5 Fonctions principales

⟹ fonction linéaire : $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

- Le coefficient a est appelé la pente
- Le coefficient b est appelé l'ordonnée à l'origine
- Le graphe est une droite.
- Le domaine est $\mathbb{R}$.
- L'image est $\mathbb{R}$ si $a \neq 0$ et $\{b\}$ si $a = 0$.

⟹ droite horizontale : $y = b$ (fonction constante)

- pente $a = 0$
- domaine $= \mathbb{R}$
- image $= \{b\}$

⟹ droite verticale : $x = a$

- pente non définie
- La droite verticale n'est pas une fonction.

⟹ polynômes : $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$

- Coefficients de $P(x)$: $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

- degré de $P(x)$ = plus grande valeur de n telle que $c_n \neq 0$
- domaine $= \mathbb{R}$
- racines de $P(x)$ sont les nombres $r \in \mathbb{R}$ tels que $P(r) = 0$
- Si $P(r) = 0$ pour un certain $r \in \mathbb{R}$ alors $P(x)$ est divisible par $x - r$.

<u>Exemple 8 :</u> $P(x) = 3 + \frac{5}{4}x + x^2 + x^3$.

Les coefficients de $P(x)$ sont : 3, $\frac{5}{4}$, 1 et 1.

Le degré de $P(x)$ est 3.

$$P\left(-\frac{3}{2}\right) = 3 + \frac{5}{4}\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^3$$
$$= 3 - \frac{15}{8} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8}$$
$$= \frac{3 \times 8 - 15 + 2 \times 9 - 27}{8}$$
$$= 0$$

Donc $-\frac{3}{2}$ est une racine de $P(x)$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + x^2 + \frac{5}{4}x + 3 & x + 3/2 \\
\cline{2-2}
x^3 + \frac{3}{2}x^2 & x^2 - \frac{1}{2}x + 2 \\
\cline{1-1}
0 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + 3 & \\
\quad - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + 3 & \\
\cline{1-1}
\quad 0 + 2x + 3 & \\
\quad\quad 2x + 3 & \\
\cline{1-1}
\quad\quad 0 &
\end{array}$$

$P(x)$ est divisible par $x + \frac{3}{2} \Rightarrow$

$x^3 + x^2 + \frac{5}{4}x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + 2\right)$

⟹ <u>Polynômes de degré 2</u> : $P(x) = ax^2 + bx + c$

- parabole avec coordonnée du sommet $\left(-\frac{b}{2a}, P\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- $a > 0$ parabole orientée vers le haut 
- $a < 0$ parabole orientée vers le bas 

- discriminant : $b^2 - 4ac$

- racines $\begin{cases} 2 \text{ racines distinctes } \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ si } b^2-4ac> \\ \text{racine double } \frac{b}{2a} \text{ si } b^2-4ac = 0 \\ \text{pas de racine si } b^2-4ac < 0 \end{cases}$

⟹ <u>fonctions rationnelles</u> : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

$P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynomes et $Q(x) \neq 0$.

domaine de f = tous les réels sauf les racines de $Q(x)$.

<u>Exemple 9</u> : $f(x) = \frac{-x^2-4x+5}{x^2-1}$

domaine $= \{x \in \mathbb{R} : x^2-1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\}$

<u>Attention</u> ! $f(x) = \frac{-(x+5)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-(x+5)}{x+1}$

Mais on trouve le domaine avant de simplifier

Exercice

Trouver le domaine de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5 - \frac{3}{x}}}$

Solution :

La fonction f est définie pour :

$x \neq 0$ et $\sqrt{5 - \frac{3}{x}} \neq 0$ et $5 - \frac{3}{x} \geq 0 \Rightarrow$

$x \neq 0$ et $5 - \frac{3}{x} \neq 0$ et $5 - \frac{3}{x} \geq 0 \Rightarrow$

$x \neq 0$ et $x \neq \frac{3}{5}$ et $\frac{5x-3}{x} \geq 0$

On a :

$\frac{5x-3}{x} = 0 \Rightarrow 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	0		$\frac{3}{5}$	$+\infty$
$5x-3$	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{5x-3}{x}$	$+$		$-$		$+$

Le domaine de f est $D_f =]-\infty, 0[\cup]\frac{3}{5}, +\infty[$

NB : On a exclu les points $x = 0$ et $x = \frac{3}{5}$.

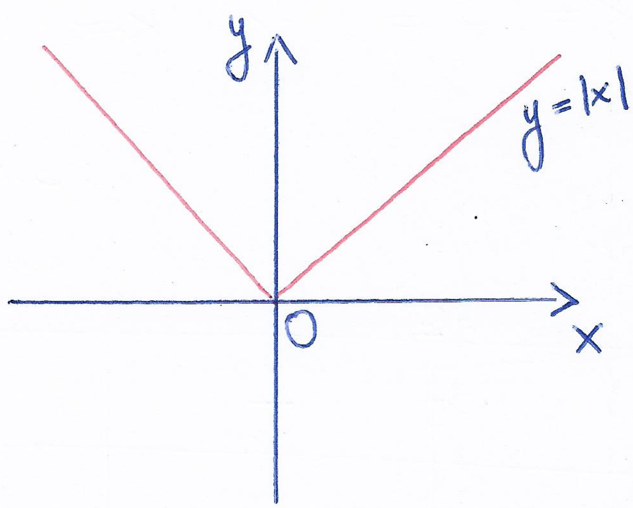
$\Longrightarrow$ <u>valeur absolue</u> : $f(x) = |x|$

- $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- domaine $= \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

- image $= [0, +\infty[$

- fonction paire : $f(-x) = f(x)$ (symétrie par rapport à Oy)



<u>Exemple 10 :</u>

Trouver x tel que $|x^2 - 5| = 1$

<u>Solution</u>

$$|x^2 - 5| = 1 \iff x^2 - 5 = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 - 5 = -1$$
$$\iff x^2 = 6 \quad \text{ou} \quad x^2 = 4$$
$$\iff |x| = \sqrt{6} \quad \text{ou} \quad |x| = 2$$
$$\iff x = \pm\sqrt{6} \quad \text{ou} \quad x = \pm 2$$

Exercice :

Trouver le domaine de $f(x) = \sqrt[4]{x^2-9}$

Solution :

La fonction $f(x) = \sqrt[4]{x^2-9} = (x^2-9)^{1/4}$ est définie pour

$$x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 9$$
$$\Rightarrow |x| \geq 3$$
$$\Rightarrow x \geq 3 \text{ ou } -x \geq 3$$
$$\Rightarrow x \geq 3 \text{ ou } x \leq -3$$

$D_f =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$.

6 Composée de fonctions

Etant données deux fonctions f et g, la fonction composée $f \circ g$ est définie par :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Exemple 11 :

Si $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{2-x}$ alors :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2-x}\right) = \sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$$

7 Fonctions réciproques

Définition

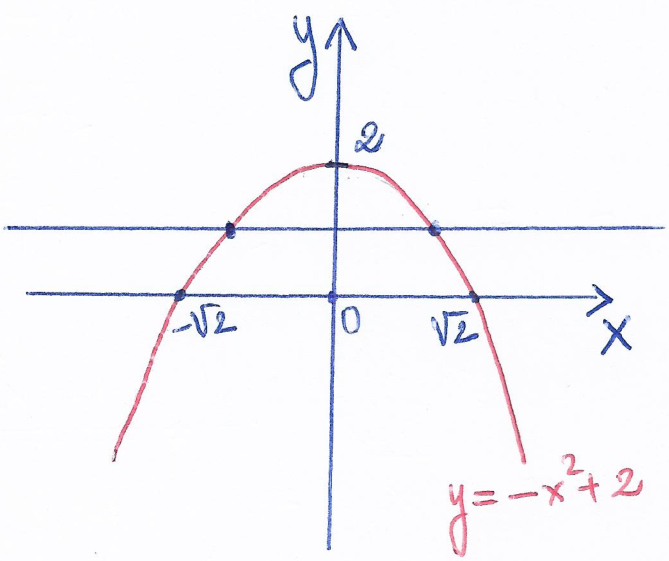
Une fonction f est dite injective si elle ne prend jamais la même valeur deux fois ; autrement dit :

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ lorsque } x_1 \neq x_2.$$

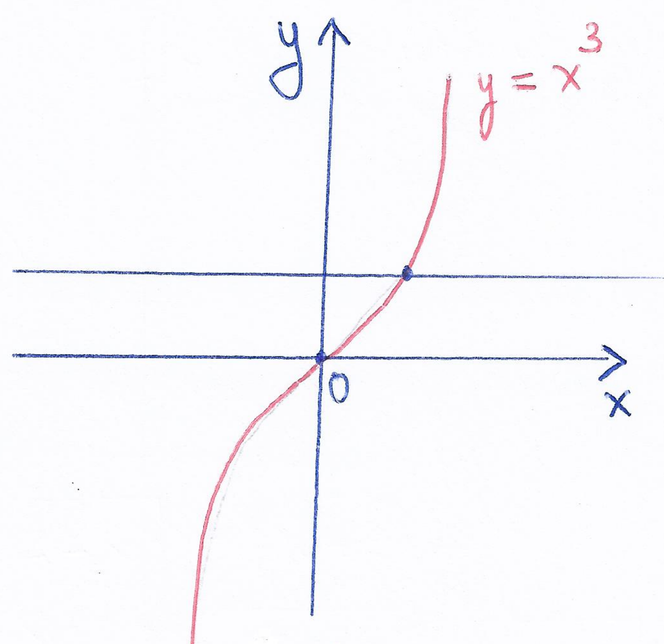
Test de la droite horizontale

Une fonction est injective si et seulement si aucune droite horizontale ne coupe son graphique plus d'une fois, c'est-à-dire en plus d'un point.

Exemple 12 :



pas injective



injective

Définition

Soit f une fonction injective de A vers B. Alors, sa fonction réciproque, notée f^{-1}, de B vers A est définie par :

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y \ , \ \forall y \in B.$$

Exemple 13 :

Trouver la fonction réciproque (inverse) de $f(x) = \dfrac{-2x-1}{3x+2}$

Solution :

1. Ecrire $y = f(x) \iff y = \dfrac{-2x-1}{3x+2}$

2. Echanger x et y : $x = \dfrac{-2y-1}{3y+2}$.

3. Isoler à nouveau y :

$$x(3y+2) = -2y-1$$
$$3xy + 2x = -2y-1$$
$$3xy+2y = -2x-1$$
$$y(3x+2) = -2x-1$$
$$y = \frac{-2x-1}{3x+2}$$

4. On obtient : $f^{-1}(x) = y = \dfrac{-2x-1}{3x+2}$

Remarque :

domaine de f^{-1} = image de f

image de f^{-1} = domaine de f

8 Fonctions importantes

$\Rightarrow$ fonction puissance : $f(x) = x^a$

Cas 1 : $a = n$, n entier positif

domaine $= \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

cas 2 : $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

domaine $=]0, +\infty[$

$\Rightarrow$ fonction exponentielle : $f(x) = a^x$, $a > 0$ et $a \neq 1$

- a est appelé la base
- domaine $= \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
- image $= [0, +\infty[$
- base naturelle : $f(x) = e^x$, $e \approx 2{,}718$

- Propriétés :

$$a^x a^y = a^{x+y} \qquad (ab)^x = a^x b^x$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^0 = 1$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

Exemple 14 :

Résoudre $2^{x+3} = 16^{2x+1}$

Solution :

$$2^{x+3} = 16^{2x+1} = (2^4)^{2x+1} = 2^{4(2x+1)}$$

Comme $a^x = a^y \iff x = y$ alors

$$x + 3 = 4(2x+1) = 8x + 4 \implies$$

$$7x = -1 \implies x = -\frac{1}{7}$$

$\implies$ fonction logarithmique : $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$ et $a \neq 1$

- a est appelé la base
- domaine $=]0, +\infty[$

- $\log_a(x) = y \iff a^y = x \quad (x > 0)$
- $y = \log_a(x)$ est la réciproque de $y = a^x$ et vice-versa
- Pour $a = 10$, on utilise $\log_{10}(x) = \log(x)$
- Propriétés :

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^p) = p\log_a(x)$$

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

- logarithme naturel : $f(x) = \log_e(x) = \ln(x)$

  * $\log_b(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(b)}$
  * $\ln(e) = 1$
  * $\ln(1) = 0$

Exemple 15 :

Résoudre $\log(x+1) + \log(x+4) = 1$

Solution :

domaine de $\log(x+1) = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0\} =]-1, +\infty[$

domaine de $\log(x+4) = \{x \in \mathbb{R} : x+4 > 0\} =]-4, +\infty[$

Par conséquent le domaine de l'équation est

$]-1, +\infty[\cap]-4, +\infty[=]-1, +\infty[$

On a :

$$\log(x+1) + \log(x+4) = \log((x+1)(x+4)) = 1 \Rightarrow$$
$$\log(x^2+5x+4) = 1 \Rightarrow$$
$$x^2+5x+4 = 10^1 = 10 \Rightarrow$$
$$x^2+5x-6 = 0 \Rightarrow$$
$$x = -6 \text{ ou } x = 1$$

$x = -6$ n'appartient pas au domaine de l'équation $]-1, +\infty[$

$x = 1$ appartient au domaine de l'équation $]-1, +\infty[$

D'où la solution est $x = 1$.