Inversion d'une matrice

A est une matrice carrée $(2;2) \longrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

si $\det(A) = ad - bc \neq 0 \Rightarrow A$ est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

B est une matrice carrée $(3;3)$ si $\det(B) \neq 0$, alors B est inversible. Pour trouver B^{-1}, on constitue $\rightarrow [B \mid I_3]$ et on échelonne cette matrice augmentée jusqu'à $[I_3 \mid C]$. Alors, $C = B^{-1}$

Ex.1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \left| \begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \\ 1 & 3 \end{matrix} \right. = 6 + 2 + 9 - 3 - 12 - 3 = -1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} \text{ existe}$$

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_1 \longleftrightarrow L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \quad L_2 \rightarrow L_2/6$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/6 & 0 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 5L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/6 & 0 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1 & 5/6 & 1/2 \end{array}\right] \quad L_3 \rightarrow 6L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/6 & 0 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + \frac{1}{6}L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right] \qquad \therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Ex.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right| = 1+4+0-1-0-0 = 4 \neq 0$$

$\therefore A^{-1}$ existe

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_3 \to L_3 - L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_1 \to L_1 - 2L_2 \\ L_3 \to L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad L_3 \to L_3/4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - 2L_3 \\ L_1 \to L + 3L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right] \qquad \therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Ex.3

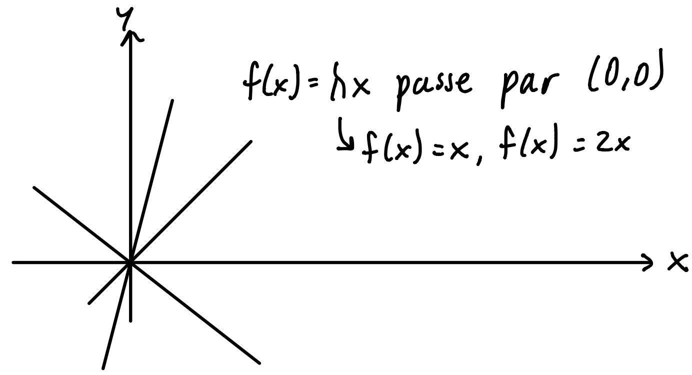
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & -8 & 2 & 8 \end{array}\right| = -16+0-16+8-0+24 = 0$$

$\therefore A^{-1}$ n'existe pas

Les valeurs et vecteurs propres d'une matrice

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to y = f(x)$



$f(x) = \lambda x$ passe par $(0,0)$
↳ $f(x) = x$, $f(x) = 2x$

Soit A une matrice carée $(n;n)$, on appelle vecteur propre tout vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ tel que $A\vec{u} = \lambda \vec{u}$
↳ valeur propre associée au vecteur propre $\vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$A\vec{u} - \lambda \vec{u} = \vec{0}$ (vecteur nul)

$A\vec{u} - \lambda \underbrace{I_n}_{\text{matrice d'identité}} \vec{u} = \vec{0}$

$(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$ si une matrice est

<u>Théorème:</u> on appelle valeur propre de A; les valeurs qui annulent

$$\underbrace{P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)}_{\text{polynôme caractéristique de } A} = 0$$

<u>Ex.1</u> Déterminez les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$1 + 2 = 3$

$$A = \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

$\therefore$ valeurs propres sont
$\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$

$-1 + 4 = 3$

✱ trace = somme des valeurs propres = diagonale
$\det(A)$ = produit des valeurs propres

Pour $\lambda_1 = -1$, on va chercher $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à λ_1

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 3 & 2-(-1) \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \to L_1/2 \\ L_2 \to L_2/3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad L_2 \to L_2 - L_1$$

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ a & b \end{array} \end{array} \to \left.\begin{array}{r} a+b=0 \\ b=-a \end{array}\right\} \text{matrice échelonnée}$$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to$ vecteur propre associé à $\lambda_1 = -1$

Pour $\lambda_2 = 4$, on va chercher $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à λ_2

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4 & 2 \\ 3 & 2-4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \quad L_2 \to L_2 + L_1$$

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ a & b \end{array} \end{array} \to \left.\begin{array}{r} -3a+2b=0 \\ 2b=3a \\ b=3/2\,a \end{array}\right\} \text{matrice échelonnée}$$

$\to$ b et a peut être n'importe quelle valeur qui n'est pas nulle et qui obéit à $b = 3/2\, a$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$