Université d'Ottawa · University of Ottawa
Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique
Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT 1732B Examen Final, Professeur: M'hammed Mountassir

23 AVRIL 2019 (Session d'hiver). Durée: 3 heures.

Nom de famille:____________________

Prénom:______________________ Numéro de siège:___________

- La durée de cet examen est **180 minutes**.
- Cet examen est divisé en deux parties :
- Partie A comprend 6 questions à choix multiples chacune notée sur 2 Points. Vous devez écrire votre réponse dans le tableau fourni sur la page 2 de l'examen. Il n'y aura aucun point partiel pour les questions à choix multiples.
- Partie B comprend 7 questions à développement. La bonne réponse nécessite une justification écrite lisiblement et logiquement; vous devez me convaincre que vous savez pourquoi votre solution est la bonne. Entourez vos réponses finales.
- Utilisez l'espace spécifié pour répondre à chacune des questions. Si jamais l'espace ne vous suffit pas ou que vous utilisez l'endos de la page veuillez indiquer clairement où se trouve votre réponse ainsi que la suite du développement, s'il y a lieu.
- **Cet examen est à livre fermé et vos notes de cours ne seront pas permises.**
- Seules les calculatrices approvées par la Faculté des Sciences (TI-30X, TI-34X, Casio FX-260X et Casio FX-300X) seront permises .
- Il est interdit de se servir de téléphone cellulaire, de dispositifs électroniques ou de notes de cours. Les téléphones et les gadgets électroniques doivent être fermés et rangés dans votre sac : vous ne pouvez les laisser dans vos poches. Sinon, on pourrait vous demander de quitter la salle de lexamen immédiatement. Ce sera le cas aussi POUR TOUTE ACTIVITÉ SUSPECTE. En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus. Signature :____________________

Bonne Chance!

585, av. King-Edward C.P. 450, Succ. A
Ottawa (Ontario) K1N 6N5 Canada
585 King Edward Ave., P.O. Box 450, Stn. A
Ottawa, Ontario K1N 6N5 Canada
(613) 562-5864 • Téléc./Fax (613) 562-5776
Courriel/Email: uomaths@science.uottawa.ca

Nom de famille:______________________ Prénom:_______________________

Numéro d'étudiant(e) :___________________ Total des points: ___________ sur 56

Vos réponses aux questions à choix multiples (2 points pour chaque bonne réponse):

Problem	1	2	3	4	5	6
votre réponse						
votre note						

Votre note pour les questions à développement:

Question	7	8	9	10	11	12	13
Sur	2	2	5	5	10	6	14
Vos notes							

PARTIE A: QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Recopiez vos réponses dans le tableau de la page 2.

Question 1. (2 points) (a) Calculer l'intégrale indéfinie suivante:

$$\int e^{\cos(t)} \sin(t)\, dt = \boxed{}$$

(b) Maintenant évaluer l'intégrale définie suivante et encerclez la bonne réponse.

$$\int_0^{\pi} e^{\cos(t)} \sin(t)\, dt.$$

A: 0; B: $e - e^{-1}$; C: $e^{-1} - e$;
D: $e^{\pi} - 1$; E: $\pi(e^{\pi} - 1)$; F: 1

Question 2. (2 points)

(a) Si $z = 1 + 3i$ et $v = -2 + i$ alors $\frac{z}{v} =$

A: $4 - 5i$; B: $1 - 7i$; C: $\frac{4}{3}$;
D: $\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$; E: $-\frac{1}{2} + 3i$; F: $\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$

(b) La forme polaire de $w = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}i$ est

A: $2\sqrt{6}\, e^{-i\pi/6}$; B: $2\sqrt{3}\, e^{-i\pi/3}$; C: $-\sqrt{24}\, e^{\pi/6}$;
D: $\sqrt{12}\, e^{i\pi/3}$; E: $2\sqrt{6}\, e^{-i\pi/4}$; F: $2\sqrt{3}\, e^{-i\pi/6}$

Question 3. **(2 points)** Soit l'intégrale suivante:

$$\int_0^1 \ln(x)\, dx.$$

(a) Pourquoi cette intégrale est impropre? Choisissez et encerclez la bonne réponse.

A: car $\lim_{t\to\infty} \ln(x) = \infty$. ;
B: car $\ln(x)$ n'est pas une dérivée d'une fonction élémentaire. ;
C: car le domaine de $\ln(x)$ n'est pas égal à l'ensemble des réels. ;
D: car $\ln(x)$ a une asymptote verticale en $x = 0$;
E: car $\ln(x)$ est égal à zéro en $x = 1$. ;
F: car $\ln(x)$ admet une asymptote horizontale.

(b) Déterminer la valeur de cette intégrale impropre si elle converge.

A: Elle diverge B: 0 ; C: 1;

D: 300 ; E: -4 ; F: -1

Question 4. **(2 points)** Soient les matrices suivantes:

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Quelle est la dimension de $P^{-1}Q$?

A: impossible à calculer B: 2×2 ; C: 2×4;

D: 4×2 ; E: 8 ; F: 2×6

(b) Quel est l'élément qui occupe la position $(2, 1)$ dans la matrice $P^{-1}Q$?

A: 4 B: -2 ; C: -1;

D: 0 ; E: 8.5 ; F: 2

Question 5. Déterminer la solution de l'équation différentielle à variables séparables suivante:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t^3} + x, \quad avec \quad la \quad condition \quad x(1) = e.$$

A: $x(t) = e^{1+t-t^{-2}}$;
B: $x(t) = e^{1+t-t^2}$;
C: $x(t) = \ln\left[1/2 - 1/(2t^2) + t\right]$;

D: $x(t) = \ln\left(1 + t - t^2\right)$;
E: $x(t) = e^{1/2-1/(2t^2)+t}$.

Question 6. **(2 points)** Dans une ferme la population des lapins x croit selon le modèle:

$$\frac{dx}{dt} = x(100 - x) - hx$$

où $h > 0$; t est le temps mesuré en années.

(a) Quels sont les points d'équilibre de ce système?

A: 0 et $h - 99$; B: 0 et $99 - h$; C: 0 et 99;

D: 0 et $h - 100$; E: 0 et $100 - h$; F: 0 et 100

(b) Sous quelle condition, le point d'équilibre non nul trouvé en (a) serait stable?

A: $h = 1$; B: $h < 100$; C: $h > 100$;

D: $h \neq 100$; E: $h > 0$ F: $h = 100$

PARTIE B: QUESTIONS À DÉVELOPPEMENT

Question 7. (2 points) Soit la fonction:

$$f(x, y) = (y - 3)e^{xy-2}.$$

(a) Trouver les dérivées partielles de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \boxed{}$$

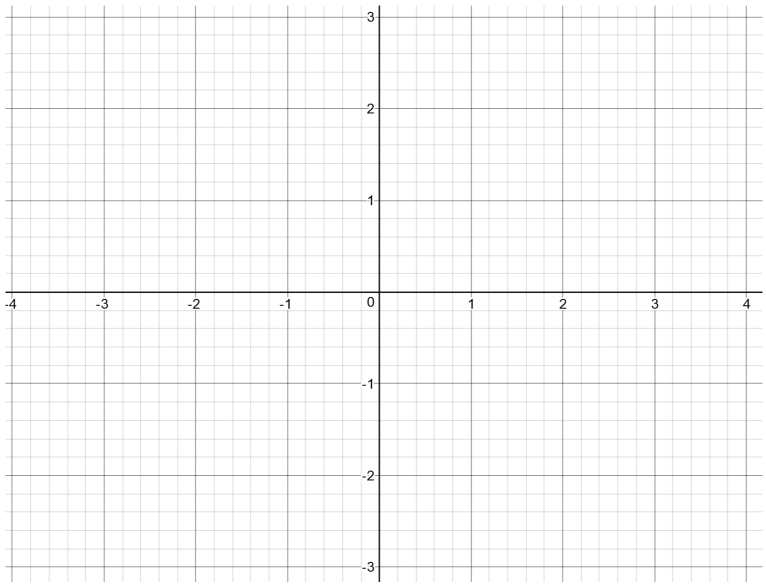
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \boxed{}\ .$$

(b) Donner l'équation du plan tangent au graphique de f au point $P(2, 1)$:

$$\boxed{}$$

Question (. 8) (2 points) Dessiner le domaine et deux courbes de niveaux de la fonction suivante:

$$z = \sqrt{x - y^2 + 2}.$$



Question 9. **(5 points) Calculer l'intégrale indéfinie suivante:**

$$\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 28x - 10}{x^2 + 9}\, dx.$$

Question 10. (5 points) Soit le système d'équations linéaires suivant, dont les variables sont x, y et z, avec des paramètres a et b:

$$\begin{aligned} 2x + 5y + az &= b \\ x + 3y + 2az &= 4b \\ 3x + 8y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

Échelonner la matrice augmentée associée à ce système et déterminer les valeurs de a et b pour que ce système admet (a) une unique solution, (b) aucune solution ou (c) une infinité de solutions. Justifiez votre démarche.

Question 11. **(5+1+2+2=10 points,) Soit l'équation diffréntielle autonome suivante**

$$\frac{dP}{dt} = 2P^2 - 70P + 500.$$

qui modélise la dynamique de la population d'une ville, avec l'immigration et émigration .

(a) (5 points) Reécrivez cette équation sous une autre forme, pour montrer que c'est une équation à variables séparables et trouver sa solution, en exprimant P **comme fonction de** t**.**

(b) (1 point) Supposons qu'initialement on a $P(0) = 15$**. Quelle est la solution particulière dans ce cas?**

Question 11. continuation. Rappellons que

$$\frac{dP}{dt} = 2P^2 - 70P + 500.$$

(c) (2 points) Trouver tous les points d'équilibre de cette équation et dessiner le diagramme de phases et étudier leur stabilité. Donner tout les détails de vos calculs.

(d) (2 points) Considérons encore qu'initialement $P(0) = 15$**. Donner votre prédiction à long terme de cette population, en utilisant à la fois votre réponse en (b) et votre diagramme en (c).Donner tout les détails de vos calculs.**

Question 12. **(2+2+2=6 points) Soit le système d'équations différentielles linéaires suivant:**

$$\frac{dx}{dt} = -5x + 20y$$
$$\frac{dy}{dt} = -2x + 7y.$$

(a) (2 points) Identifiez la matrice A et le vecteur $\vec{x}$ tels que ce système puisse s'écrire sous la forme $\vec{x}' = A\vec{x}$. Montrer que $1 + 2i$ est une valeur propre de A.

(b) (2 points) Trouver un vecteur propre de A associé à $\lambda = 1 + 2i$.

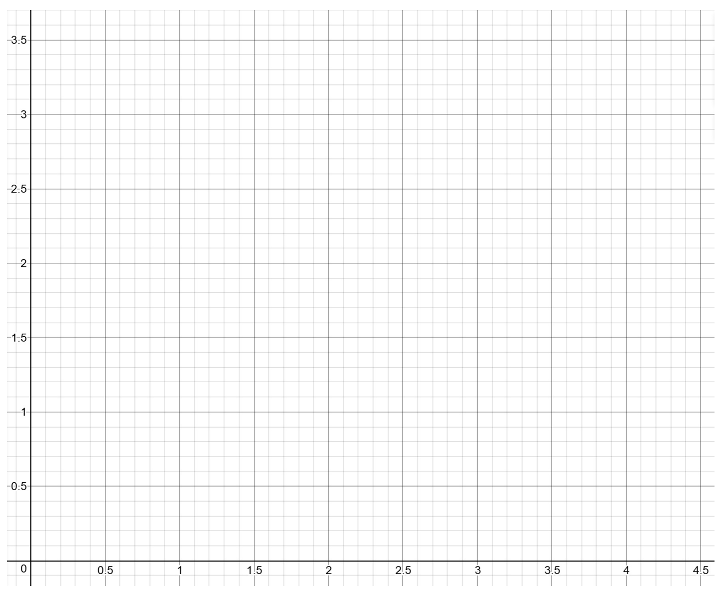
(c) (2 points) Déterminer la solution générale de ce système.

Question 13. (2+4+2+4+2=14 points) Une maladie se propage dans une communauté. La population est constituée de x individus susceptibles d'attraper cette maladie et y individus qui sont infectés. Un système d'équations différentielles non linéaires permet de modéliser cette situation sous la forme suivante:

$$\frac{dx}{dt} = 20 - 5xy - 5x$$
$$\frac{dy}{dt} = 5xy - 10y.$$

(a) (2 points) Déterminer les nullclines et les points d'équilibre de ce système.

(b) (4 points) Dessiner les the nullclines dans le plan ci-dessous. Indiquer pour chacune des zones délimitées par les nullclines ladirection des champs de vecteurs dans lepremier quadrant.



Question 13. continuation. Recopiez vos points d'q̇uilibre ci-contre:

(c) (2 points) Déterminer le Jacobien associé à ce système.

(d) (4 points) Pour chacun des points d'équilibre, trouver les valeurs propres correspondantes à la matrice Jacobienne. Donner les détails de vos calculs.

(e) (2 point) Discuter la stabilité de chacun des points d'équilibre.

Page supplémentaire pour vos calculs.