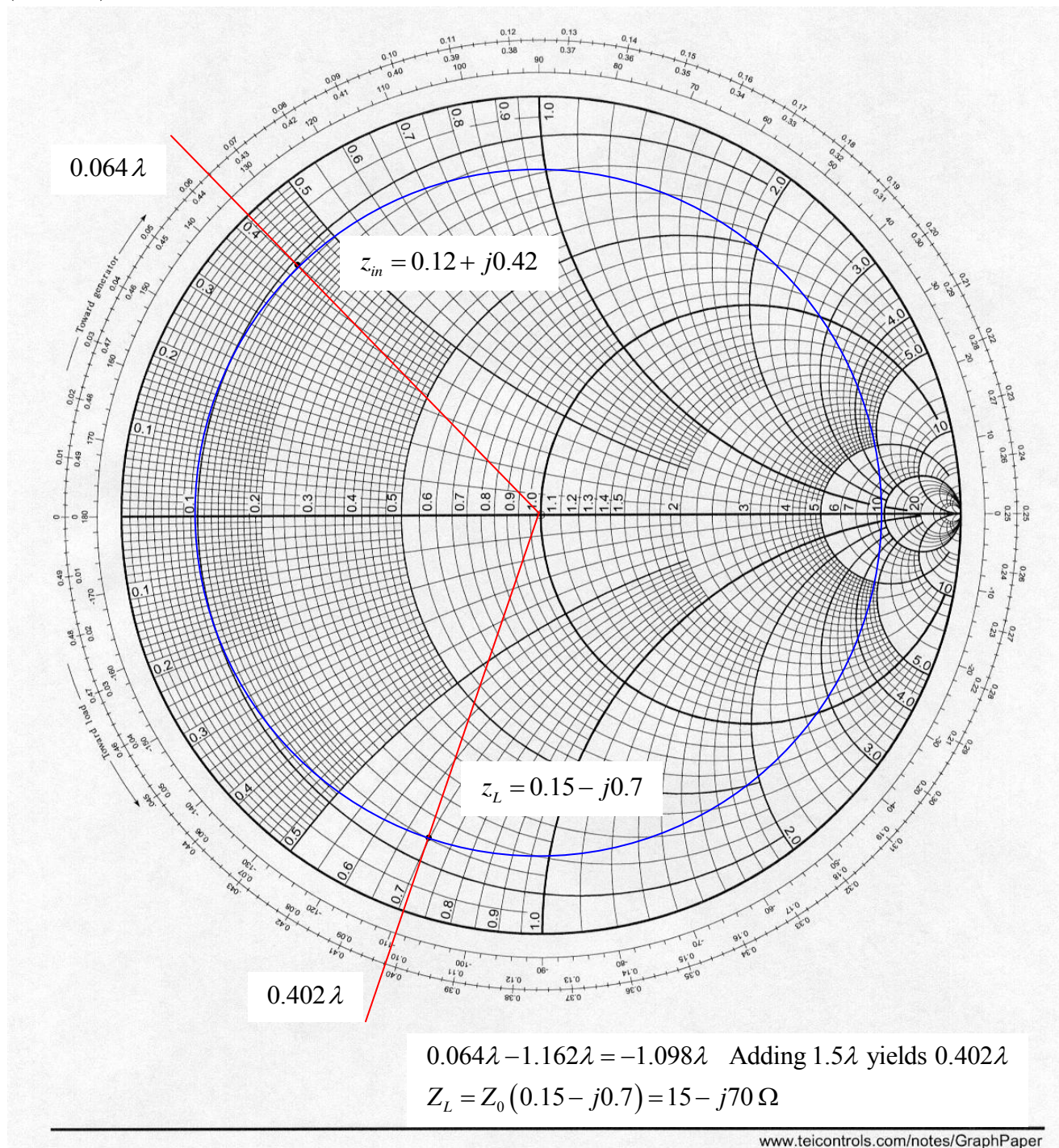
- (a) 0.209 cm
- ☒ (b) 0.209 m
- (c) 2.09 m
- ☒ (d) 20.9 cm

Questions à Réponse Longue // Long Answer Questions

Question 1

The input impedance for a 100Ω lossless transmission line of length 1.162λ is $(12 + j42)\Omega$. Determine the load impedance using the Smith Chart. Explain what you are doing.

Une ligne de transmission sans pertes de 100Ω et de longueur 1.162λ a une impédance d'entrée de $(12 + j42)\Omega$. Déterminer l'impédance de charge avec l'abaque de Smith. Expliquer ce que vous faites.



Question 2

A uniform plane wave whose electric field is of the form

Une onde plane uniforme dont le champ électrique est donné par

$$\mathbf{E}(z, t) = \hat{\mathbf{a}}_x 7.5 e^{-0.004z} \cos(0.3\pi \times 10^8 t - 0.5\pi z) \quad \text{V/m}$$

is propagating in a homogeneous isotropic nonmagnetic medium.

se propage dans un milieu homogène, isotrope et non magnétique.

(a) Write the electric field in phasor notation.

Écrire le champ électrique sous forme de phaseur.

$$\tilde{\mathbf{E}}(z) = \hat{\mathbf{a}}_x 7.5 e^{-0.004z} e^{-j0.5\pi z} = \hat{\mathbf{a}}_x E_0 e^{-\gamma z}$$

Therefore

$$E_0 = 7.5 \text{ V/m}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta \Rightarrow \alpha = 0.004 \text{ Np/m} \quad \beta = 0.5\pi \text{ rad/m}$$

(b) What are the wave frequency, the wavelength, and the phase velocity?

Quelles sont la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase de l'onde ?

$$\omega = 2\pi f = 0.3\pi \times 10^8 \text{ rad/s} \Rightarrow f = 0.15 \times 10^8 = 15 \text{ MHz}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 0.5\pi \text{ rad/m} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{0.5\pi} = 4 \text{ m}$$

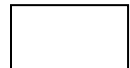
$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{0.3\pi \times 10^8}{0.5\pi} = 0.6 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(c) What is the intrinsic impedance of the medium?

Quelle est l'impédance intrinsèque du milieu ?

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\beta^2}{\mu \omega^2} = \frac{(0.5\pi)^2}{(4\pi \times 10^{-7})(0.3\pi \times 10^8)^2} = 2.21 \times 10^{-10} \text{ F/m}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{2.21 \times 10^{-10}}} = 75.4 \Omega$$



(d) What is the conductivity of the medium? Is the medium a low-loss medium, a good conductor, or somewhere in between? Justify your answer.

Quelle est la conductivité du milieu ? Est-ce un milieu à faibles pertes, un bon conducteur ou entre les deux ? Justifier votre réponse.

It is not a good conductor because $\alpha \neq \beta$

It is not lossless because $\alpha \neq 0$

Assume it is low-loss and check:

$$\alpha = 0.5\sigma \sqrt{\mu/\varepsilon} \Rightarrow \sigma = 2(0.004) \sqrt{\frac{2.21 \times 10^{-10}}{4\pi \times 10^{-7}}} = 1 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\varepsilon \omega} = \frac{1.06 \times 10^{-4}}{(2.21 \times 10^{-10})(0.3\pi \times 10^8)} = 5.1 \times 10^{-3} \ll 1$$

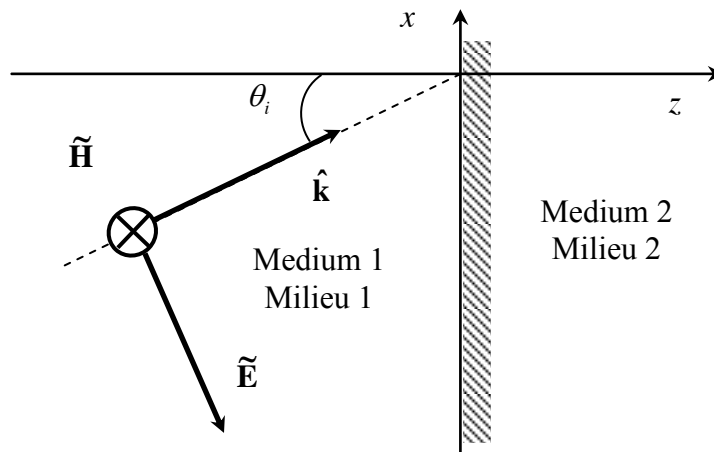
Yes, it is a low-loss medium.



Question 3

Consider a uniform plane wave obliquely incident from medium 1 onto medium 2, as shown below; the incident angle is $\theta_i = 30^\circ$. The constitutive parameters of medium 1 are $\epsilon_r = 4$ and $\mu_r = 16$, while those of medium 2 are $\epsilon_r = 9$ and $\mu_r = 27$. The magnitude of the incident magnetic field is $H_{io} = 0.1$ A/m, and its direction is $-\hat{\mathbf{a}}_y$ as shown in the figure.

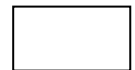
Soit une onde plane uniforme obliquement incidente d'un milieu 1 à un milieu 2 (voir figure ci-dessous). L'angle d'incidence est $\theta_i = 30^\circ$. Les paramètres du milieu 1 sont $\epsilon_r = 4$ et $\mu_r = 16$, tandis que ceux du milieu 2 sont $\epsilon_r = 9$ et $\mu_r = 27$. L'amplitude du champ magnétique incident est $H_{io} = 0.1$ A/m et sa direction est $-\hat{\mathbf{a}}_y$ comme montré sur la figure.



- (a) Is this wave transverse electric or transverse magnetic? Justify your answer.

Cette onde est-elle transverse électrique ou magnétique ? Justifiez votre réponse.

This is a TM wave, since \mathbf{H} is normal to the plane of incidence



- (b) Find the transmitted angle.

Déterminer l'angle transmis.

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \sin \theta_i &= \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \sin \theta_t \\ \Rightarrow \sin \theta_t &= \sin(30^\circ) \sqrt{\frac{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}{\mu_{r2} \epsilon_{r2}}} = (0.5) \sqrt{\frac{(16)(4)}{(27)(9)}} = (0.5)(0.5132) = 0.2566 \end{aligned}$$

Therefore $\theta_t = 14.9^\circ$



(c) Find the reflection and transmission coefficients.

Déterminer les coefficients de réflexion et de transmission.

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = \frac{\sqrt{27/9} \cos(14.9^\circ) - \sqrt{16/4} \cos(30^\circ)}{\sqrt{27/9} \cos(14.9^\circ) + \sqrt{16/4} \cos(30^\circ)}$$

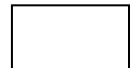
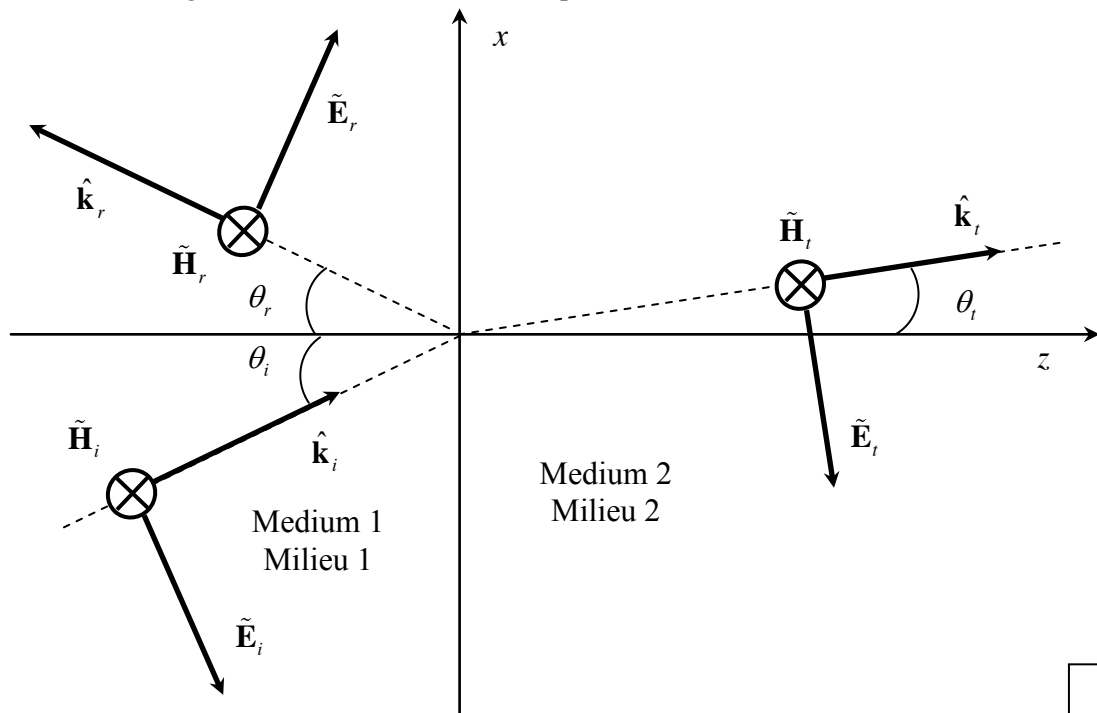
$$= \frac{(1.7321)(0.9665) - (2)(0.866)}{(1.7321)(0.9665) + (2)(0.866)} = \frac{1.6741 - 1.732}{1.6741 + 1.732} = \frac{-0.0579}{3.4061} = -0.017$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = \frac{2\sqrt{27/9} \cos(30^\circ)}{\sqrt{27/9} \cos \theta_t + \sqrt{16/4} \cos \theta_i} = \frac{3}{3.4061} = 0.88$$



(d) Sketch the reflected and transmitted field directions on a diagram.

Dessiner sur un diagramme les directions des champs réfléchis et transmis.



Question 4

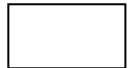
- (a) Design an air-filled rectangular waveguide to operate at a fundamental mode of a cutoff frequency of 10 GHz. Assume $a = 2b$.

Concevoir un guide d'onde rectangulaire rempli d'air et opérant à un mode fondamental de fréquence de coupure 10 GHz. Supposons $a = 2b$.

$$f_c^{(m,n)} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

The fundamental is TE₁₀: $f_c^{(10)} = \frac{c}{2a} \Rightarrow a = \frac{c}{2f_c^{(10)}} = \frac{3 \times 10^8}{2(10 \times 10^9)} = 0.015 \text{ m} \quad \text{or} \quad 1.5 \text{ cm}$

Thus: $b = \frac{1}{2}a = 0.75 \text{ cm}$



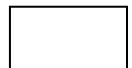
- (b) Calculate the cutoff frequencies for the TE₁₁ and TM₁₁ modes of this guide.

Calculer les fréquences de coupure pour les modes TE₁₁ et TM₁₁ de ce guide.

$$f_c^{(m,n)} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

$$\text{TE}_{11} \quad f_c^{(11)} = \frac{3 \times 10^{10}}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{1.5}\right)^2 + \left(\frac{1}{0.75}\right)^2} = 2.24 \times 10^{10} \text{ Hz} \quad \text{or} \quad 22.4 \text{ GHz}$$

$$\text{TM}_{11} \quad f_c^{(11)} = \frac{3 \times 10^{10}}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{1.5}\right)^2 + \left(\frac{1}{0.75}\right)^2} = 2.24 \times 10^{10} \text{ Hz} \quad \text{or} \quad 22.4 \text{ GHz}$$



Extra space / Espace supplémentaire

Equation sheet / Page de formules

$$\Gamma = \frac{V_o^-}{V_o^+} = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} = |\Gamma| e^{j\theta_r} \quad S = \frac{|V_{\max}|}{|V_{\min}|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad Z(l) = \frac{V(l)}{I(l)} = Z_o \frac{Z_L + Z_o \tanh(\gamma l)}{Z_o + Z_L \tanh(\gamma l)}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{k_1}{k_2} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$$

$$\Gamma_{\perp} = \Gamma_{TE} = \frac{E_o^r}{E_o^i} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad \tau_{\perp} = \tau_{TE} = \frac{E_o^{tr}}{E_o^i} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

$$\Gamma_{\parallel} = \Gamma_{TM} = \frac{E_o^r}{E_o^i} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \quad \tau_{\parallel} = \tau_{TM} = \frac{E_o^{tr}}{E_o^i} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$$

$$f_c^{m,n} = \frac{1}{2\sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} \quad \beta = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c^{m,n}}{f}\right)^2}$$

$$u_p = \frac{u}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c^{m,n}}{f}\right)^2}} \quad Z_{TM} = \eta_{TEM} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c^{m,n}}{f}\right)^2} \quad Z_{TE} = \frac{\eta_{TEM}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c^{m,n}}{f}\right)^2}}$$

	General Case Cas général	Lossless Milieu sans pertes	Low loss Milieu à faibles pertes	Good conductor Bon conducteur
α (Np/m)	$\omega \left\{ \frac{1}{2} \mu \varepsilon' \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$	0	$\frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\sqrt{\pi f \mu \sigma}$
β (rad/m)	$\omega \left\{ \frac{1}{2} \mu \varepsilon' \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} + 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$	$\omega \sqrt{\mu \varepsilon}$	$\omega \sqrt{\mu \varepsilon}$	$\sqrt{\pi f \mu \sigma}$
η_c (Ω)	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \left(1 - j \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$(1 + j) \frac{\alpha}{\sigma}$
u_p (m/s)	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$	$\frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{4\pi f}{\mu \sigma}}$