

MAT 1748 – Hiver 2021

Examen 2

Professeur: Antoine Poirier

Date limite: 15 mars, 16h00

Les examens doivent être soumis via [Brightspace](#) en **un seul fichier pdf**. Ils peuvent être rédigés à l'ordinateur, ou écrits à la main et ensuite numérisés. Si vous écrivez à la main, assurez-vous que l'écriture est lisible et que la numérisation soit d'assez bonne qualité pour que le correcteur puisse lire.

QUESTION 1 (8 pts). Soient  $S = \{a, \{a\}, \{a, b\}, \{a, \{b\}\}$  et  $T = \{a, \{a\}, \{b\}\}$ . Répondez aux questions suivantes. Vous n'avez pas à justifier vos réponses.

- (a) Quelle est la cardinalité de  $S \times T$ ?
- (b) Quelle est la cardinalité de  $P(T)$ ?
- (c) Quelle est la cardinalité de  $S \oplus T$ ?
- (d) Énumérez les éléments de  $S \cap T$
- (e) Énumérez les éléments de  $S \oplus T$
- (f) Vrai ou faux?  $\{\{a\}, \{b\}\} \subseteq P(T)$
- (g) Vrai ou faux?  $(\emptyset, \emptyset) \in P(T) \times P(T)$
- (h) Vrai ou faux?  $\{a, b\} \in P(S)$

QUESTION 2 (3 pts). Soient les fonctions suivantes:

$$f: \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+, \quad f(m, n) = mn$$

$$g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}, \quad g(n) = n - 9$$

$$h: \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+, \quad h(x, y) = 7y + 1$$

(Ici,  $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$ )

Trois des énoncés suivants sont vrais. Lesquels? Vous n'avez pas à justifier vos réponses.

- (a)  $f$  est injective.
- (b)  $f$  est surjective.
- (c)  $g$  est injective.
- (d)  $g$  est surjective.
- (e)  $h$  est injective.
- (f)  $h$  est surjective.
- (g) L'image de  $f$  est  $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}^+, y \in \mathbb{Z}^+\}$
- (h) L'image de  $g$  est  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -8\}$ .
- (i) L'image de  $h$  est  $\mathbb{Z}^+$ .

QUESTION 3 (2 pts). Soit  $A = \{1, 2, 3\}$ , et soit la relation suivante dans  $A$ :

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

Lequel des énoncés suivants est vrai? Un seul énoncé est vrai.

- (a)  $R$  est réflexive, antisymétrique et transitive, mais  $R$  n'est pas symétrique.
- (b)  $R$  est réflexive et symétrique, mais  $R$  n'est pas antisymétrique, ni transitive.
- (c)  $R$  est antisymétrique et transitive, mais  $R$  n'est pas réflexive, ni symétrique.
- (d)  $R$  est réflexive, symétrique et antisymétrique, mais  $R$  n'est pas transitive.
- (e)  $R$  est une relation d'équivalence.

QUESTION 4 (6 pts). Soient  $A = \{7m + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$  et  $B = \{14n - 6 \mid n \in \mathbb{Z}\}$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{Z}$ .

- (a) Démontrez que  $A \not\subseteq B$ , à l'aide d'un exemple.
- (b) Donnez deux éléments de  $A \cap B$ . Vous n'avez pas à justifier cette réponse.
- (c) Donnez deux éléments de  $A \times B$ . Vous n'avez pas à justifier cette réponse.
- (d) Démontrez que  $B \subseteq A$ .

QUESTION 5 (5 pts). Soient  $A, B$  et  $C$  trois sous-ensembles d'un ensemble universel  $\mathcal{U}$ .

- (a) Utilisez les identités sur les ensembles données à la dernière page de l'examen pour démontrer l'égalité suivante:

$$C - (\bar{A} \cap B) = (C \cap A) \cup (C - B)$$

- (b) Complétez la table d'appartenance suivante. Vous n'avez pas à justifier cette réponse.

$A$	$B$	$C$	$\bar{A}$	$\bar{A} \cap B$	$C - (\bar{A} \cap B)$	$C \cap A$	$C - B$	$(C \cap A) \cup (C - B)$
1	1	1						
1	1	0						
1	0	1						
1	0	0						
0	1	1						
0	1	0						
0	0	1						
0	0	0						

QUESTION 6 (6 pts). Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la fonction suivante

$$f(t, s) = (1 + 3t, 2s - t)$$

- (a) Démontrez que  $f$  est injective.
- (b) Démontrez que  $f$  est surjective.

QUESTION 7 (7 pts). Soit  $R$  la relation dans  $\mathbb{Z}$  définie par

$$aRb \text{ si et seulement si } a^2 - b^2 = 0$$

Démontrez que  $R$  est une relation d'équivalence.

1. 2.	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap \mathcal{U} = A$	Lois de l'identité
3. 4.	$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Lois de domination
5. 6.	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Lois de l'idempotence
7.	$\overline{\overline{A}} = A$	Complémentarité
8. 9.	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Commutativité
10. 11.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$	Associativité
12. 13.	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivité
14. 15.	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Lois de De Morgan
16. 17.	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Lois de l'absorption
18. 19.	$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Lois du complément
20.	$A - B = A \cap \overline{B}$	Loi de la différence
21. 22.	$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$	Lois de la différence symétrique