

Mat 1739 Hiver 2019

Devoir 1 : à remettre le **mecredi 23 janvier** au début du DGD. Aucun devoir ne sera accepté en retard.

| | | |
|--|-------|------------|
| Nom de famille (MAJUSCULES) | _____ | CORRECTION |
| Prénom (MAJUSCULES) | _____ | |
| Numéro d'étudiant | _____ | |
| En signant ci-dessous, vous déclarez que ce travail est le vôtre et que vous n'avez pas copié le travail d'une autre personne. | | |
| Signature | _____ | |

Instructions : Imprimez ce questionnaire et inscrivez vos noms et numéro d'étudiant ci-dessus. Répondez à toutes les questions dans les espaces prévus à cet effet ci-dessous. Vous devez donner des solutions complètes (pas seulement les réponses).

Question 1 (3 points). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$.

(a) (1 point) Calculez de taux de variation moyen de f sur l'intervalle $[1, 4]$.

D'après le cours, le TVM de f sur $[1, 4]$ est donné par la formule

$$\text{TVM} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(4^2 + 1) - (1^2 + 1)}{3} = \frac{15}{3} = \boxed{5}.$$

(b) (2 point) Donnez l'équation de la sécante passant par $(1, f(1))$ et $(1 + h, f(1 + h))$, $h \neq 0$.

On note $y = ax + b$ l'équation de la sécante. D'après le cours, on a

$$\begin{aligned} a &= \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{(1+h)^2 + 1 - (1^2 + 1)}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 + 1 - 2}{h} \\ &= \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h. \end{aligned}$$

Comme le point $(1, f(1))$ est sur cette droite, ses coordonnées vérifient l'équation $y = ax + b$ et on trouve

$$\begin{aligned} f(1) &= a \times 1 + b \Leftrightarrow 2 = (2 + h) \times 1 + b \\ &\Leftrightarrow b = -h. \end{aligned}$$

Finalement, l'équation de la sécante est $y = (2 + h)x - h$.

Question 2 (2 points). Évaluez les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4}$

Par substitution (possible car on a des fonctions continues), on trouve

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4} = \frac{2^2 + 1}{2^3 - 4} = \frac{4 + 1}{8 - 4} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{4 - x}{\sqrt{x} - 2}$

Par substitution (possible car on a des fonctions continues), on trouve

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{4 - x}{\sqrt{x} - 2} = \frac{4 - 9}{\sqrt{9} - 2} = \frac{-5}{3 - 2} = \boxed{-5}.$$

Question 3 (4 points). Pour quelle valeur de a la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 3 \\ x + 1 - a & \text{si } x > 3 \end{cases}$ est continue en 3 ?

La fonction f est continue en 3 si et seulement si la limite de f en 3 existe et vaut $f(3)$. On a d'un côté

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x + 1 - a = 3 + 1 - a = 4 - a.$$

D'un autre côté, on a

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 + a = 3^2 + a = 9 + a = f(3).$$

La limite de f en 3 existe si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, on doit donc résoudre

$$4 - a = 9 + a \Leftrightarrow 4 - 9 = a + a \Leftrightarrow -5 = 2a \Leftrightarrow a = -\frac{5}{2}.$$

Comme on a en plus $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$, on en déduit que f est continue en 3 si et seulement si $a = -5/2$.