CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRALE I **(MAT1720 W)**

EXAMEN PARTIEL III PRATIQUE **(Automne 2017)**

Professeur: Joseph Khoury **Durée: 80 minutes**

Nom de famille: Solution

Prénom: ______

Numéro d'étudiant: ______

Aucune note n'est permise.

Les calculatrices sont permises.

Cet examen comporte 8 questions et 9 pages. Les questions à choix multiples (1 à 5) valent chacune 2 points sur les 22 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

1	2	3	4	5

Les questions 6 à 8 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution. Vous pouvez utiliser le verso des pages ou les deux pages additionnelles entre les questions à développement si vous manquez d'espace au recto.

1. Utliser la **méthode de Simpson** avec $n = 4$ sous-intervalles pour estimer la valeur de l'intégrale:

$$\int_0^1 e^{-x^3}\, dx.$$

Arrondissez votre réponse à deux chiffres après la virgule.

A. Aucune de ces réponses
B. 1.21
C. 0.98
D. 0.81
E. 0.45
F. 1.60

$n=4 \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$: $x_0 = 0$, $x_1 = 0+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et $x_4 = \frac{3}{4}+\frac{1}{4} = 1$. Par la méthode de Simpson, on a:

$$\int_0^1 e^{-x^3} dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[e^{-0^3} + 4e^{-(1/4)^3} + 2e^{-(1/2)^3} + 4e^{-(3/4)^3} + e^{-1^3}\right] \simeq 0.81$$

2. Si

$$f(x) = \int_1^{x^4} e^{\cos t}\, dt,$$

alors $f'(x) =$

A. $x^4 e^{\cos(x^4)}$
B. $x^3 e^{\cos(x^3)}$
C. $4x^3 e^{\cos(x^4)}$
D. $4x^3 e^{\sin(x^4)}$
E. $(-\sin x)e^{\sin(x^4)}$
F. Aucune de ces réponses

$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$. Posons $u = x^4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3$. Par la dérivation en chaîne, on a que $f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$

$f'(x) = \frac{d}{du}\left(\int_1^u e^{\cos t} dt\right) \cdot 4x^3 = e^{\cos u}(4x^3)$ (par le Théorème fondamental du Calcul) $= 4x^3 e^{\cos(x^4)}$

3. Si

$$F(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt,$$

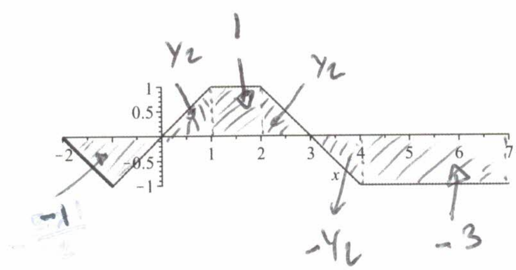
alors $F'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

A. 0
B. Aucune de ces réponses
C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
E. -1
F. 1

Par le Théorème fondamental du calcul : $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$. Alors $F'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi(\sqrt{2}/2)^2}{2}\right) = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Le graphe de la fonction f est donné. Calculer $\int_{-2}^{7} f(x)\,dx$.



A. Aucune de ces réponses
B. $\frac{5}{2}$
C. 0
D. $-\frac{3}{2}$
E. $\frac{3}{2}$
F. $-\frac{5}{2}$

$$\int_{-2}^{7} f(x)dx = \underbrace{\int_{-2}^{0} f(x)dx}_{-1} + \underbrace{\int_{0}^{1} f(x)dx}_{1/2} + \underbrace{\int_{1}^{2} f(x)dx}_{1} + \underbrace{\int_{2}^{3} f(x)dx}_{1/2} + \underbrace{\int_{3}^{4} f(x)dx}_{-1/2} + \underbrace{\int_{4}^{7} f(x)dx}_{-3}$$

$$-1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

5. f est une fonction continue sur $[1, 8]$ telle que $\int_1^8 2f(x)\,dx = 4.8$ et $\int_3^8 3f(x)\,dx = -3.3$. Quelle est la valeur de $\int_1^3 f(x)\,dx$?

A. -3.5 **B.** 3.5
C. Aucune de ces réponses **D.** 0
E. -1.5 **F.** 1.5

$$\int_1^8 f(x)dx = \frac{4.8}{2} = 2.4 \;;\quad \int_3^8 f(x)dx = -\frac{3.3}{3} = -1.1$$

$$\int_1^8 f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^8 f(x)\,dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \int_1^8 f(x)dx - \int_3^8 f(x)dx$$

$$\int_1^3 f(x)dx = 2.4 - (-1.1) = 3.5$$

6. [**4 points**] Évaluer l'intégrale définie

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{(\ln x)^3}}{x} dx.$$

Par la méthode de substitution: $u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow$

$dx = x\,du$

$$\int \frac{\sqrt{(\ln x)^3}}{x} dx = \int u^{3/2} du = \frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{2}{5} u^{5/2} = \frac{2}{5} (\ln x)^{5/2}$$

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{(\ln x)^3}}{x} dx = \frac{2}{5} (\ln x)^{5/2} \Big|_1^2 = \frac{2}{5} (\ln 2)^{5/2} - \frac{2}{5} \underbrace{(\ln 1)}_{0}{}^{5/2} = \frac{2}{5} (\ln 2)^{5/2}$$

7. **[4 points]** Évaluer l'intégrale indéfinie

$$\int x^2 \sin(x)\, dx$$

Par la méthode d'intégration par parties : $u = x^2$, $v' = \sin x \Rightarrow$

$u' = 2x$, $v = \int \sin x\, dx = -\cos x$

$\int x^2 \sin x\, dx = uv - \int u'v\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$.

Par parties de nouveau pour calculer $\int x \cos x\, dx$:

$u = x$, $v' = \cos x \Rightarrow u' = 1$, $v = \int \cos x\, dx = \sin x$

$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x$.

D'où

$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$

8. [**4 points**] Évaluer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{-2x+3}{x^2-7x+6}\,dx$$

Par la méthode des fractions partielles :

$\dfrac{-2x+3}{x^2-7x+6} = \dfrac{-2x+3}{(x-1)(x-6)}$. On cherche deux constantes A et B

telles que $\dfrac{-2x+3}{(x-1)(x-6)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-6} = \dfrac{Ax-6A+Bx-B}{(x-1)(x-6)}$

$$= \frac{(A+B)x-6A-B}{(x-1)(x-6)}$$

D'où $\begin{cases} A+B=-2 & ① \\ -6A-B=3 & ② \end{cases}$ ① + ② $\Rightarrow -5A = 1 \Rightarrow A = -1/5$

① $\Rightarrow B = -2-A = -2+\frac{1}{5} = -\frac{9}{5}$

$\dfrac{-2x+3}{x^2-7x+6} = \dfrac{-1/5}{x-1} - \dfrac{9/5}{x-6} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{-2x+3}{x^2-7x+6}\,dx = -\frac{1}{5}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{9}{5}\int \frac{1}{x-6}\,dx$

$$= -\frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{9}{5}\ln|x-6| + C$$