Les fonctions

Définition

Une fonction f est une règle qui associe à chaque élément x d'un ensemble D exactement un élément $f(x)$ d'un ensemble E.

- L'ensemble D est appelé le domaine de définition de f.
- L'élément $f(x)$ est appelé l'image de $x \in D$ par f.
- L'ensemble $\{f(x) : x \in D\}$ est appelé l'image de f.
- On écrit souvent $f : D \longrightarrow E$ pour désigner une fonction de domaine D vers l'ensemble E.

Exemple 1 : $f(x) = x^2$

Domaine $= \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Image de $f = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

$= \{x^2 : x \in \mathbb{R}\}$

$= [0, +\infty[$

Exemple 2 : $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, $x \geq 0$.

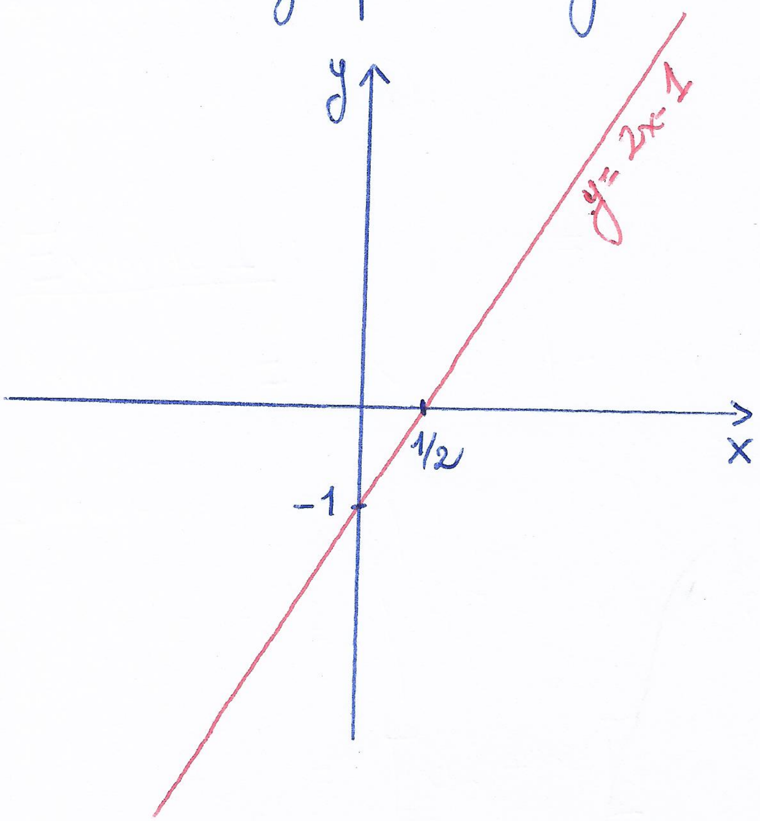
$$\begin{aligned} \text{Domaine} &= \{ x \geq 0 : x - 1 \neq 0 \} \\ &= \{ x \geq 0 : x \neq 1 \} \\ &= [0, 1[\cup]1, +\infty[\end{aligned}$$

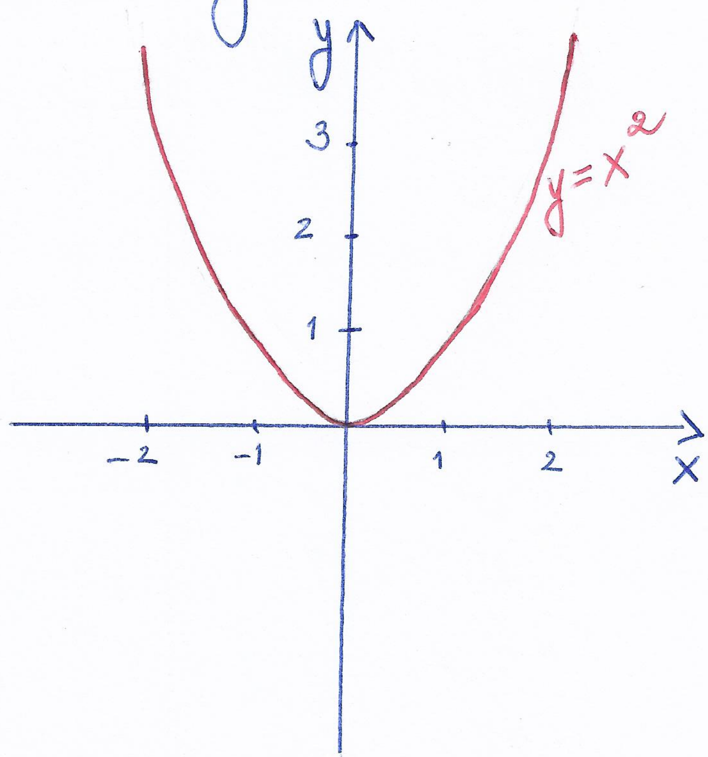
Définition :

Le graphe d'une fonction f est l'ensemble des couples $\{ (x, f(x)) : x \in D \}$. C'est une courbe d'équation $y = f(x)$.

Exemple 3 :

Tracer le graphe de $y = 2x - 1$ et $y = x^2$.

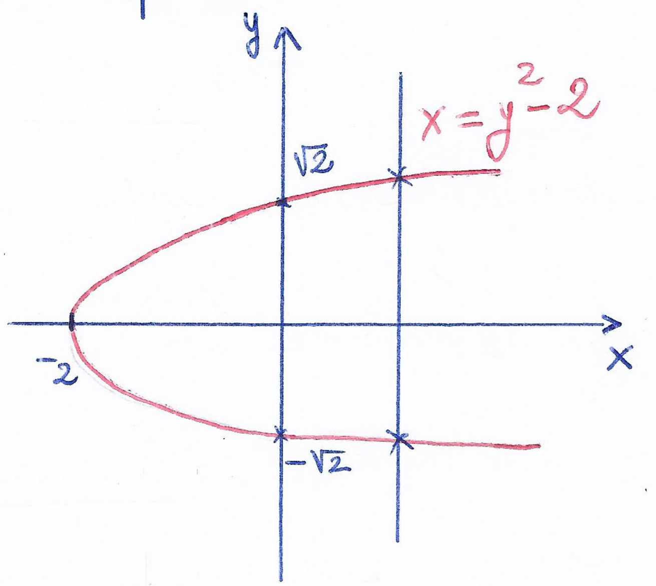


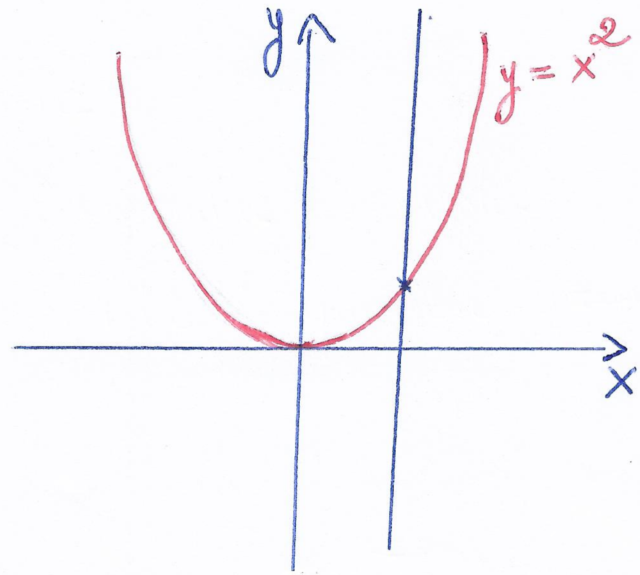


Test de la droite verticale

Une courbe du plan xy est le graphique d'une fonction f si et seulement si toute droite verticale du plan coupe le graphe en un seul point.

Exemple 4





n'est pas le graphe d'une fonction

est le graphe d'une fonction

$\Rightarrow x = y^2 - 2$ n'est pas une fonction

$\Rightarrow y = x^2$ est une fonction

1 Croissance / décroissance d'une fonction

Une fonction f est croissante sur un intervalle I si :

$$f(x_1) \leq f(x_2) \text{ lorsque } x_1 \leq x_2 \text{ dans } I$$

Une fonction f est décroissante sur I si :

$$f(x_1) \geq f(x_2) \text{ lorsque } x_1 \leq x_2 \text{ dans } I.$$

Exemple 5 :

$f(x) = x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0[$.

② Symétrie

Une fonction f est dite paire si $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$

Une fonction f est dite impaire si $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$

Exemple 6

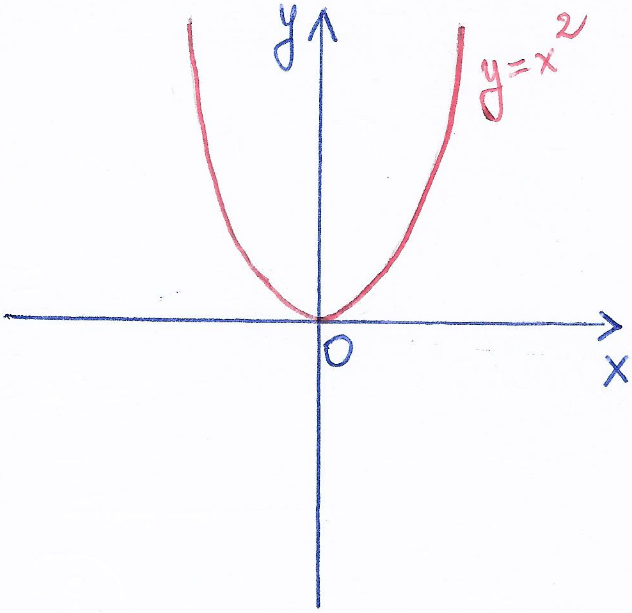
(a) $f(x) = x^2$ est paire car $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

(b) $f(x) = x^3$ est impaire car $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = f(x)$.

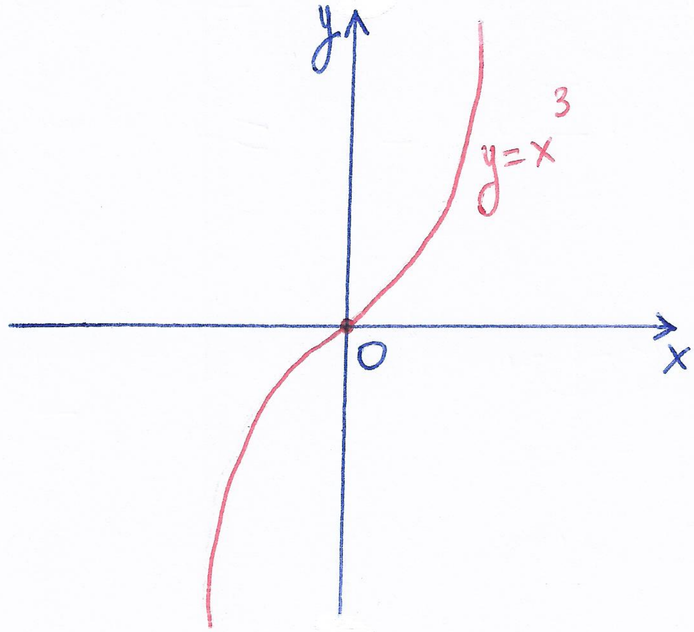
Remarque :

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des y (axe Oy).

Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.



Symétrie par rapport à Oy



Symétrie par rapport à l'origine

3 Périodicité

Une fonction f est dite périodique s'il existe p tel que $f(x+p) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

La plus petite valeur de p telle que $f(x+p) = f(x)$ est appelée la période de f.

Exemple 7

$f(x) = \cos(x)$ est périodique de période 2π. En effet,

$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos(x) = f(x), \forall x \in D_f$.

4 Transformations de graphes

Etant donné le graphe d'une fonction $f(x)$:

- Le graphe de $f(x) + a$ est obtenu en faisant une translation verticale de a unités vers le haut si $a > 0$ ou vers le bas si $a < 0$.

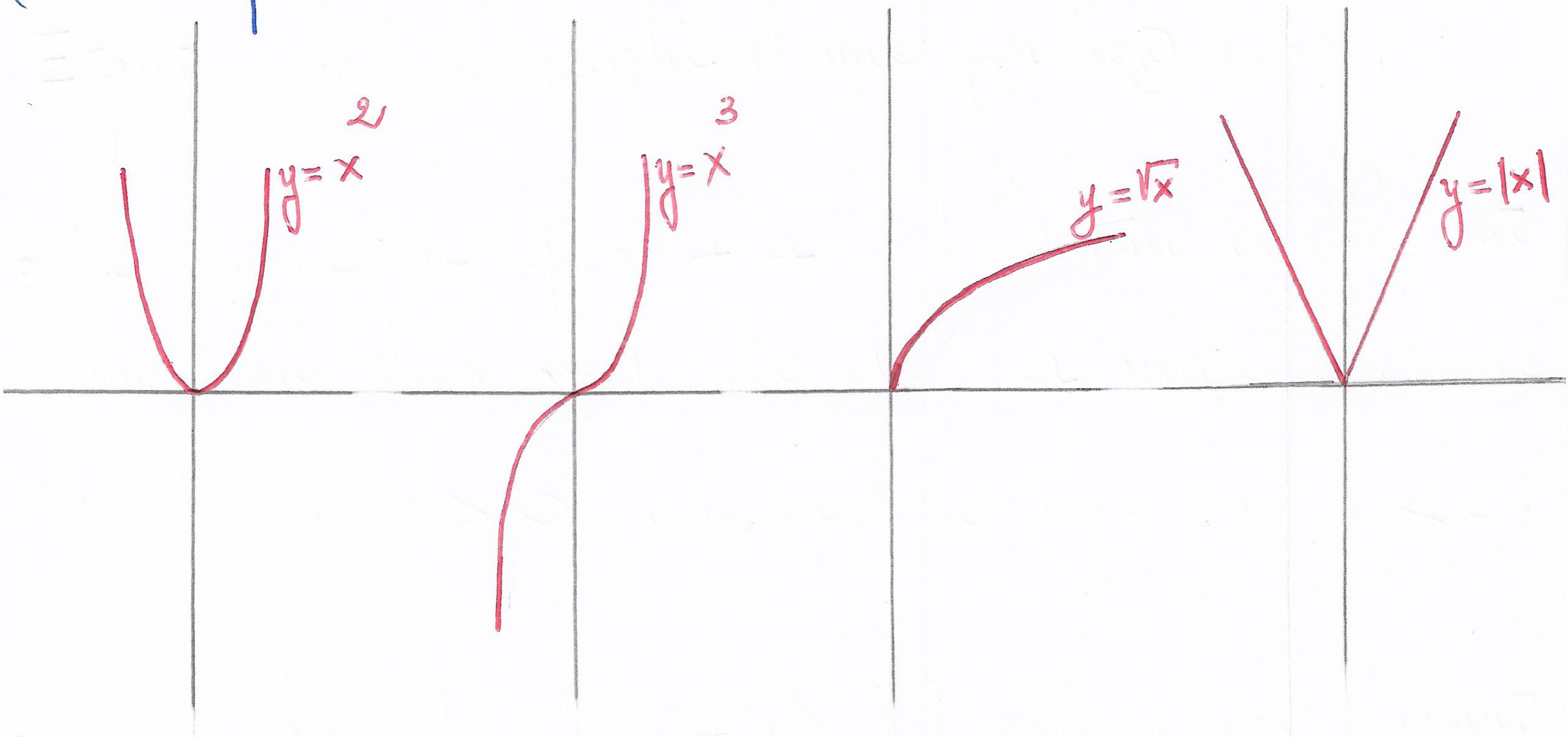
- Le graphe de $f(x+a)$ est obtenu en faisant une translation horizontale de a unités vers la gauche si $a > 0$ ou vers la droite si $a < 0$.

- Le graphe de $a f(x)$ est obtenu en faisant un étirement vertical d'un facteur a.

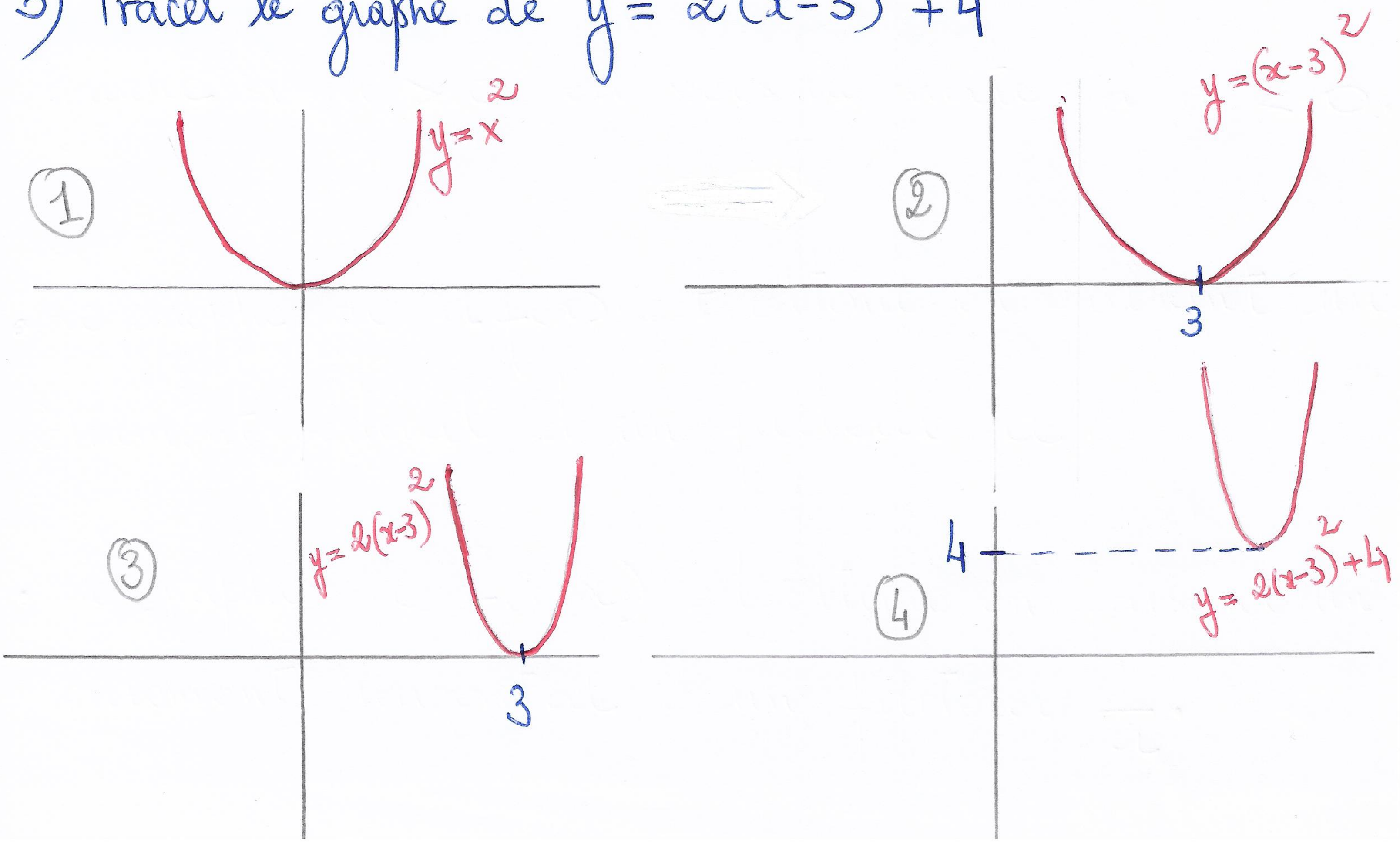
- Le graphe de $f(ax)$ est obtenu en faisant un étirement horizontal d'un facteur $\frac{1}{a}$.

Exemple :

(a) Graphes de base



b) Tracer le graphe de $y = 2(x-3)^2 + 4$



5 Fonctions principales

⟹ **fonction linéaire** : $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

- Le coefficient a est appelé la pente
- Le coefficient b est appelé l'ordonnée à l'origine
- Le graphe est une droite.
- Le domaine est $\mathbb{R}$.
- L'image est $\mathbb{R}$ si $a \neq 0$ et $\{b\}$ si $a = 0$.

⟹ **droite horizontale** : $y = b$ (fonction constante)

- pente $a = 0$
- domaine $= \mathbb{R}$
- image $= \{b\}$

⟹ **droite verticale** : $x = a$

- pente non définie
- La droite verticale n'est pas une fonction.

⟹ **polynômes** : $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$

- Coefficients de $P(x)$: $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

- degré de $P(x)$ = plus grande valeur de n telle que $c_n \neq 0$
- domaine $= \mathbb{R}$
- racines de $P(x)$ sont les nombres $r \in \mathbb{R}$ tels que $P(r) = 0$
- Si $P(r) = 0$ pour un certain $r \in \mathbb{R}$ alors $P(x)$ est divisible par $x - r$.

<u>Exemple 8 :</u> $P(x) = 3 + \frac{5}{4}x + x^2 + x^3$.

Les coefficients de $P(x)$ sont : $3, \frac{5}{4}, 1$ et 1.

Le degré de $P(x)$ est 3.

$$\begin{aligned} P\left(-\tfrac{3}{2}\right) &= 3 + \tfrac{5}{4}\left(-\tfrac{3}{2}\right) + \left(-\tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{3}{2}\right)^3 \\ &= 3 - \frac{15}{8} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} \\ &= \frac{3 \times 8 - 15 + 2 \times 9 - 27}{8} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $-\frac{3}{2}$ est une racine de $P(x)$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x^2 + \frac{5}{4}x + 3 & x + 3/2 \\ \cline{2-2} x^3 + \frac{3}{2}x^2 & x^2 - \frac{1}{2}x + 2 \\ \cline{1-1} 0 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + 3 & \\ \quad -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + 3 & \\ \cline{1-1} \quad 0 + 2x + 3 & \\ \qquad\quad 2x + 3 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$P(x)$ est divisible par $x + \frac{3}{2} \Longrightarrow$
$x^3 + x^2 + \frac{5}{4}x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + 2\right)$

⟹ <u>Polynômes de degré 2 :</u> $P(x) = ax^2 + bx + c$

- parabole avec coordonnée du sommet $\left(-\frac{b}{2a}, P\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- $a > 0$ parabole orientée vers le haut 
- $a < 0$ parabole orientée vers le bas 
- discriminant : $b^2 - 4ac$
- racines $\begin{cases} \text{2 racines distinctes } \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ si } b^2-4ac> \\ \text{racine double } \dfrac{b}{2a} \text{ si } b^2-4ac = 0 \\ \text{pas de racine si } b^2-4ac < 0 \end{cases}$

⟹ <u>fonctions rationnelles :</u> $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

$P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynomes et $Q(x) \neq 0$.

domaine de f = tous les réels sauf les racines de $Q(x)$.

<u>Exemple 9</u> : $f(x) = \dfrac{-x^2-4x+5}{x^2-1}$

domaine $= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\}$

<u>Attention</u> ! $f(x) = \dfrac{-(x+5)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{-(x+5)}{x+1}$

Mais on trouve le domaine avant de simplifier

Exercice

Trouver le domaine de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5 - \frac{3}{x}}}$

Solution :

La fonction f est définie pour :

$x \neq 0$ et $\sqrt{5 - \frac{3}{x}} \neq 0$ et $5 - \frac{3}{x} \geqslant 0 \Rightarrow$

$x \neq 0$ et $5 - \frac{3}{x} \neq 0$ et $5 - \frac{3}{x} \geqslant 0 \Rightarrow$

$x \neq 0$ et $x \neq \frac{3}{5}$ et $\frac{5x - 3}{x} \geqslant 0$

On a :

$\frac{5x-3}{x} = 0 \Rightarrow 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$5x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{5x-3}{x}$		$+$		$-$		$+$	

Le domaine de f est $D_f =]-\infty, 0[\cup]\frac{3}{5}, +\infty[$

NB : On a exclu les points $x = 0$ et $x = \frac{3}{5}$.