1. Soit un SDD linéaire donné par

$$x_{n+1} = -0.5x_n + 3.$$

a) Si la condition initiale est $x_0 = 0$, alors calculer l'état du système dans 5 étapes. Décrire l'évolution du système.
Solution :
La condition initiale est $x_0 = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
x_1 &= -0.5x_0 + 3 = -0.5(0) + 3 = 3\\
x_2 &= -0.5x_1 + 3 = -0.5(3) + 3 = 1.5\\
x_3 &= -0.5x_2 + 3 = -0.5(1.5) + 3 = 2.25\\
x_4 &= -0.5x_3 + 3 = -0.5(2.25) + 3 = 1.875\\
x_5 &= -0.5x_4 + 3 = -0.5(1.875) + 3 = 2.0625
\end{aligned}$$

Le données oscillent autour de 2 !

b) Si la condition initiale est $x_0 = 4$, alors calculer l'état du système dans 5 étapes. Décrire l'évolution du système.
Solution :
La condition initiale est $x_0 = 4$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
x_1 &= -0.5x_0 + 3 = -0.5(4) + 3 = 1\\
x_2 &= -0.5x_1 + 3 = -0.5(1) + 3 = 2.5\\
x_3 &= -0.5x_2 + 3 = -0.5(2.5) + 3 = 1.75\\
x_4 &= -0.5x_3 + 3 = -0.5(1.75) + 3 = 2.125\\
x_5 &= -0.5x_4 + 3 = -0.5(2.125) + 3 = 1.9375
\end{aligned}$$

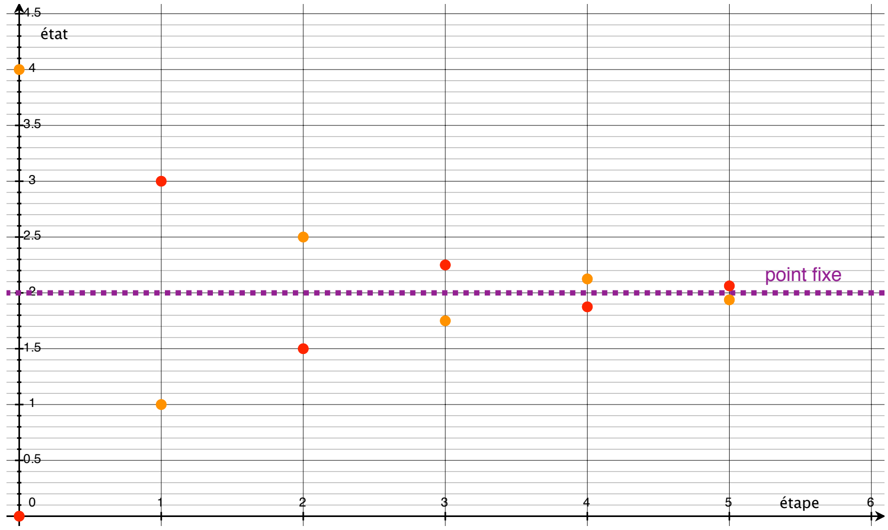
Le données oscillent autour de 2 !

c) Calculer le point fixe du SDD.
Solution : Ici on doit résoudre

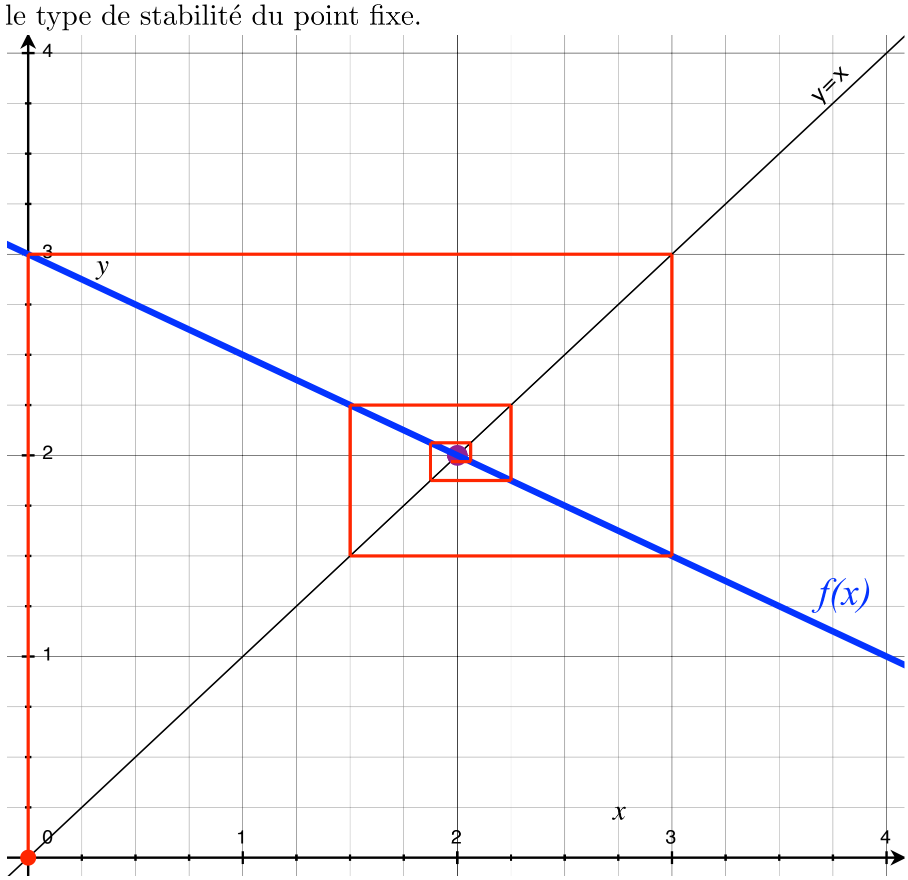
$$\begin{aligned}
x &= -0.5x + 3\\
x + 0.5x &= 3\\
1.5x &= 3\\
x &= 2
\end{aligned}$$

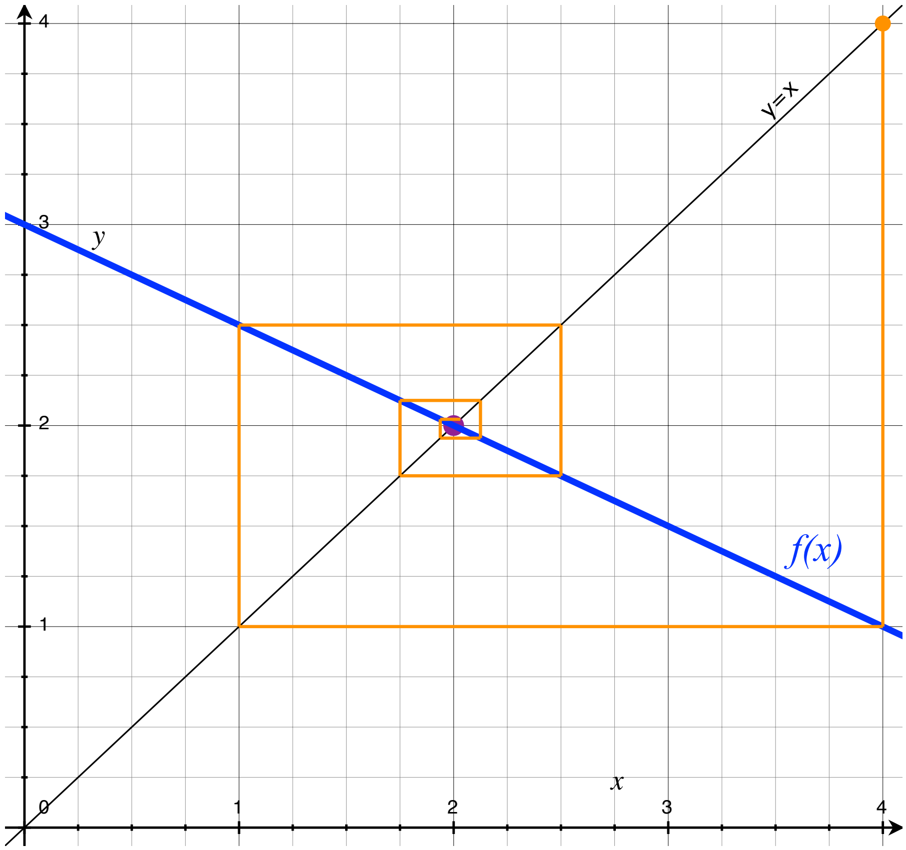
Le seul point fixe est $x = 2$.

d) Tracer les solutions (graphes des orbites) pour les 5 premières étapes pour $x_0 = 0$ et $x_0 = 4$. Indiquer par une droite horizontale le point fixe.



e) Tracer 6 itérations des toiles du SDD pour $x_0 = 0$ et $x_0 = 4$. Avec ceux-ci, décrire le type de stabilité du point fixe.





Puisque les toiles sont attirées par le point fixe, celui-ci est stable.

f) Donner les solutions explicites du SDD linéaire avec $x_0 = 0$ et $x_0 = 4$ et déterminer le type de stabilité du point fixe.
Solution :
Pour $x_0 = 0$, la solution explicite est

$$F(n) = 2 - 2(-0.5)^n.$$

Pou $x_0 = 4$, la solution explicite est

$$F(n) = 2 + 2(-0.5)^n.$$

Dans les deux cas puisque $|m| = |-0.5| = 0.5 < 1$, alors le point fixe $x = 2$ est stable.

2. Soit un système dynamique discret donné par

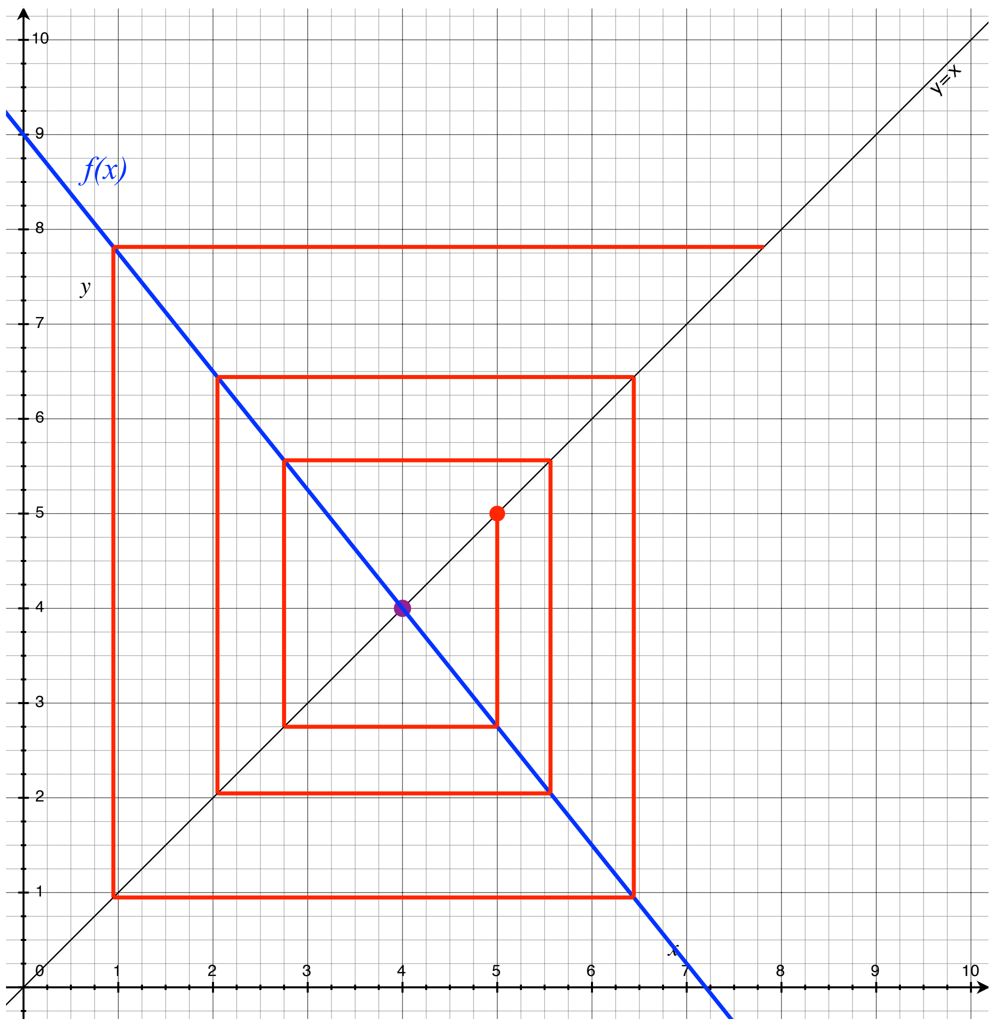
$$x_{n+1} = -1.25x_n + 9, \quad \text{avec } x_0 = 5.$$

a) Calculer le point fixe du SDD et déterminer sa stabilité (justifier).
Solution : Ici le point fixe est

$$q = \frac{b}{1-m} = \frac{9}{1-(-1.25)} = 4.$$

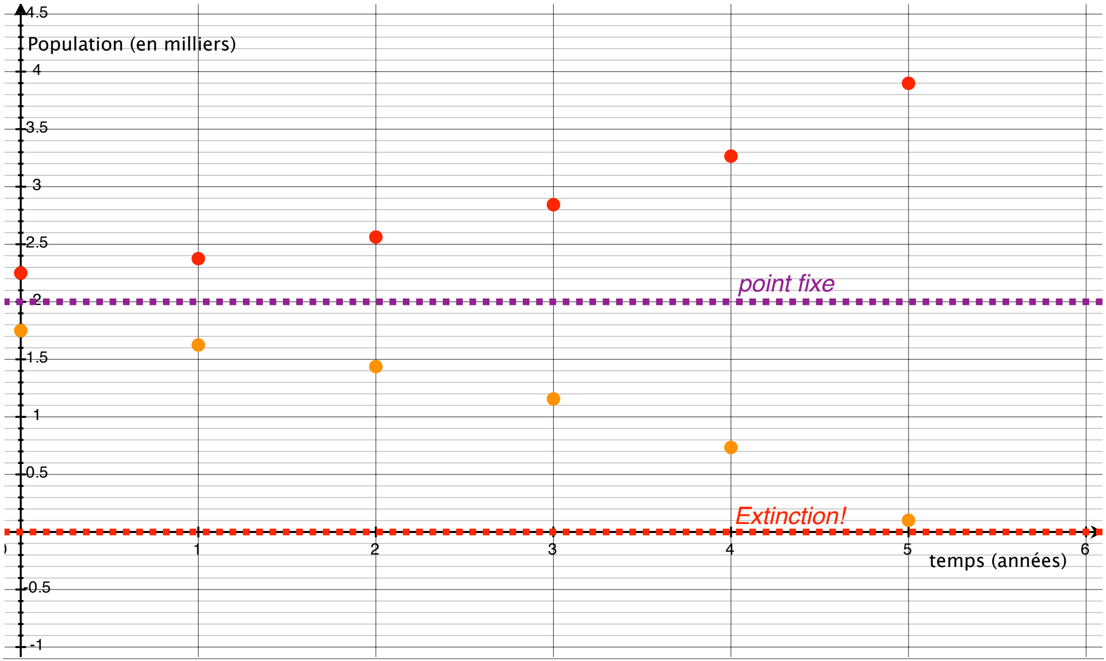
Puisque $|m| = 1.25 > 1$, alors le point fixe est instable.

b) Tracer 6 itérations de la toile du SDD avec $x_0 = 5$.

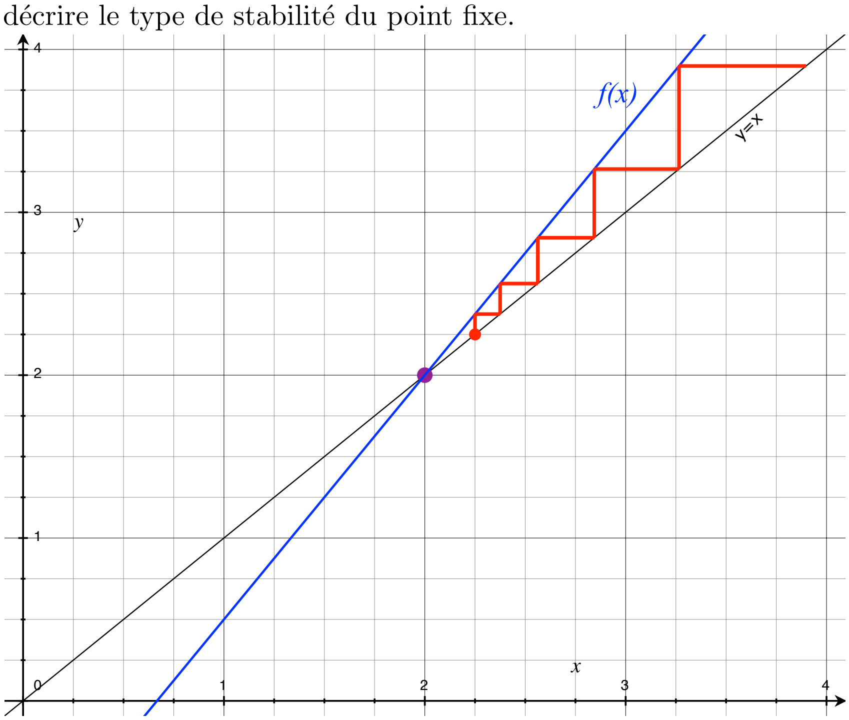


3. Dans un lac, on suit une population de truites. Les truites se reproduisent à un taux de 50% par année. Pendant ce temps au lac, le Capitaine Achab y pêche 1000 poissons par année. Soit x_n le nombre de poissons *en milliers* dans n années.
   a) Donner le sytème dynamique discret (SDD) qui modélise x_n.
   Solution :
   À chaque année qui passe, la population augmente de 50% (taux de reproduction) et perd 1 milliers d'individus (pêche). Le SDD est donc donnée par la règle
   $$x_{n+1} = 1.5x_n - 1.$$
   b) Si initialement le lac contient 1750 truites, alors calculer la population dans 5 ans. Décrire l'évolution de la population de truite.
   Solution :
   La condition initiale est $x_0 = 1.75$. Ainsi,
   $$\begin{aligned} x_1 &= 1.5x_0 - 1 = 1.5(1.75) - 1 = 1.625 \\ x_2 &= 1.5x_1 - 1 = 1.5(1.625) - 1 = 1.4375 \\ x_3 &= 1.5x_2 - 1 = 1.5(1.4375) - 1 = 1.15625 \\ x_4 &= 1.5x_3 - 1 = 1.5(1.15625) - 1 = 0.734375 \\ x_5 &= 1.5x_4 - 1 = 1.5(0.734375) - 1 = 0.1015625 \end{aligned}$$
   La population baisse et se rapproche de zéro. Il y a une possibilité d'extinction!!!
   c) Si initialement le lac contient 2250 truites, alors calculer la population dans 5 ans. Décrire l'évolution de la population de truite.
   Solution :
   La condition initiale est $x_0 = 2.25$. Ainsi,
   $$\begin{aligned} x_1 &= 1.5x_0 - 1 = 1.5(2.25) - 1 = 2.375 \\ x_2 &= 1.5x_1 - 1 = 1.5(2.375) - 1 = 2.5625 \\ x_3 &= 1.5x_2 - 1 = 1.5(2.5625) - 1 = 2.84375 \\ x_4 &= 1.5x_3 - 1 = 1.5(2.84375) - 1 = 3.265625 \\ x_5 &= 1.5x_4 - 1 = 1.5(3.265625) - 1 = 3.8984375 \end{aligned}$$
   Malgré la pêche, la population croît au fils des années!!!
   d) Calculer le point fixe du SDD.
   Solution : Ici on doit résoudre
   $$\begin{aligned} x &= 1.5x - 1 \\ x - 1.5x &= -1 \\ -0.5x &= -1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$
   Le seul point fixe est $x = 2$.

e) Tracer les solutions (graphes des orbites) pour les 5 premières années pour $x_0 = 1.75$ et $x_0 = 2.25$. Indiquer par une droite horizontale le point fixe.



f) Tracer 5 itérations des toiles du SDD pour $x_0 = 1.75$ et $x_0 = 2.25$. Avec ceux-ci, décrire le type de stabilité du point fixe.



Puisque les toiles sont repoussées par le point fixe, celui-ci est instable.

4. À **la Question 3**, vous avez vérifié que si le nombre de truites était initialement de 1750 (donc $x_0 = 1.75$) et qui si le Capitaine Achab pêche 1000 truites par année, alors la population de truites finirait par disparaitre. Pour la condition initiale de $x_0 = 1.75$, déterminer le nombre maximal de truites que le Capitaine Achab peut pêcher par année qui garantira une croissance exponentielle de la population de truite.

   Solutions :

   Soit h le nombre de poissons pêchés par année. Alors le SDD (linéaire) est

   $$x_{n+1} = 1.5x_n - h.$$

   Avec une population initiale de 1750 poissons, donc $x_0 = 1.75$ (avec $m = 1.5$ et $b = -h$). Puisque ce SDD est linéaire avec $|m| = 1.5 > 1$, alors peut importe la valeur de h, le point fixe q sera toujours **instable**. Donc le point fixe repousse les orbites avoisinantes. Cela nous donne trois possibilités ;

   i) Si la population initiale est inférieure au point fixe, $1.75 < q$, alors la population finira par disparaitre (extinction).

   ii) Si la population initiale est égale au point fixe, $1.75 = q$, alors la population restera constante (à l'équilibre).

   iii) Si la population initiale est supérieure au point fixe, $1.75 > q$, alors la population sera en croissance (exponentielle).

   Puisque

   $$q = \frac{b}{1-m} = \frac{(-h)}{1-(1.5)} = \frac{h}{0.5} = 2h,$$

   alors pour obtenir une croissance exponentielle (cas iii)), nous voulons ainsi que

   $$\begin{aligned} 1.75 &> 2h \\ h &< 0.875. \end{aligned}$$

   Donc $h < 0.875$, signifie que pour avoir une croissance exponentielle de la population, le nombre maximale de poissons doit être *strictement moins de* 875 *poissons* par année.

5. Bobby Pine, un ingénieur (qui a gradué à l'Université de Carleton), est responsable d'un entrepôt de déchets radioactifs. À chaque mois, 37.5% de la masse entreposée de déchets radioactifs est éliminée (désintégrée). De plus, à chaque mois, Bobby Pine autorise l'entreposage d'un chargement de 3 tonnes de déchets radioactifs. Soit x_n la quantité entreposée en tonne de déchets radioactifs après n mois. On suppose qu'initialement l'entrepôt contient 1 tonne de déchets radioactifs (ainsi $x_0 = 1$).

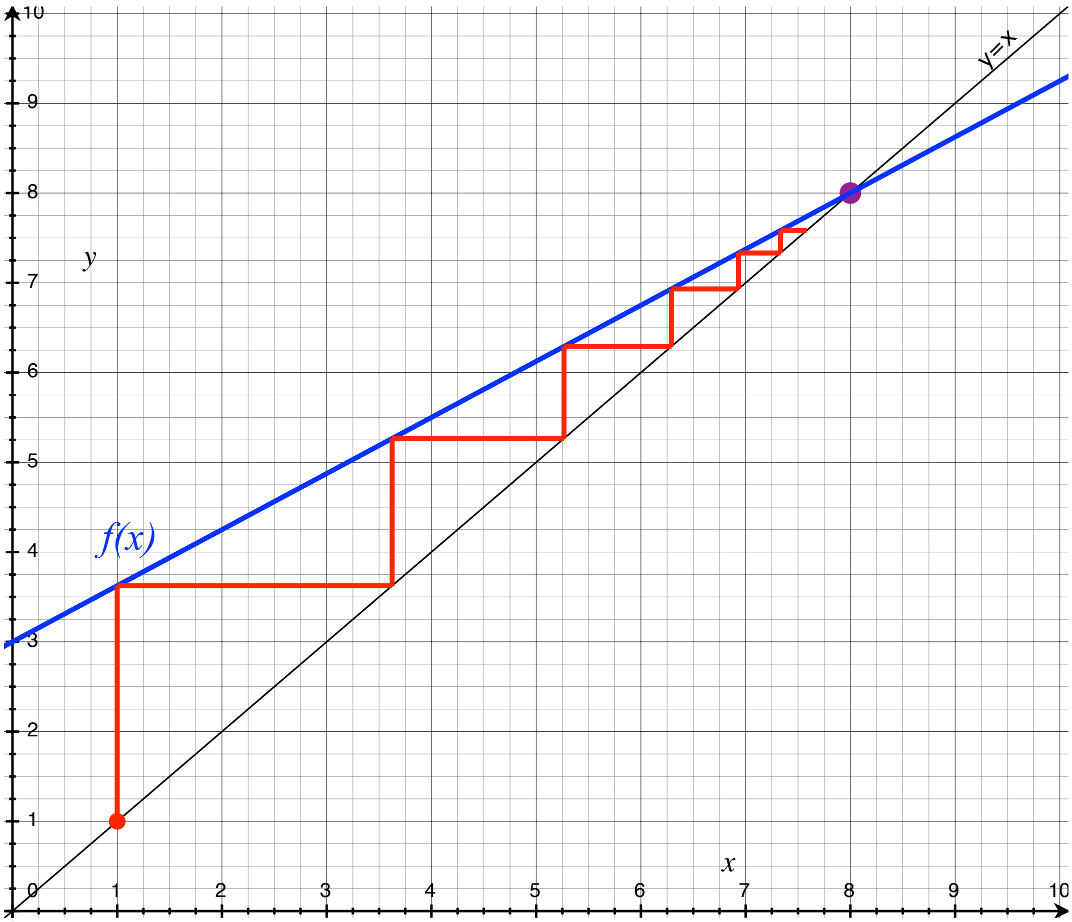
   a) Donner le sytème dynamique discret (SDD) qui modélise x_n.
   Solution : À chaque mois qui passe, la quantité entreposée diminue de 37.5% (désintégration) et augmente de 3 tonnes (nouveau chargement). Le SDD est donc donnée par la règle
   $$x_{n+1} = 0.625x_n + 3.$$

   b) Calculer la masse de déchets radioactifs entreposée dans 4 mois.
   Solution : La condition initiale est $x_0 = 1$. Ainsi,
   $$\begin{aligned} x_1 &= 0.625x_0 + 3 = 0.625(1) + 3 = 3.625 \\ x_2 &= 0.625x_1 + 3 = 0.625(3.625) + 3 = 5.265625 \\ x_3 &= 0.625x_2 + 3 = 0.625(5.265625) + 3 = 6.291015625 \\ x_4 &= 0.625x_3 + 3 = 0.625(6.291015625) + 3 = 6.931884766 \end{aligned}$$
   Donc il y aura ≈ 6.93 tonnes de déchets radioactifs entreposée dans 4 mois.

   c) Calculer le point fixe du SDD.
   Solution : Ici le point fixe est
   $$q = \frac{b}{1-m} = \frac{3}{1-(0.625)} = 8.$$

   d) Calculer la masse de déchets radioactifs entreposée dans 1 an (12 mois).
   Solution : Avec $m = 0.625$, $x_0 = 1$ et $q = 8$, alors la solution explicite est donnée par
   $$x_n = (0.625)^n(1-8) + 8 = 8 - 7(0.625)^n.$$
   Ainsi lorsque $n = 12$, alors $x_{12} = 8 - 7(0.625)^{12} = 7.975131004$. Donc il y aura ≈ 7.98 tonnes de déchets radioactifs entreposée dans 12 mois.

e) Tracer 6 itérations de la toile du SDD avec $x_0 = 1$.



f) Déterminer la stabilité du point fixe. Supporter votre réponse avec **deux** justifications.

Solution :

Puisque $|m| = 0.625 < 1$, et puisque la toile est attirée vers le point fixe alors le point fixe est stable.

g) L'entreprôt peut contenir en toute sécurité un maximum de 7.5 tonnes de déchêts radioactifs.

i) Expliquer pourquoi dans la situation actuelle il y a un danger pour l'entreprôt.

Puisque le point fixe $q = 8$ est un point fixe **stable** du SDD linéaire, alors la toile est attirée vers celui-ci (de plus, on sait déjà que dans un an la quantité sera à 7.98 tonnes qui est au-dessus de la limite sécuritaire de 7.5 tonnes). Donc on sait qu'éventuellement la quantité se rapprochera de 8 tonnes et donc passera au-dessus de la limite sécuritaire de 7.5 tonnes.

ii) Calculer dans combien de mois l'entreprôt ne sera plus sécuritaire.

Ici on cherche n telle que $x_n = 7.5$. Donc

$$\begin{aligned}
7.5 &= 8 - 7(0.625)^n \\
7.5 - 8 &= -7(0.625)^n \\
\frac{1}{14} &= (0.625)^n \\
\ln\left(\frac{1}{14}\right) &= \ln((0.625)^n) \\
\ln\left(\frac{1}{14}\right) &= n\ln(0.625) \\
n &= \frac{\ln\left(\frac{1}{14}\right)}{\ln(0.625)} = 5.61497.
\end{aligned}$$

Donc puisque à $x_5 = 7.33$ et $x_6 = 7.58$, alors l'entrepôt ne sera plus sécuritaire dans 6 mois (et plus).

iii) On vous engage pour remplacer Bobby Pine. Calculer la quantité maximale mensuelle de déchets radioactifs que vous autoriseriez à être entreposés qui garantira la sécurité à l'entrepôt en tout temps ?

Ici on cherche la valeur de b telle que le point fixe du SDD linéraire

$$x_{n+1} = 0.625x_n + b$$

soit **au plus de 7.5**. Il faut remarquer ici que peut importe la valeur du point fixe celui-ce sera **toujours stable** car $|m| = 0.625 < 1$. Donc on doit résourdre l'inégalité

$$7.5 \leq \frac{b}{1 - 0.625},$$

ce qui nous donne $b \leq 2.8125$. Donc il faut autoriser **au plus une quantité de 2.8125** tonnes de déchêts radioactifs mensuellement pour assurer la sécurité de l'entrepôt.