

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

5 mai 2020

MAT1700  
X-ETE20Révision  
des  
concepts  
de base

Ensembles

Ensembles de  
nombresLes  
intervalles de  
 $\mathbb{R}$ Quelques  
Opérations  
élémentaires  
dans  $\mathbb{R}$ Opérations  
sur les frac-  
tions - Ratio-  
nalisationOpérations  
sur les frac-  
tions - Ratio-  
nalisationLes  
puissances et  
les racinesLes  
polynômes -  
Résolution  
des équations  
dans  $\mathbb{R}$ 

## 1 Révision des concepts de base

- Ensembles de nombres
- Les intervalles de  $\mathbb{R}$
- Opérations sur les fractions - Rationalisation
- Les polynômes - Résolution des équations dans  $\mathbb{R}$



## Les ensembles

## Définition 1.1

*Un ensemble est une collection d'objets. Ces objets sont appelés les éléments de l'ensemble.*

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux ensembles. Soit  $x$  un l'élément de  $E_1$ .

## Notations 1.1

- $x \in E_1$  signifie que  $x$  appartient à l'ensemble  $E_1$ .
- $x \notin E_1$  signifie que  $x$  n'appartient pas à l'ensemble  $E_1$ .
- $E_1 \cup E_2$  se lit " $E_1$  union  $E_2$ ". C'est l'ensemble qui contient tous les éléments qui appartiennent à au moins un des deux ensembles  $E_1$  et  $E_2$ .
- $E_1 \cap E_2$  se lit " $E_1$  inter  $E_2$ ". C'est l'ensemble qui contient tous les éléments qui appartiennent à  $E_1$  et  $E_2$ .

**Ensembles**Ensembles de  
nombresLes  
intervalles de  
 $\mathbb{R}$ Quelques  
Opérations  
élémentaires  
dans  $\mathbb{R}$ Opérations  
sur les frac-  
tions - Ratio-  
nalisationOpérations  
sur les frac-  
tions - Ratio-  
nalisationLes  
puissances et  
les racinesLes  
polynômes -  
Résolution  
des équations  
dans  $\mathbb{R}$ 

## Les ensembles

## Notations 1.2

- $E_1 \subset E_2$  se lit “ $E_1$  est inclus dans  $E_2$ ” et signifie que pour tout élément  $x \in E_1$ , on a  $x \in E_2$ .
- On note  $E_1 \setminus E_2$ , l'ensemble constitué de tous les éléments qui appartiennent à  $E_1$  mais n'appartiennent pas à  $E_2$ .
- L'ensemble vide, noté  $\emptyset$ , est l'ensemble qui ne contient aucun élément.



## Les ensembles de nombres

On note :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , l'ensemble des **nombre entiers naturels**
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ , l'ensemble des **nombre entiers relatifs**
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ , l'ensemble des **nombre rationnels** ( $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{3}{4}$ ,  $7 = \frac{7}{1}$ ,  $0.3 = \frac{3}{10}$ , ...)
- $\mathbb{R}$ , l'ensemble des **nombre réels**.



## Les ensembles de nombres

$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ , où la notation  $\subsetneq$  signifie l'inclusion stricte.  
L'ensemble  $\mathbb{R}$  est aussi appelé la **droite réelle**.

## Exemple 1.1

Soient  $E_1 = \{0, 3, 5\}$  et  $E_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .

- $E_1 \subset E_2$ , mais  $E_2 \not\subset E_1$  (puisque  $2 \notin E_1$ )
- $E_2 \setminus E_1 = \{1, 2, 4\}$ ;  $E_1 \setminus \{3\} = \{0, 5\}$
- $E_1 \cap E_2 = \{0, 3, 5\}$ ;  $E_1 \cup E_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$



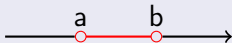
Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels.

### L'ordre sur $\mathbb{R}$

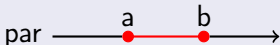
- $a$  est plus petit que  $b$  (ou  $a$  est strictement inférieur à  $b$ ) est noté  $a < b$
- $a$  est plus petit ou égal à  $b$  (ou  $a$  est inférieur à  $b$ ) est noté  $a \leq b$
- $a$  est plus grand que  $b$  (ou  $a$  est strictement supérieur à  $b$ ) se note  $a > b$
- $a$  est plus grand ou égal à  $b$  ( ou  $a$  est supérieur à  $b$  ) se note  $a \geq b$

Les intervalles de  $\mathbb{R}$ 

- si  $a < b$ , l'intervalle ouvert de  $a$  à  $b$  est l'ensemble des réels strictement supérieurs à  $a$  mais strictement inférieurs à  $b$ . Il est noté  $]a, b[$ . En notation ensembliste,  $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x < b\}$ . Graphiquement, l'intervalle ouvert  $]a, b[$  est représenté par :



- L'intervalle fermé de  $a$  à  $b$  est noté  $[a, b]$ . Il est représenté



Les cercles ouverts (resp. fermés) aux bouts de l'intervalle signifient que les points  $a$  et  $b$  sont exclus (resp. incluses). Le tableau qui suit récapitule tous les intervalles de  $\mathbb{R}$ .








Notation	Description ensembliste	Représentation
$]a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
$]a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
$]a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	

Table – Les intervalles de  $\mathbb{R}$



Notation	Description ensembliste	Représentation
$[a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
$] -\infty, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	
$] -\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	
$] -\infty, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R}\}$	

Table – Les intervalles de  $\mathbb{R}$



## Opérations sur les fractions

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}; \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}; \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}; \quad \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies ad = bc.$$



## Opérations sur les fractions

## Exemple 1.2

*Résoudre*

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{3}; \quad \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3}; \quad \frac{2}{5} \div \frac{7}{3}; \quad \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{1}{3}.$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3}; \quad \frac{2x}{3} = \frac{7}{5}.$$



## La rationalisation

Pour rationaliser une expression :

❶ Si  $\sqrt{a}$  est au dénominateur, multipliez par  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ .

❷ Si  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  est au dénominateur, multipliez par  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ .

❸ Si  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  est au dénominateur, multipliez par  $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ .



## La rationalisation

Rationalisez les expressions suivantes :

## Exemple 1.3

$$\frac{13}{6 + \sqrt{10}}; \quad \frac{(x-1)}{x + \sqrt{x}}; \quad \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{x-2}}$$

*Solution :*

$$\begin{aligned} \frac{13}{6 + \sqrt{10}} &= \frac{13}{6 + \sqrt{10}} \cdot \left( \frac{6 - \sqrt{10}}{6 - \sqrt{10}} \right) = \frac{13(6 - \sqrt{10})}{6^2 - \sqrt{10}^2} \\ &= \frac{13(6 - \sqrt{10})}{26} = \frac{(6 - \sqrt{10})}{2}. \end{aligned}$$



## Les puissances et les racines

Soit  $x$  et  $y$  deux nombres réels. Soient  $n$  et  $m$  deux entiers naturels.

- $x^1 = x$ ,  $x^2 = xx$ ,  $\dots$ ,  $x^n = \underbrace{xx \cdots x}_{n \text{ fois}}$

- Si de plus  $x \neq 0$ ,  $x^0 = 1$ ,  $x^{-1} = \frac{1}{x}$ ,  $\dots$ ,  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

- $x^n x^m = x^{n+m}$

- $(xy)^n = x^n y^n$

- $(x^n)^m = x^{nm}$



## Les puissances et les racines

- $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$  si  $x \neq 0$
- Si  $y \neq 0$ ,  $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
- $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ ;  $\sqrt{x/y} = \sqrt{x}/\sqrt{y}$
- $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ , ceci veut dire  $\sqrt[n]{x} = a \Leftrightarrow x^{1/n} = a \Leftrightarrow x = a^n$



## Exemple 1.4

*Simplifier les expressions suivantes :*

$$\frac{x^{-3}y^{-2}z}{y^{-1}x^7}; \quad xx^3x^{-2}; \quad \frac{\sqrt[8]{x^5}}{\sqrt[4]{x^3}}; \quad (-8)^{\frac{4}{3}}; \quad (9x^8)^{\frac{1}{2}}.$$



## Les polynômes

Un **polynôme** est une expression de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

où  $n$  est un entier positif,  $x$  est la variable (l'inconnue) et les nombres  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des constantes appelées **coefficients** du polynôme. Si le premier coefficient  $a_n \neq 0$ , alors le polynôme est de **degré  $n$** . On note

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$



## Exemple 1.5

- Le polynôme  $p(x) = a_0$ ,  $a_0 \neq 0$  est **constant** de degré **0**.
- Le polynôme  $p(x) = a_1x + a_0$ ,  $a_1 \neq 0$  est **linéaire** de degré **1**.
- Le polynôme  $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ,  $a_2 \neq 0$  est **quadratique** de degré **2** ou du second degré.



## Les polynômes

Résoudre une équation polynomiale

$p(x) = 0 \Leftrightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ , revient à trouver toutes les valeurs de  $x$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $p(x) = 0$ .

Tout  $x \in \mathbb{R}$  satisfaisant  $p(x) = 0$  est appelé **racine du polynôme  $p$**  ou **zéro du polynôme  $p$** .

En d'autres termes, les **racines du polynôme  $p$**  sont les **solutions** de l'équation  $p(x) = 0$ .



## Théorème des racines entières d'un polynôme normalisé

soit le polynôme normalisé,

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

dont les coefficients  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des entiers. Alors toutes les **racines entières** du polynôme sont des diviseurs de  $a_0$ .

### Exemple 1.6

*Trouvez les racines entières des polynômes '*

$$p(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3; \quad p(x) = x^3 - x^2 - x - 2.$$



## Factorisation des polynômes

Soit  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  un polynôme de degré  $n$ .

En général, pour résoudre l'équation  $p(x)=0$ , il suffit de ré-écrire le polynôme  $p(x)$  sous la forme d'un produit de polynômes linéaires :

$$p(x) = (c_1 x + d_1)(c_2 x + d_2) \cdots (c_n x + d_n),$$

où les  $c_i, d_i$  sont des nombres réels tels que  $c_i \neq 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . Dans ce cas, le polynôme  $p(x)$  est dit **factorisé**.



## Factorisation des polynômes

Les solutions de l'équation  $p(x) = 0$  sont les  $n$  solutions des équations

$$c_1x + d_1 = 0,$$

$$c_2x + d_2 = 0,$$

$$\vdots$$

$$c_nx + d_n = 0.$$

MAT1700  
X-ETE20Révision  
des  
concepts  
de base

Ensembles

Ensembles de  
nombresLes  
intervalles de  
 $\mathbb{R}$ Quelques  
Opérations  
élémentaires  
dans  $\mathbb{R}$ Opérations  
sur les frac-  
tions - Ratio-  
nalisationOpérations  
sur les frac-  
tions - Ratio-  
nalisationLes  
puissances et  
les racinesLes  
polynômes -  
Résolution  
des équations  
dans  $\mathbb{R}$ 

- L'équation  $p(x) = a_0 = 0$ , ( $a_0 \neq 0$ ) n'a pas de solution car  $a_0 \neq 0$ .
- L'équation  $p(x) = a_1x + a_0 = 0$  ( $a_1 \neq 0$ ) possède une solution unique  $x = -\frac{a_0}{a_1}$ .
- L'équation  $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  ( $a_2 \neq 0$ ) peut être résolue avec la **formule quadratique**.



## Factorisation des polynômes - formule quadratique

Soit  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ , une équation de degré 2. Par la **formule quadratique**, on calcule le discriminant  $b^2 - 4ac$ .

- Si  $b^2 - 4ac > 0$ , l'équation a deux solutions réelles,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$



## Factorisation des polynômes - formule quadratique

- Si  $b^2 - 4ac = 0$ , l'équation a une solution réelle,

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

- Si  $b^2 - 4ac < 0$ , l'équation n'a aucune solution réelle.  
Dans ce cas, on dit que l'équation est **irréductible**.

MAT1700  
X-ETE20Révision  
des  
concepts  
de base

Ensembles

Ensembles de  
nombresLes  
intervalles de  
 $\mathbb{R}$ Quelques  
Opérations  
élémentaires  
dans  $\mathbb{R}$ Opérations  
sur les frac-  
tions - Ratio-  
nalisationOpérations  
sur les frac-  
tions - Ratio-  
nalisationLes  
puissances et  
les racines**Les  
polynômes -  
Résolution  
des équations  
dans  $\mathbb{R}$** **Factorisation des polynômes - formule quadratique**

Résoudre les équations suivantes :

$$(a) 2x^2 + 5x - 3 = 0;$$

$$(b) x^2 + 2x - 1 = 0$$



## Factorisation des polynômes

- **Formule quadratique.** (Pour les polynôme de degré 2).  
Si l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  a deux racines  $x_1$  et  $x_2$ ,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Autrement, si elle a une seule racine  $x_1$  (double),

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Si l'équation n'a aucune solution, Le polynôme **irréductible**.



## Factorisation des polynômes

- La méthode de la **différence de carrés**. Soit  $a$  est un nombre réel. Le polynôme  $x^2 - a^2$  se factorise comme suit :

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

- La méthode du **carré parfait**. Soit  $a$  est un nombre réel. Les polynômes  $x^2 + 2ax + a^2$  et  $x^2 - 2ax + a^2$  se factorisent :

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)(x + a) = (x + a)^2,$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)(x - a) = (x - a)^2.$$



## Factorisation des polynômes

- La méthode de la **différence de cubes**

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2),$$

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2).$$

- La méthode du **cube parfait**

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)(x + a)(x + a) = (x + a)^3,$$

$$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = (x - a)(x - a)(x - a) = (x - a)^3.$$

MAT1700  
X-ETE20Révision  
des  
concepts  
de base

Ensembles

Ensembles de  
nombresLes  
intervalles de  
 $\mathbb{R}$ Quelques  
Opérations  
élémentaires  
dans  $\mathbb{R}$ Opérations  
sur les frac-  
tions - Ratio-  
nalisationOpérations  
sur les frac-  
tions - Ratio-  
nalisationLes  
puissances et  
les racines**Les  
polynômes -  
Résolution  
des équations  
dans  $\mathbb{R}$** 

## Exemple 1.7

*Simplifiez les expressions suivantes :*

$$\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 5x - 3}; \quad \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$



## Exemple 1.8

*Factoriser puis résoudre les équations suivantes :*

$$(a) (x + 1)^2 - 9 = 0;$$

$$(e) w^6 - 1 = 0$$

$$(b) x^4 - 8x^2 + 16 = 0;$$

$$(f) 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$(c) x^2 + 2x - 1 = 0;$$

$$(g) x^4 + 5x^2 + 5 = 0$$

$$(d) z^2 + z + 1 = 0;$$

$$(h) x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020 (Cours 2)

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

7 mai 2020



uOttawa

MAT1700  
X-ETE20

Résolution  
des  
inéquations  
dans  $\mathbb{R}$

Les valeurs  
absolues

Le plan  
cartésien

# Table des matières I

- Résolution des inéquations dans  $\mathbb{R}$
- Les valeurs absolues
- Le plan cartésien



- La **division polynomiale** (euclidienne). Cette méthode est utile pour factoriser des polynômes de degré 3 ou plus.

### Théorème

Si  $p$  est un polynôme de degré  $n$  tel que  $p(c) = 0$ , alors

$$p(x) = (x - c)q(x),$$

où  $q$  est un polynôme de degré  $n-1$ .



## La division polynômiale (euclidienne)

En d'autres termes, si  $c$  est une racine du polynôme  $p$ , alors  $x-c$  est un facteur de  $p(x)$ . On divise le polynôme  $p$  par  $x - c$  pour trouver le facteur manquant  $q$ .



## Exemple 0.1

*Factoriser les polynômes suivants en utilisant la division polynômiale :*

$$(a) \quad x^3 - x^2 - 4x + 4, \quad c = 1;$$

$$(b) \quad x^3 - x^2 - x - 2, \quad c = 2;$$

$$(c) \quad x^3 + 3x^2 - x - 3;$$

inéquations dans  $\mathbb{R}$ 

- Un inéquation se présente sous la forme d'une inégalité contenant l'un des signes  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ . Par exemple,  $x + 2 < x + 7$  est une inéquation à une inconnue  $x$ .
- Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue  $x$  pour lesquelles l'inégalité est vraie. Ces valeurs sont **les solutions** de l'inéquation. Elles forment souvent un intervalle ou une réunion d'intervalles.



## Exemple 0.2

Résolvez l'inégalité  $12x - 3 \leq 9$ .

$$12x - 3 \leq 9 \Rightarrow 12x \leq 9 + 3 \Rightarrow 12x \leq 12 \Rightarrow x \leq \frac{12}{12} = 1.$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle  $] -\infty, \mathbf{1}]$ .





**Remarque** : Il faut changer le sens de l'inéquation si on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif.

### Exemple 0.3

*Résolvez les inégalités suivantes :*

$$(a) \quad -1 < -\frac{2x}{3} < 2; \quad (b) \quad -2 \geq 3 - 4x > -10$$
$$(c) \quad -1 \leq x + 2 < x + 3.$$



**Remarque** : On peut résoudre une équation à l'aide du **tableau de signe**.

### Exemple 0.4

*Résolvez les inéquations suivantes :*

$$(a) \quad 2x^2 - 1 \geq -5x + 2; \quad (b) \quad x^2 - 9 < 0.$$



Si  $x$  est un nombre réel, alors la **valeur absolue** de  $x$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

**Remarque :**  $|x|$  est la distance qui sépare  $x$  de 0 sur la droite réelle  $\mathbb{R}$ . De façon générale,  $|x_1 - x_2|$ , est la **distance** qui sépare deux points  $x_1$  et  $x_2$  sur la droite réelle.



Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\begin{aligned} |x| &= \sqrt{x^2}; & |x + y| &\leq |x| + |y|, \\ |xy| &= |x||y|; & |x - y| &\leq |x| + |y|, \\ -|x| &\leq x \leq |x|; & ||x| - |y|| &\leq |x - y|. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} |5x - 2| &= \begin{cases} 5x - 2 & \text{si } 5x - 2 \geq 0 \Rightarrow 5x \geq 2 \\ -(5x - 2) & \text{si } 5x - 2 < 0 \Rightarrow 5x < 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 5x - 2 & \text{si } x \geq \frac{2}{5} \\ -(5x - 2) & \text{si } x < \frac{2}{5} \end{cases} \end{aligned}$$



Soient  $a$  et  $r$  deux nombres réels tels que  $a \geq 0$ .

$$\begin{aligned} |x - r| = a &\Leftrightarrow x - r = a \quad \text{ou} \quad x - r = -a, \\ &\Leftrightarrow x = a + r \quad \text{ou} \quad x = -a + r. \end{aligned}$$

### Exemple 0.5

*Résoudre les équations suivantes :*

$$|2x - 5| = 3; \quad |x + 3| = -1.$$



Soient  $a$  et  $r$  deux nombres réels tels que  $a \geq 0$ .

$$\begin{aligned}|x - r| < a &\Leftrightarrow -a < x - r < a, \\ &\Leftrightarrow -a + r < x < a + r\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle ouvert  $] -a + r, a + r[$ .  
De même, l'inéquation  $|x - r| \leq a$  a pour ensemble solutions  $[-a + r, a + r]$ .

### Exemple 0.6

*Résoudre les inéquations suivantes :*

$$|3x - 2| \leq 5; \quad |3x - 2| < 5.$$



$$\begin{aligned}|x - r| > a &\Leftrightarrow x - r < -a \quad \text{ou} \quad x - r > a, \\ &\Leftrightarrow x < -a + r \quad \text{ou} \quad x > a + r.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est la réunion d'intervalles

$$]-\infty, -a+r[ \cup ]a+r, +\infty[.$$

De même, l'inéquation  $|x - r| \geq a$  a pour ensemble solutions

$$]-\infty, -a+r] \cup [a+r, +\infty[.$$

### Exemple 0.7

*Résoudre les inéquations suivantes :*

$$|3x - 2| \geq 5; \quad \left| \frac{x + 333}{22} \right| > 6.$$

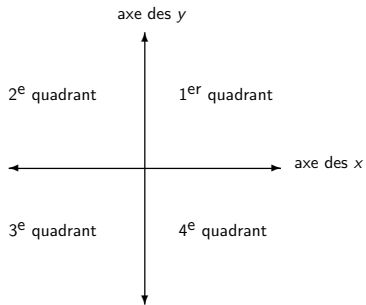


Le **plan cartésien** (**plan-xy**), noté  $\mathbb{R}^2$ , est représenté par la figure ci-dessous à droite :

- Le plan-xy est divisé en quatre **quadrants** par l'axe des  $x$  et l'axe des  $y$ .

- Signes de  $x$  et  $y$  :**

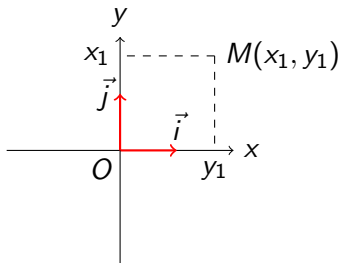
- Quadrant I :  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$
- Quadrant II :  $x \leq 0$  et  $y \geq 0$
- Quadrant III :  $x \leq 0$  et  $y \leq 0$
- Quadrant IV :  $x \geq 0$  et  $y \leq 0$





## Définition 0.1

Un repère du plan est défini par trois points non alignés  $(O, I, J)$ . Le point  $O$  est l'origine du repère, la droite  $(OI)$  est appelée *l'axe des abscisses* et la droite  $(OJ)$ , *l'axe des ordonnées*. On le note  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , avec  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$  et  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ .





- Si les droites  $(OI)$  et  $(OJ)$  sont perpendiculaires, alors le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est dit **orthogonal**. Si de plus,  $OI = OJ$ , alors le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est dit **orthonormal (ou orthonormé)**.
- Chaque point  $M$  dans le plan- $xy$  est représenté par un **couple**  $(x, y)$ , qui constitue ses **coordonnées** dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On note  $M(x, y)$  où  $x$  représente l'**abscisse** et  $y$  l'**ordonnée**.

### Remarque

Lorsqu'on travaille avec plus d'un point à la fois, on peut utiliser  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$ , etc.



uOttawa

MAT1700  
X-ETE20

Les  
équations  
de droites

Droites  
parallèles et  
perpendicu-  
laires

Les  
Fonctions

Domaine de  
définition  
d'une  
fonction

Graphes de  
fonctions  
usuelles

Exercices  
suggérées

Composition  
de fonctions

## Section 1

# Les équations de droites



- L'équation typique d'une droite s'écrit :

$$y = mx + b,$$

où **m** est la  **pente**  de la droite (ou aussi **coefficient directeur, taux de variation**) et **b** est **l'ordonnée à l'origine** de la droite.

- Etant donné deux points  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ , nous pouvons calculer la pente, **m**, de la droite qui passe par ces points :

$$\mathbf{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{“changement en } y\text{”}}{\text{“changement en } x\text{”}}$$



- Etant donné un points  $(x_1, y_1)$  sur la droite de pente  $m$ , nous pouvons trouver son équation linéaire en utilisant la formule :

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

### Différentes formes des équations de droites

- Forme générale :  $Ax + By + C = 0$
- Forme réduite :  $y = mx + b$
- Droite horizontale :  $y = b$
- Droite verticale :  $x = a$



## Exemple 1.1

- *Trouvez une équation de la droite qui passe par les points  $(-3, 6)$  et  $(1, 2)$ .*
- *Trouvez une équation de la droite de pente  $\frac{1}{6}$ , qui passe par le point  $(1, 5)$ .*



Étant données deux droites dans le plan :

$$(D_1) : y = m_1x + b_1,$$

$$(D_2) : y = m_2x + b_2.$$

On peut utiliser leurs pentes pour déterminer si ces deux droites sont **parallèles** ou **perpendiculaires**.



# Droites parallèles et perpendiculaires

- $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont **parallèles** si et seulement si elles ont la même pente, c.à.d,  $m_1 = m_2$ . On note  $(D_1) // (D_2)$ .
- $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont **perpendiculaires** si et seulement si le produit de leurs pentes est égal à  $-1$  : , c.à.d.,  $m_1 \times m_2 = -1$ . On note  $(D_1) \perp (D_2)$ .

## Exemple 1.2

*Trouvez l'équation de la droite parallèle à la droite  $2x - 3y = 5$  et passant par le point  $(2, -1)$ .*



**Solution :** On commence par réécrire l'équation de la droite  $2x - 3y = 5$  sous la forme  $y = mx + b$  :

$$2x - 3y = 5 \Rightarrow -3y = 5 - 2x \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

La pente de cette droite est alors  $m = \frac{2}{3}$ .

La droite recherchée aura alors la même pente  $m = \frac{2}{3}$ . On utilise le point donné pour trouver l'équation de cette droite :

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$



## Exemple 1.3

Trouvez l'équation de la droite perpendiculaire à la droite  $2x - 3y = 5$  et passant par le point  $(2, -1)$ .

**Solution :** D'après l'exemple précédent, la pente de la droite donnée est  $m = \frac{2}{3}$ . La pente de la droite qui lui est perpendiculaire est alors :

$$m = \frac{-1}{2/3} = -\frac{3}{2}$$

On utilise le point donné pour trouver l'équation de cette droite :

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = \frac{-3}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 2.$$



uOttawa

MAT1700  
X-ETE20

Les  
équations  
de droites

Droites  
parallèles et  
perpendicu-  
laires

Les  
Fonctions

Domaine de  
définition  
d'une  
fonction

Graphes de  
fonctions  
usuelles

Exercices  
suggérées

Composition  
de fonctions

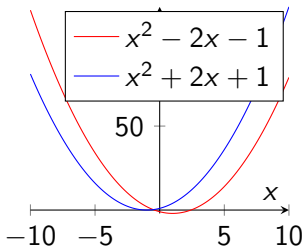
## Section 2

# Les Fonctions



Apparu à la fin du *XVII*-ème siècle, le terme mathématique **fonction** doit son introduction en Analyse, au mathématicien Leibniz et son formalisme, aux mathématiciens : Jean Bernoulli, Euler et Fourier. Cette notion est familière. En effet, elle fait surface dès qu'une grandeur dépend d'une autre. Le **diamètre** d'un cercle par exemple dépend du **rayon** du cercle, car  $d = 2r$ . Ainsi, à chaque nombre positif  $r$ , correspond une valeur du diamètre  $d$ . On dit alors que **le diamètre du cercle est une fonction du rayon  $r$** , du cercle.

Exemple :





## Définition 2.1

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. Une fonction  $f : E \rightarrow F$  est une relation mathématique qui à tout élément  $x$  d'une partie  $\text{Dom}_f$  de  $E$ , associe un et un seul élément  $y$  d'une partie  $\text{Im}_f$  de  $F$ .

On la note :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

L'expression analytique  $y = f(x)$  traduit cette relation.

- Le réel  $x$  est appelé : **antécédent** de  $y$ . Il constitue la variable indépendante de  $y = f(x)$ .



- Le réel  $y$ , aussi noté  $f(x)$ , est appelé : **image** de  $x$  par  $f$ . C'est la variable dépendante de  $y = f(x)$ .
- L'ensemble  $\text{Dom}_f$  est appelé **domaine de définition** de  $f$ .
- L'ensemble  $\text{Im}_f$  est **l'image** de  $f$ .
- $E$  est appelé **ensemble de départ** et  $F$  **ensemble d'arrivée** de  $f$ .

**Remarque** Lorsqu'on  $E = \mathbb{R}$  et  $F = \mathbb{R}$ , la fonction  $f$  est appelée fonction numérique ou fonction réelle à variable réelle.

Dans ce cours, seules les fonctions numériques seront considérées.



- La **fonction demande** notée  $p(x)$  représente le prix par unité d'un produit quand la demande est  $x$ .
- La fonction  $R(x) = xp(x)$  désigne le **revenu**. C'est le produit du nombre  $x$  d'articles vendus et du prix d'un article  $p(x)$ .
- La fonction le **coût** notée  $C(x)$ , représente le **coût total** de la production de  $x$  unités d'un produit.
- La fonction **offre** notée  $S(x)$  donne le prix par unité d'un produit que les producteurs sont prêts à vendre quand la demande est  $x$ .
- La fonction  $P(x) = R(x) - C(x)$  est le **profit** provenant de la vente de  $x$  unités d'un produit.



Soient  $f$ ,  $g$  deux fonctions et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors, les fonctions  $f \pm g$ ,  $\alpha f$ ,  $fg$ ,  $f/g$  sont respectivement définies comme suit :

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ .
- $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ .
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$ .
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ .

Toute fonction qui résulte de l'une de ces opérations est dite : **algébrique**.



## Subsection 1

# Domaine de définition d'une fonction



### Définition 2.2

Le **domaine de définition**,  $\text{Dom}_f$ , d'une fonction  $f$  est l'ensemble des valeurs de  $x$  pour lesquelles la fonction  $f(x)$  est bien définie (existe).

### Définition 2.3

L'**image**,  $\text{Im}_f$ , d'une fonction  $f$  est l'ensemble de toutes les valeurs  $f(x)$  associées à tous les  $x$  du domaine  $\text{Dom}_f$ . En d'autres termes,  $\text{Im}_f = \{f(x) \text{ tel que } x \in \text{Dom}_f\}$ .

**Remarque** On dit que  $f$  existe sur  $\text{Dom}_f$  ou  $f$  est définie sur  $\text{Dom}_f$ , si  $\text{Dom}_f$  est son domaine de définition.



Pour déterminer le domaine de définition d'une fonction, il faut considérer le tableau suivant :

Expression algébrique de $f$ :	On a besoin que ...
Une fraction : $u(x)/v(x)$	$v(x) \neq 0$
$\sqrt[n]{u(x)}$ , $n$ pair	$u(x) \geq 0$
$\sqrt[n]{u(x)}$ , $n$ impair	$\text{Dom}_f = \mathbb{R}$
Polynôme : $p(x)$	$\text{Dom}_f = \mathbb{R}$
$\ln(u(x))$	$u(x) > 0$



### Exemple 2.1

Le profit,  $P$ , de fabriquer  $x$  unités d'un produit est donné par

$$P(x) = 6x - \sqrt{4x - 100} - 5000.$$

- Quel est le domaine de définition de cette fonction ?
- Quel est le profit lorsque 1000 unités sont fabriquées ?



## Exemple 2.2

- Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes ;

$$(a) f(x) = 3x^5 + 7x^2 + 50; \quad (d) f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

$$(b) f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}; \quad (e) f(x) = \sqrt[4]{2x-3}$$

$$(c) f(x) = \ln(x+2); \quad (f) f(x) = \ln(x^2+1)$$

- Déterminer l'ensemble image des fonctions suivantes :

$$(a) f(x) = \sqrt{x-1}; \quad (b) f(x) = 2x^2 - 3$$



### Définition 2.4

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\text{Dom}_f$ . La courbe représentative (ou graphe) de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est l'ensemble des points  $M(x, f(x))$  du plan tels que  $x \in \text{Dom}_f$ .

### Test de la droite verticale

Une courbe du plan  $(Oxy)$  est le graphe d'une fonction  $f$  si et seulement si aucune droite verticale  $(D) : x = a, a \in \mathbb{R}$ , ne l'intersecte plus d'une fois.

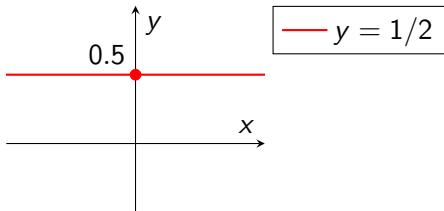


## Subsection 2

# Graphes de fonctions usuelles



- Une fonction **constante** est définie par  $f(x) = k$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , où  $k$  est une constante fixe.

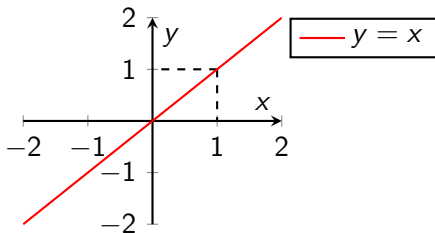


- $\text{Dom}_f = \mathbb{R}$  et  $\text{Im}_f = \{k\}$ .



## Fonctions affines :

- Une fonction **affine** (ou **linéaire**) est représentée par une droite dans le plan. Elle est définie par  $f(x) = mx + b$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $b, m \in \mathbb{R}$ ,  $m \neq 0$ .



- $\text{Dom}_f = \mathbb{R}$  et  $\text{Im}_f = \{\mathbb{R}\}$ .



### Exemple 2.3 (Application en économie)

*Supposons que la relation entre la demande,  $x$ , pour un certain produit et le prix par unité,  $p$  est linéaire. Si nous pouvons vendre 1000 unités à 20 \$ chacune et 3000 unités à 15 \$ chacune, trouvez la fonction demande  $p$ .*



### Exemple 2.4 (Application en Économie)

*La fabrication de CDs nécessite un investissement initial de 1980\$ pour le temps en studio et ensuite 1.80\$ pour chaque CD. Nous vendons les CDs pour 9\$ chacun.*

- Quel est le coût total,  $C(x)$ , de production de  $x$  CDs ?*
- Quel est le revenu,  $R(x)$  de la vente de  $x$  CDs ?*
- Déterminez la fonction profit,  $P(x)$ .*



MAT1700  
X-ETE20

Les  
équations  
de droites

Droites  
parallèles et  
perpendicu-  
laires

Les  
Fonctions

Domaine de  
définition  
d'une  
fonction

**Graphes de  
fonctions  
usuelles**

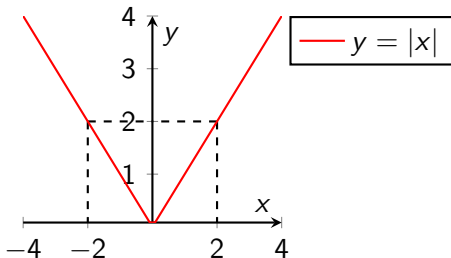
Exercices  
suggérées

Composition  
de fonctions

**Exercices suggérés** : Refaire **Exemple 34**  
**(Fonctions affines), Chapitre 4,**  
**Sous-section 4.1.1**, de votre manuel de cours.



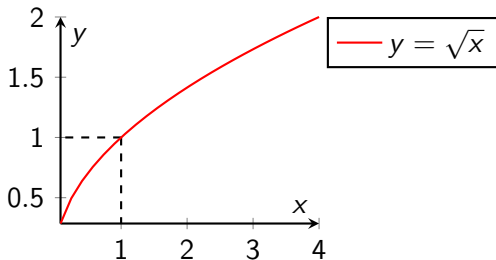
- La fonction valeur absolue est définie par  $f(x) = |x|$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .



- $\text{Dom}_f = \mathbb{R}$  et  $\text{Im}_f = [0, +\infty[$ .



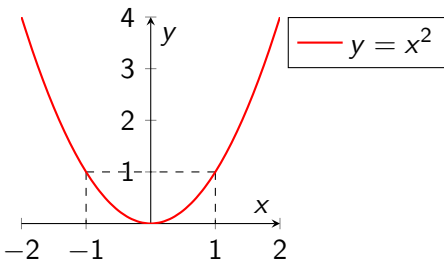
- la fonction racine carrée est définie par  $f(x) = \sqrt{x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .



- $\text{Dom}_f = [0, +\infty[$  et  $\text{Im}_f = [0, +\infty[$ .



- Les fonctions quadratiques sont définies par  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Leurs graphes sont des **paraboles**.

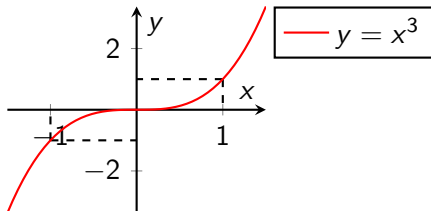


- $\text{Dom}_f = \mathbb{R}$  et  $\text{Im}_f = [0, +\infty[$ .



- Les fonctions cubiques sont définies par

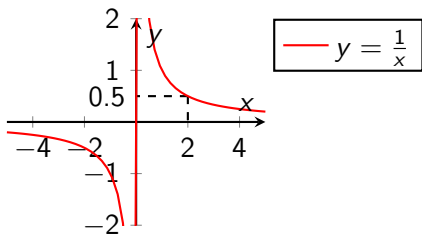
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$



- $\text{Dom}_f = \mathbb{R}$  et  $\text{Im}_f = \mathbb{R}$ .



Nous considérons ici les fonctions inverses de la forme

$$f(x) = \frac{k}{x}, \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$


$\text{Dom}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$  et

$\text{Im}_f = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ . Ce graphe est une **hyperbole**.



- Une fonction **polynômiale**  $f$  est définie par  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ , où  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des réels fixés ( $a_n \neq 0$ ) et  $n \in \mathbb{N}$  est un entier fixé.
  - $\text{Dom}_f = \mathbb{R}$
  - $\text{Im}_f =$  à déterminer suivant l'expression de  $f$ .

**Remarque 1 :** Les fonctions **constantes, affines, quadratiques et cubiques** sont des cas particuliers de fonctions polynômiales.

**Remarque 2 :** Toute fonction polynômiale est algébrique.



- Une fonction **racines n-ième**  $f$  est définie par

$$f(x) = \sqrt[n]{A(x)},$$

où  $n \in \mathbb{N}$  et  $A(x)$  est une autre fonction donnée.

- Si  $n$  est **pair**,  $f$  existe si et seulement si  $A(x) \geq 0$ . Alors,  $\text{Dom}_f$  est l'ensemble de  $x \in \mathbb{R}$  tels que  $A(x) \geq 0$ .
- Si  $n$  est **impair**,  $f$  existe pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{Dom}_f = \mathbb{R}$ .

**Remarque 1 :** La fonction **racine carrée** est un cas particulier de la fonction racine n-ième avec  $n = 2$  et  $A(x) = x$ .

**Remarque 2 :** Toute fonction racine n-ième est algébrique.



- Une fonction **rationnelle**  $f$  est définie par  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , où  $p$  et  $q$  sont des fonctions polynômiales.
  - $\text{Dom}_f$  est  $\mathbb{R}$  privé des racines de  $q$  et  $\text{Im}_f$  est à déterminer suivant l'expression de  $f$ .
- Remarque 1 :** Les fonctions **inverses** sont des cas particuliers de fonctions rationnelles.
- Remarque 2 :** Toute fonction rationnelle est algébrique.



Une fonction **exponentielle** de base  $a$  est une fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

où  $a$  est un réel strictement positif. Si  $a = 1$ ,  $f(x) = 1^x = 1$  est constante.

- Le graphe de  $x \mapsto a^x$  passe toujours par le point  $(0, 1)$ . En outre, la manière dont le graphe de  $x \mapsto a^x$  coupe l'axe des ordonnées détermine le choix de la base optimale  $a$ .



- Si la base  $a = e$  est choisie, où  $e \approx 2,718$  est le **nombre d'Euler**, on aura la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto e^x.$$

Elle s'appelle : **fonction exponentielle naturelle**. Elle existe pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et ne s'annule jamais.

- $\text{Dom}_f = \mathbb{R}$  et  $\text{Im}_f = ]0, +\infty[$ .



## Propriétés

Soient  $a$  et  $b$  des réels strictement positifs et  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$(1) a^x > 0;$$

$$(2) a^x a^y = a^{x+y};$$

$$(3) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$

$$(4) (a^x)^y = a^{xy}$$

$$(5) (ab)^x = a^x b^y$$

$$(6) a^x = a^y \Leftrightarrow x = y.$$

**Remarque :** Ces propriétés sont vraies en particulier pour  
 $a = b = e$ .



uOttawa

# Graphe de fonctions exponentielles

MAT1700  
X-ETE20

Les  
équations  
de droites

Droites  
parallèles et  
perpendicu-  
laires

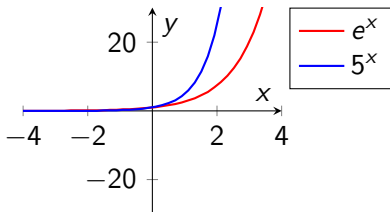
Les  
Fonctions

Domaine de  
définition  
d'une  
fonction

**Graphes de  
fonctions  
usuelles**

Exercices  
suggérées

Composition  
de fonctions





Une fonction logarithme de base  $a$ , notée  $\log_a$ , est une fonction

$$\begin{aligned}\log_a : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log_a x\end{aligned}$$

où  $a$  est un réel strictement positif tel que  $a \neq 1$ . En particulier, une fonction logarithme de base  $e$  s'appelle : **fonction logarithme naturelle ou logarithme népérien**. Elle est notée : **ln**.

$$\begin{aligned}\log_e x &= \ln x \\ \log_a x &= \frac{\ln x}{\ln a}\end{aligned}$$



## Propriétés

Soient  $x, y, a$  des réels strictement positifs.

$$(1) \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y; \quad (4) \log_a x^y = y \log_a x$$

$$(2) \log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y; \quad (5) \log_x y = \frac{\log_a y}{\log_a x}$$

$$(3) y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y.$$

La fonction  $\log_a(x)$  existe ssi  $x > 0$ , c'est-à-dire,  $\text{Dom}_f = ]0, +\infty[$ .



## Propriétés

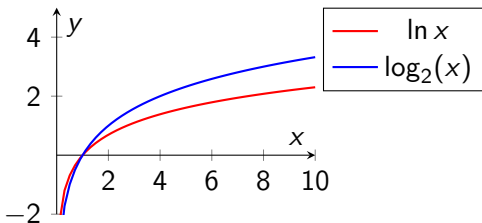
Soient  $x, y$  des réels strictement positifs. En particulier, on a :

$$(1) \ln(xy) = \ln x + \ln y; \quad (3) \ln x^y = y \ln x$$

$$(2) \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y; \quad (4) y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y.$$

De même, la fonction  $f(x) = \ln x$  existe si et seulement si  $x > 0$ , c'est-à-dire,  $\text{Dom}_f = ]0, +\infty[$ .

**Remarque :** En général, la fonction  $f(x) = \ln(A(x))$  existe ssi  $A(x) > 0$ .





## Subsection 3

### Exercices suggérées



- Refaire **Exemple 34 (Fonctions affines)**, **Exemple 35 (Fonctions quadratiques)**, **Chapitre 4, Sous-section 4.1.1**, de votre manuel de cours.
- Résoudre les exercices de numéro impairs de la section 4.1 du manuel (Exercices 4.1).

Je vous recommande de toujours refaire les exemples corrigés de votre manuel de cours, pour chaque notion couverte en classe.



Soit  $f$  une fonction définie sur  $\text{Dom}_f$ .

- Les **abscisses à l'origine** d'une courbe sont les abscisses des points où le graphe de  $f$  coupe l'axe des  $x$ . On les détermine en posant  $f(x) = 0$ .
- Les **ordonnées à l'origine** d'une courbe sont les ordonnées des points où le graphe de  $f$  coupe l'axe des  $y$ . On les trouve en posant  $x = 0$ .

**Exemple 2.5**

*Etudier les éventuelles abscisses et ordonnées à l'origine de :*

$$f(x) = |x - 3| - 4.$$

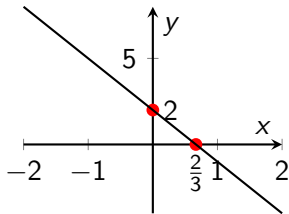
*Abscisses à l'origine :*  $f(x) = 0 \Rightarrow |x - 3| - 4 = 0 \Rightarrow |x - 3| = 4$   
 $\Rightarrow x = 7 \text{ ou } x = -1$

*Ordonnées à l'origine :*  $f(0) = |0 - 3| - 4 = 3 - 4 = 1.$



## Exemple 2.6

Dessinez le graphe et trouvez l'ordonnée et les abscisses à l'origine de la fonction  $y = f(x) = -3x + 2$ .



$$y = -3x + 2$$

**Abscisses à l'origine :**

$$f(x) = 0 \Rightarrow -3x + 2 = 0 \Rightarrow -3x = -2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

**Ordonnées à l'origine :**  $f(0) = -3(0) + 2 = 2$ .



En faisant subir certaines transformations au graphique d'une fonction  $f$  donnée, on peut obtenir les graphiques de fonctions apparentées.

- Le graphe de  $x \mapsto -f(x)$  est obtenu en faisant subir à celui de  $x \mapsto f(x)$  une **réflexion par rapport à l'axe des  $x$** .
- Le graphe de  $x \mapsto f(-x)$  est obtenu en faisant subir à celui de  $x \mapsto f(x)$  une **réflexion par rapport à l'axe des  $y$** .



Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction donnée. Soient  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = Af(B(x - C)) + D$ .

Alors le graphe de  $g$  est obtenu en faisant subir à celui de  $f$  :

- 1 **Etirement verticale** à partir de l'axe des  $x$  d'un facteur  $A$  ;
- 2 **Etirement horizontale** à partir de l'axe des  $y$  d'un facteur
- 3 **Translation verticale** de  $D$  unités vers le **haut** si  $D > 0$  ou vers le **bas** si  $D < 0$ .
- 4 **Translation horizontale** de  $C$  unités vers la **droite** si  $c > 0$  ou vers la **gauche** si  $c < 0$ .



## Exemple 2.7

Tracez le graphe de la fonction  $y = |x + 2| - 4$ .

**Solution :**  $y = |x - (-2)| - 4 = |x - (-2)| + (-4)$ .

Si  $f(x) = |x|$ , alors

$$y = f(x - (-2)) + (-4).$$

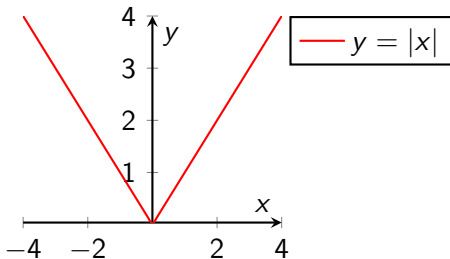
Le graphique de la fonction  $y = |x + 2| - 4$  est obtenu de celui de  $f(x) = |x|$  en faisant :

- une translation horizontale de  $-2$
- une translation verticale de  $-4$



Graphes de :  $y = |x + 2| - 4$  à partir de celui de  $f(x) = |x|$ .

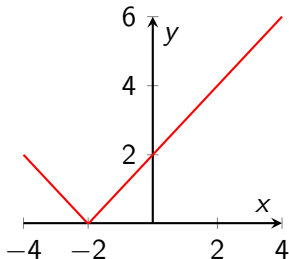
- On trace d'abord le graphe de la fonction  $f(x) = |x|$





Graphes de :  $y = |x + 2| - 4$  à partir de celui de  $f(x) = |x|$ .

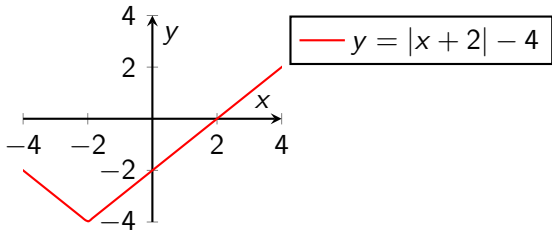
- ensuite, on le translate horizontalement de  $-2$ ,





Graphes de :  $y = |x + 2| - 4$  à partir de celui de  $f(x) = |x|$ .

- enfin, on le translate verticalement de  $-4$ ,





**Exercices suggérés** : Refaire **Exemple 36 (famille de fonctions)**, **Chapitre 4, Sous-section 4.1.1**, de votre manuel de cours.



### Définition 2.5

*Un point d'intersection de deux graphes est une paire de coordonnées  $(x, y)$  qui satisfait aux équations des deux graphes.*

Pour trouver le point d'intersection de deux graphes :

- On écrit les 02 équations de graphes sous la forme  $y = f(x)$
- On pose les deux expressions en  $x$  égales l'une à l'autre et on résout pour trouver  $x$
- On remplace les valeurs trouvées de  $x$  dans n'importe laquelle des deux équations pour trouver les valeurs de  $y$  correspondantes.



## Exemple 2.8

Trouvez les points d'intersection des graphes suivants :

$$y = f(x) = x^2 - 3 \text{ et } y = x - 1.$$

$$x^2 - 3 = x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\text{Factorisation} \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$$

Alors les abscisses des points d'intersection sont  $x = -1$  et  $x = 2$ .

- Pour  $x = -1$ ,  $y = (-1) - 1 = -2 \Rightarrow (-1, -2)$  est le premier point d'intersection des deux graphes
- Pour  $x = 2$ ,  $y = (2) - 1 = 1 \Rightarrow (2, 1)$  est le deuxième point d'intersection des deux graphes



### Définition 2.6

Le **seuil de rentabilité** est le nombre d'articles  $x$  à produire pour faire un profit nul, c'est-à-dire, le nombre d'articles à produire pour que le coût de production,  $C(x)$ , soit égal au revenu,  $R(x)$ .

En effet,  $P(x) = 0 \Rightarrow R(x) - C(x) = 0 \Rightarrow R(x) = C(x)$ .

### Définition 2.7

Le **prix d'équilibre** est le prix pour lequel la fonction demande et offre sont égales, c'est-à-dire,  $S(x) = p(x)$ .

Le **point d'équilibre** est le point  $(x_0, p(x_0))$  ou  $(x_0, S(x_0))$  telle que  $p(x_0) = S(x_0)$ .



On reprend l'exemple 3.4 et on suppose les questions a), b) c) résolues.

### Exemple 2.9 (Application en Économie)

*La fabrication de CDs nécessite un investissement initial de 1980\$ pour le temps en studio et ensuite 1.80\$ pour chaque CD. Nous vendons les CDs pour 9\$ chacun.*

- *Quel est le seuil de rentabilité ?*

**Exercice :** La fonction demande pour un produit est donnée par :

$$p(x) = \frac{8000}{x + 1000},$$

et la fonction offre pour le même produit est  $S(x) = 0.003x + 11$  où  $x$  est le nombre d'unités produits/vendus.

Trouvez le **prix d'équilibre** (le prix où le graphe de la fonction demande intersect le graphe de la fonction offre).



uOttawa

MAT1700  
X-ETE20

Les  
équations  
de droites

Droites  
parallèles et  
perpendicu-  
laires

Les  
Fonctions

Domaine de  
définition  
d'une  
fonction

Graphes de  
fonctions  
usuelles

Exercices  
suggérées

**Composition  
de fonctions**

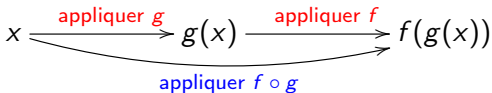
## Subsection 4

# Composition de fonctions



## Définition 2.8

Soient  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  deux fonctions. La **composition** de  $f$  et  $g$  est la fonction notée  $f \circ g : A \rightarrow C$  et définie par :

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)].$$


**Remarque 1** : Notez que  $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$  n'a de sens que lorsque  $\text{Im}_g \subset \text{Dom}_f$ .

**Remarque 2** : En général,  $f \circ g \neq g \circ f$ .



## Exemple 2.10

Si  $f(x) = \frac{1}{x}$  et  $g(x) = x^2 + 1$ , calculez  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

## Exemple 2.11

Le profit,  $P$ , pour la vente de  $x$  unités d'un produit est donné par  $P(x) = 6x - \sqrt{4x - 100} + 5000$ . On suppose que le nombre d'unités vendues,  $x$ , dépend du prix par unité,  $p(x)$ , c'est-à-dire,  $x(p) = 5000/p$ . Exprimez  $P$  en fonction de  $p$ .

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

May 19, 2020



# Table des matières I

MAT1700  
X-ETE20

- Fonctions inverses
- Limites

Fonctions  
inverses  
Limites



## Exemple 0.1

Si  $f(x) = \frac{1}{x}$  et  $g(x) = x^2 + 1$ , calculez  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

## Exemple 0.2

Le profit,  $P$ , pour la vente de  $x$  unités d'un produit est donné par  $P(x) = 6x - \sqrt{4x - 100} + 5000$ . On suppose que le nombre d'unités vendues,  $x$ , dépend du prix par unité,  $p(x)$ , c'est-à-dire,  $x(p) = 5000/p$ . Exprimez  $P$  en fonction de  $p$ .



## Fonctions injectives, surjectives et bijectives

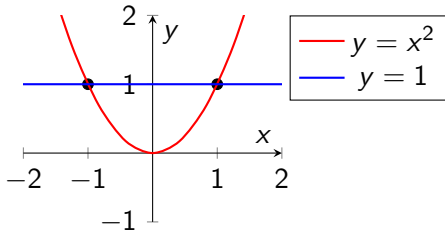
## Définition 0.1

Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction. On dit que  $f$  est **injective** si et seulement si tout élément de  $F$  possède **au plus** un antécédent dans  $E$ .

## Définition 0.2 (Test de la droite horizontale)

Une fonction est **injective** si et seulement si aucune droite horizontale ne coupe son graphe plus d'une fois.

**Exemple:** La fonction  $f(x) = x^2$  n'est pas injective sur  $\mathbb{R}$ .





### Définition 0.3

On dit que  $f$  est **surjective** si et seulement si tout élément de  $F$  possède **au moins** un antécédent dans  $E$ .

### Définition 0.4

On dit que  $f$  est **bijective** si  $f$  est à la fois **injective** et **surjective**, ce qui équivaut à dire que tout élément de  $F$  possède **exactement** un antécédent dans  $E$ .



## Subsection 1

# Fonctions inverses



## Définition 0.5

Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction bijective. On dit que  $f$  est *inversible* s'il existe une fonction notée  $f^{-1} : F \rightarrow E$ , appelée *fonction inverse de  $f$* , satisfaisant:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &= y, \text{ pour tout } y \in \text{Im}_f \text{ et} \\ f^{-1}(f(x)) &= x, \text{ pour tout } x \in \text{Dom}_f. \end{aligned}$$

## Exemple 0.3

- $f(x) = x^3$  et  $f^{-1}(x) = x^{1/3}$  sont inverses.
- $f(x) = e^x$  et  $f^{-1}(x) = \ln x$  sont inverses. De plus,  $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$ ,  $\ln e^x = x$  et  $e^{\ln x} = x$ .



## Exemple 0.4

- $f(x) = x^2$  n'a pas d'inverse mais  $f(x) = x^2, x \geq 0$  en a une donnée par  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ .

Pour que la fonction inverse  $f^{-1}$  existe il faut et il suffit que  $f$  soit injective.

De façon pratique, pour trouver  $f^{-1}$ , on résout l'équation  $f(y) = x$  en isolant  $y$ . Alors,  $y = f^{-1}(x)$ .



## Exemple 0.5

*Trouvez les fonctions inverses des fonctions suivantes:*

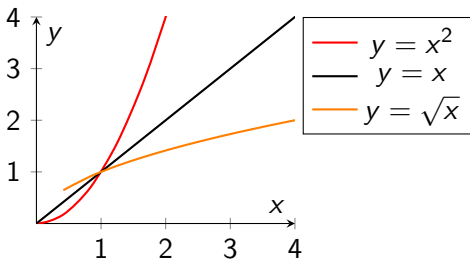
$$f(x) = \frac{x - 1}{2x + 7}; \quad g(x) = \sqrt{\frac{x}{1 - x}}.$$

Le graphe de la fonction inverse  $f^{-1}$  est la réflexion (symétrie orthogonale) du graphique de  $f$  par rapport à la droite  $y = x$ .



# Graphe de fonctions inverses

**Exemple:** La fonction  $f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  définie par  $f(x) = x^2$ , a pour fonction inverse,  $f^{-1} : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  définie par  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ .





## Subsection 2

### Limites



## Exemple 0.6 (Méthode numérique)

Soit la fonction  $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x-1} = \frac{|(x-1)(x+1)|}{x-1}$ . Alors

$$\text{Dom}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[.$$

Pour tout  $x \in \text{Dom}_f$ ,

$$\begin{aligned} \frac{|(x-1)(x+1)|}{x-1} &= \begin{cases} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} & \text{si } x^2 - 1 \geq 0 \\ -\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right) & \text{si } x^2 - 1 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[ \\ -(x+1) & \text{si } x \in ]-1, 1[ \end{cases} \end{aligned}$$



## Exemple 0.7 (Méthode numérique)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{|(x-1)(x+1)|}{x-1} \\ &= \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in ]-\infty, -1] \cup ]1, +\infty[ \\ -(x+1) & \text{si } x \in [-1, 1[ \end{cases} \end{aligned}$$

On aimerait connaître les valeurs de la fonction  $f$  quand:

- $x$  s'approche très près de la valeur 1 du côté gauche ( $x < 1$ ),
- $x$  s'approche très près de la valeur 1 du côté droit ( $x > 1$ ).



Le tableau suivant résume les résultats possibles:

$x$	$f(x)$
0.99	-1.99
0.999	-1.999
0.9999	-1.9999
1	non définie
1.01	2.01
1.001	2.001
1.0001	2.0001



## Définition 0.6

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a$ , sauf peut-être en  $a$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que la limite de  $f$ , lorsque  $x$  tend vers  $a$  à droite, est égale à  $\ell$  et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$$

si quelle que soit la manière dont  $x$  s'approche de  $a$  tout en étant plus grand que  $a$  ( $x > a$ ),  $f(x)$  devient aussi proche de  $\ell$ .



## Définition 0.7

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a$ , sauf peut-être en  $a$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que la limite de  $f$ , lorsque  $x$  tend vers  $a$  à gauche, est égale à  $\ell$  et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$$

si quelle que soit la manière dont  $x$  s'approche de  $a$  tout en étant plus petit que  $a$  ( $x < a$ ),  $f(x)$  devient aussi proche de  $\ell$ .



## Exemple 0.8

Pour la fonction de l'introduction,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \in ] - \infty, -1] \cup ]1, +\infty[, \\ -(x + 1) & \text{si } x \in [-1, 1[, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2.$$



Lorsqu'on cherche  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  la valeur de  $f(a)$  n'est pas importante. De plus, elle n'a même pas besoin d'exister! En effet,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  et  $f(a)$  peuvent toutes deux exister mais être différentes!

## Exemple 0.9

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1, \\ x + 1 & \text{si } x \in ]-\infty, -1] \cup ]1, +\infty[, \\ -(x + 1) & \text{si } x \in [-1, 1[, \end{cases}$$



## Définition 0.8

Si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  existent et possèdent la même valeur (disons  $l$ ), alors on dit que la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  approche  $a$  existe et est égale à  $l$ . On note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l.$$

En d'autres termes,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l.$$



Si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  existent toutes les deux mais ne sont pas égales, alors la limite de  $f$  en  $a$  n'existe pas.

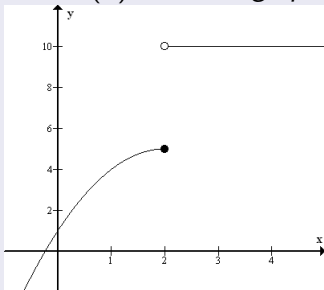
### Exemple 0.10

Démontrez que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|3x|}{x}$  n'existe pas.



## Exemple 0.11

Supposons  $f(x)$  admet le graphe suivant :



- $f(2) = 5$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 10$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$ .

*Alors  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  n'existe pas.*



Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$ . Soit  $c \in \mathbb{R}$ . Alors,

- $\lim_{x \rightarrow a} (c) = c,$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \pm l',$
- $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha l, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = ll',$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{l}{l'},$  si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (l)^n; \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l},$  si  $l > 0$



- Si  $f(x)$  est une fonction polynômiale, alors pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

### Exemple 0.12

Évaluez les limites:  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^3 - 5x^2 + 2)$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x - 5}{3 - x}$ .



Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions. On veut calculer  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , c'-à-d,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ , c'est une **forme indéterminée (FI)**. Pour lever l'indétermination,
  - Factoriser, simplifier, ou rationaliser la fonction avant d'évaluer la limite
  - Éliminer la valeur absolue s'il y en a une et trouver la limite à gauche et à droite.
- Par ailleurs, si  $f(x)$  est définie par morceaux avec  $x = a$  un point de séparation, on calcule la limite à gauche et à droite de  $a$ .



## Exemple 0.13

Trouvez la limite (si elle existe) de:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x+2|}{x+2}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x-3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{|x-3|}.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad \text{où} \quad f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 3, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



## Exemple 0.14

Soit la fonction  $f(x) = \frac{2}{x-1}$ . Évaluer  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ , par la méthode numérique. Que constatez-vous?

$x$	$x - 1$	$f(x)$
0.99	-0.1	-100
0.999	-0.001	-1000
0.9999	-0.0001	-10000
1	0	non définie
1.01	0.01	100
1.001	0.001	1000
1.0001	0.0001	10000



## Exemple 0.15

Soit la fonction  $f(x) = \frac{2}{x-1}$ .

Evaluer  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ , par la méthode numérique.

Que constatez-vous?

- On constate que les valeurs de  $f(x)$  deviennent arbitrairement grandes (resp. petites) lorsque  $x \rightarrow 1^+$  (resp.  $x \rightarrow 1^-$ ). De plus, lorsque  $x \rightarrow 1^-$ ,  $x-1 \rightarrow 0^-$ , et lorsque  $x \rightarrow 1^+$ ,  $x-1 \rightarrow 0^+$ . On écrit:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$



Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions. On veut calculer  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$ ,  $k \neq 0$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , c'-à-d,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{k}{0} = \infty, \quad \text{alors il faut :}$$

- Calculer la limite à gauche et à droite de  $a$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty.$$

En principe, ces limites n'existent pas parce que  $\pm\infty$  ne sont pas des nombres réels; mais elles disent que les valeurs de  $f(x)$  peuvent devenir arbitrairement grandes (ou petites) lorsque  $x$  approche  $a$ .



Soit  $k \in \mathbb{R}$ .

- Si  $k < 0$ , alors  $\frac{k}{0^+} = -\infty$  et  $\frac{k}{0^-} = +\infty$ .
- Si  $k > 0$ , alors  $\frac{k}{0^+} = +\infty$  et  $\frac{k}{0^-} = -\infty$ .

### Exemple 0.16

Calculer les limites:  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 1}{x + 2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x - 2}$



- Lorsque  $x$  devient arbitrairement grand, la valeur (si elle existe) vers laquelle  $f(x)$  approche est notée

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

- Lorsque  $x$  devient arbitrairement petit, la valeur (si elle existe) vers laquelle  $f(x)$  approche est notée

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$



## Bon à savoir

Soit  $k \in \mathbb{R}$ .

- $\frac{k}{\pm\infty} = 0$ .
- $(k)(+\infty) = +\infty$  si  $k > 0$ ;  $(k)(+\infty) = -\infty$  si  $k < 0$ .
- $(k)(-\infty) = -\infty$  si  $k > 0$ ;  $(k)(-\infty) = +\infty$  si  $k < 0$ .



## Limites à l'infini des fonctions polynômiales

- Si  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ , alors pour trouver la limite  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ , on **factorise** par le terme de degré élevé.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left( a_n + \dots + \frac{a_1 x}{x^n} + \frac{a_0}{x^n} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left( a_n + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n,\end{aligned}$$

Conclusion:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$ .



## Exemple 0.17

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 - x^2 + 2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( 5 - \frac{x^2}{x^3} + \frac{2}{x^3} \right) \\ &= \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \right] \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 5 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} \right) \right] \\ &= (+\infty)(5) = +\infty.\end{aligned}$$

Remarque: On aurait pu faire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 - x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 = (5)(+\infty) = +\infty.$$



- Si  $f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$ , alors pour trouver la limite  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ , on **factorise** le numérateur et le dénominateur par les termes de degrés élevés. Ceci nous évite d'avoir une **forme indéterminée**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n \left( a_n + \dots + \frac{a_1 x}{x^n} + \frac{a_0}{x^n} \right)}{x^m \left( b_m + \dots + \frac{b_1 x}{x^m} + \frac{b_0}{x^m} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}, \end{aligned}$$

Conclusion:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$



## Exemple 0.18

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(-2 + \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2})}{x^2(3 + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0 \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 + 0 + 0}{3 + 0 - 0} = \frac{-2}{3} = \frac{-2}{3}
 \end{aligned}$$

Remarque: On aurait pu faire

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{3x^2} = \frac{-2}{3} \text{ (après simplification.)}$$



## Quelques astuces

Si  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$ , où  $a_n \neq 0$ ,  $a_m \neq 0$ ,  
c'-à-d,  $p$  et  $q$  sont deux polynômes de degrés  $n$  et  $m$  resp.

- Si  $n < m$ , alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$
- Si  $n = m$ , alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n}{b_m}$
- Si  $n > m$ , alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \infty$



## Exemple 0.19

Trouvez les limites suivantes si elles existent:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2x + 2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\pm\infty} \frac{1}{-x - 2};$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x + 3}{3x^2 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 3}{3x^2 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 + 3}{3x^2 + 1}$$



## Définition 0.9

Soient  $f$  une fonction et  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- 1 La droite  $x = a$ , est une **asymptôte verticale** de la courbe de  $f$  si  $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ .
- 2 La droite  $y = b$ , est une **asymptôte horizontale** de la courbe de  $f$  si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ .

Pour déterminer les asymptôtes à la courbe d'une fonction  $f$ ,

- On détermine son domaine de définition,  $\text{Dom}_f$ , puis on calcule les limites aux bornes de ce domaine de définition.



## Exemple 0.20

*Déterminer les éventuelles asymptotes verticales et horizontales des fonctions suivantes:*

①  $\frac{x}{x+1}; \quad \frac{2}{-x-2}; \quad \frac{-2x+3}{3x^2+1}$

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

May 19, 2020



MAT1700  
X-ETE20

Les  
fonctions  
exponen-  
tielles et  
logarith-  
miques  
revisitées

Les fonctions  
continues

Taux de  
variation  
moyen - Taux  
de variation  
instantané

- 1 Les fonctions exponentielles et logarithmiques revisitées
  - Les fonctions continues
  - Taux de variation moyen - Taux de variation instantané



## Section 1

# Les fonctions exponentielles et logarithmiques revisitées



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ;$$

Le nombre  $e$  est défini comme suit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{1/z}.$$



## Intérêts composés

Soient

- $P$  = dépôt initial (ou *principal*),
- $r$  = taux d'intérêt, exprimé en décimal,
- $n$  = nombre de fois que l'intérêt est composé par année,
- $t$  = nombre d'années

Alors la valeur capitalisée  $A(t)$  d'un placement  $P$  dont l'intérêt est composé  $n$  fois par année pendant  $t$  années à un taux  $r$  est donnée par

$$A(t) = P \left[ 1 + \frac{r}{n} \right]^{nt}$$



## Problème

Une somme  $P$  est placée dans un compte en banque à un taux d'intérêt de  $r$  ( $r\%$ ). On suppose que le client ne dépense pas l'intérêt reçu. Déterminer le solde du compte à la fin de l'année si l'intérêt est composé annuellement, deux fois par année, trois fois par année, et de manière générale lorsque l'intérêt est composé  $n$  fois par année.

## Solution :

- 1 Composé annuellement, l'intérêt produit après 12 mois est  $rP \rightarrow$  solde est  $P + rP = P(1 + r)$ .
- 2 Composé deux fois par an, le taux d'intérêt est  $\frac{r}{2}$ . Solde après première année est  $P + \frac{r}{2}P = P(1 + \frac{r}{2})$  et cela reçoit un intérêt de  $\frac{r}{2}P(1 + \frac{r}{2}) \rightarrow$  solde est  $P(1 + \frac{r}{2}) + \frac{r}{2}P(1 + \frac{r}{2}) = P(1 + \frac{r}{2})^2$ .
- 3 Intérêt est composé  $n$  fois par année: taux de  $\frac{r}{n}$  à chaque tranche de  $\frac{12}{n}$  mois et le solde est  $P(1 + \frac{r}{n})^n$ .



## Exemple 1.1

*Supposez qu'on commence avec un dépôt initial de 2500 \$ avec un taux d'intérêt annuel de 5 %. Combien aurons nous après 20 ans si nous composons l'intérêt annuellement ? Chaque 6 mois ? Chaque 3 mois ? Chaque mois ? Chaque jour ?*

**Solution :** Les "n"s pour chaque cas ci-dessus sont  $n = 1, 2, 4, 12, 365$ . Alors, les solutions peuvent être insérées dans le tableau suivant

$n$	$A(t)$
1	$2500(1 + 0.05)^{20} \approx 6633.24$
2	$2500 \left(1 + \frac{.05}{2}\right)^{40}$
4	$2500 \left(1 + \frac{.05}{4}\right)^{80}$
12	$2500 \left(1 + \frac{.05}{12}\right)^{240}$
365	$2500 \left(1 + \frac{.05}{365}\right)^{7300}$



## Intérêt composé continuellement

Ce processus de composition à plusieurs reprises admet une limite comme  $n \rightarrow \infty$ . Ceci est appelé **l'intérêt composé continuellement**. En général, nous avons que si  $P$  est le montant initial et  $r$  est le taux d'intérêt, alors lorsque l'intérêt est composé continuellement

$$A(t) = Pe^{rt}$$



## Récap - Formules

Si

- $P$  = dépôt initial (or *principal*),
- $r$  = taux d'intérêt, exprimé en décimal,
- $n$  = nombre de fois que l'intérêt est composé par année,
- $t$  = nombre d'années
- $A$  = balance après  $t$  années

① Si l'intérêt est composé  **$n$  fois par année** :

$$A(t) = P \left[ 1 + \frac{r}{n} \right]^{nt}$$

② Si l'intérêt est composé **continuellement** :  $A(t) = Pe^{rt}$



### Exemple 1.2

*Un dépôt de 1000 \$ est fait dans un compte qui rapporte de l'intérêt à un taux de 5 % par année. Trouvez la balance dans 2 ans si l'intérêt est composé:*

- 1 *annuellement?*
- 2 *continuellement?*

### Solution :

- 1 On utilise la formule

$$A(t) = P \left[ 1 + \frac{r}{n} \right]^{nt} = 1000 \left[ 1 + \frac{0.05}{1} \right]^{1 \times 2}$$

- 2 On utilise la formule  $A(t) = Pe^{rt} = 1000e^{(0.05) \cdot 2}$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$



## L'intérêt composé revisité

## Exemple 1.3

*Un dépôt de 1000 \$ est fait dans un compte qui rapporte de l'intérêt à un taux de 5 % par année. Dans combien de temps est-ce que la balance sera le double du dépôt initial si l'intérêt est composé annuellement ?*

**Solution :** Appliquons la formule  $A(t) = P \left[ 1 + \frac{r}{n} \right]^{nt}$ . Notre balance après  $t$  années est

$$A(t) = 1000 \left( 1 + \frac{.05}{1} \right)^t = 1000(1.05)^t$$

**Exemple 1.4**

*Même question, mais maintenant l'intérêt est composé 10 fois par année.*

**Solution :** Par notre formule,

$$A(t) = 1000 \left( 1 + \frac{.05}{10} \right)^{10t} = 1000(1.005)^{10t}$$

Encore, on résout  $A(t) = 2000$ .



### Exemple 1.5

*Même question, mais maintenant l'intérêt est composé continuellement.*

**Solution :** On utilise la formule,  $A(t) = 1000e^{0.05t}$ , et on résout  $A(t) = 2000$ . Notez que l'intérêt qui est composé continuellement nous donne une sorte de "meilleur scénario".



Dans la résolution des équations exponentielles et logarithmiques, on utilise les propriétés de ces fonctions. Notez que si l'expression donnée contient plusieurs termes en  $e$ ,  $\log$  ou  $\ln$ , on doit la simplifier (réduire) avant d'appliquer la fonction inverse.

## Exemple 1.6

*Résoudre les équations suivantes:*

$$a) e^{3x} = 2$$

$$b) -e^x + e^{-2x} = 0$$

$$c) 4 + 5 \ln x = 19$$

$$d) 4 \ln 2 + 2 \ln x - \frac{1}{2} \ln 16 = 2$$



### Exemple 1.7

*Résoudre l'équation suivante:  $\ln(2x - 1) + 2 \ln(x) = 0$*

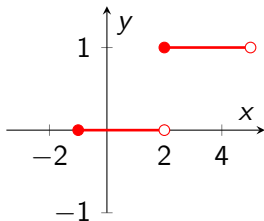
### Exemple 1.8

*On investit une somme d'argent à un taux de 2 % composé aux 6 mois. Trouvez le temps nécessaire pour tripler cet investissement initial (quelque soit la somme initiale investie).*



## Subsection 1

# Les fonctions continues



Le graphe ci-dessus n'est pas celui d'une fonction continue, car il présente un saut au niveau du point  $x = 2$ .

De façon intuitive, le graphe d'une fonction **continue** n'a aucun trou, saut ou écart. Il peut être "dessiné sans lever le crayon".

**Ceci n'est qu'une intuition et non une définition.**

**Définition 1.1 (Continuité d'une fonction en un point)**

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est **continue** au point  $x = a$ , si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Il résulte de cette définition trois conditions pour que  $f$  soit continue en  $a$ :

- $f(a)$  est définie, c'est-à-dire,  $a$  appartient au domaine de  $f$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe, c'est-à-dire,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**Définition 1.2 (Continuité sur un intervalle)**

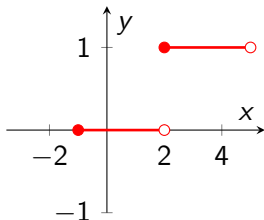
Une fonction  $f$  est **continue** sur un intervalle ouvert  $]a, b[$  si elle est continue à chaque point de l'intervalle  $]a, b[$ .

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $]a, b[$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors,

- $f \pm g$ ,  $\alpha f$ ,  $fg$  sont continues sur  $]a, b[$ ,
- $f/g$  est continue, si  $g \neq 0$  sur  $]a, b[$ .

Si une fonction est continue sur  $\mathbb{R}$ , alors on dit tout simplement qu'elle est continue.

On dit que  $f$  est **discontinue** au point  $x = a$  si  $f$  n'est pas continue au point  $x = a$ .



- $f(2) = 1$  est définie
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  n'existe pas, car
 
$$0 = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

## Exemple 1.9

Déterminer si la fonction suivante est continue en  $x = a$ .

$$a = -1, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} + 2 & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } x > -1 \\ 6 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$



## Continuité des fonctions usuelles

Les fonctions **polynômiales, rationnelles, racines n-ièmes, valeurs absolues, exponentielles, logarithmes** sont toutes continues sur leur ensemble de définition.

## Exemple 1.10

- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$  est continue sur  $\text{Dom}_f = \mathbb{R}$ .
- $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  est continue sur  $\text{Dom}_f = ] - \infty, 1[ \cup ] 1, +\infty[$ .
- $f(x) = \sqrt{x - 2}$  est continue sur  $\text{Dom}_f = [2, +\infty[$ .
- $f(x) = \ln(x + 2)$  est continue sur  $\text{Dom}_f = ] - 2, +\infty[$ .



## Exemple 1.11

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour quelle valeur de  $\alpha$ , la fonction  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$ ?

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{si } x \leq 3 \\ \alpha x - 8, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

## Exemple 1.12

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour quelle(s) valeur(s) de  $\alpha$ , la fonction  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$ ?

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x, & \text{si } x \geq 1 \\ x + \alpha^2 - 1, & \text{si } x < 1 \end{cases}$$



## Subsection 2

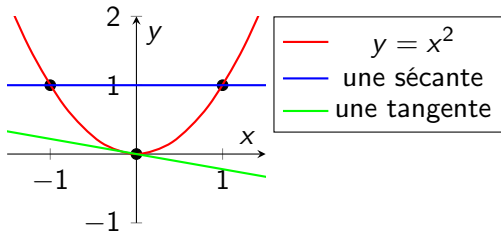
# Taux de variation moyen - Taux de variation instantané



## Définition 1.3

*Une sécante à une courbe est une droite qui relie au moins deux points de cette courbe.*

De façon informelle, la tangente à une courbe en l'un de ses points est une droite qui « touche » la courbe au plus près « au voisinage » de ce point.





Soit  $f$  une fonction d'équation  $y = f(x)$ . Lorsque que  $x$  varie d'un point  $x_1 = a$  à un point  $x_2 = a + h$ , où  $h$  est petit et non-nul.

- Le **taux de variation moyen (TVM)** de  $y$  par rapport à  $x$  sur l'intervalle  $I = [x_1, x_2] = [a, a + h]$  est défini par:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Le **taux de variation moyen** est la **pen**te de la sécante reliant les points  $P(a, f(a))$  et  $Q(a + h, f(a + h))$  sur le graphe de  $f$ .



# Taux de variation instantané

- Le **taux de variation instantané (TVI)** de  $y$  par rapport à  $x$  lorsque  $x = a$  est défini par:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Le **taux de variation instantané** est la  **pente**  de la droite tangente à la courbe  $y = f(x)$  au point  $P(a, f(a))$ .

Le TVM est un taux de variation d'une fonction sur un **intervalle**, tandis que le TVI est un taux de variation d'une fonction en un **point précis**.

**Exemple 1.13**

*Calculer le taux de variation moyen de  $f$  sur l'intervalle  $[1, 2]$ , puis le taux de variation instantané de  $f$  en  $x = 2$ :*

a)  $f(x) = x^2$

b)  $f(x) = x^3$

c)  $f(x) = \sqrt{x}$

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

May 21, 2020



## 1 Les dérivées



uOttawa

MAT1700  
X-ETE20

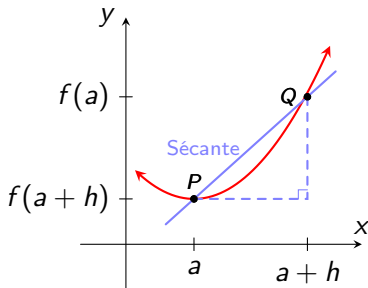
Les  
dérivées

## Section 1

# Les dérivées

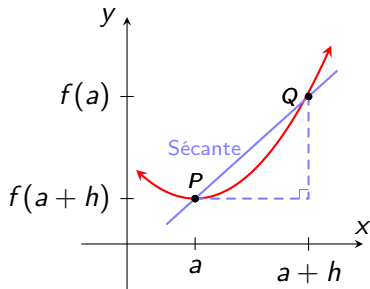
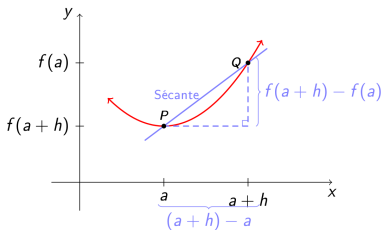


Étant donné le graphe d'une fonction,  $f$ , On veut être en mesure de calculer **la pente des droites tangentes** à ce graphe. La pente de la droite tangente en un point du graphe nous renseigne sur la vitesse avec laquelle la fonction croît ou décroît.





L'idée est d'approximer la **droite tangente** en utilisant des **droites sécantes**: la  **pente de la droite tangente** sera la limite des  **pentes des sécantes**, si elle existe.



Alors la **dérivée** de  $f$  en  $a$  est:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \text{TVI en } a.$$



## Définition 1.1

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ . La **dérivée** de  $f$  en  $a$ , notée  $f'(a)$ , est définie par:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad \text{si cette limite existe.}$$

En posant  $x = a + h$ , dans cette définition, alors  $h = x - a$ . On obtient une définition équivalente de la **dérivée** de  $f$  en  $a$  :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$



- Si  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  existe, alors on dit que  $f$  est **dérivable** (ou **différentiable**) en  $a$ .
- On dit que  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  si  $f$  est dérivable en tout point  $x$  de  $I$ . La fonction  $f' : x \rightarrow f'(x)$  est appelée la fonction dérivée de  $f$ .

Si  $y = f(x)$ , alors l'une des notations ci-dessous peut être utilisée pour désigner la dérivée de  $f$ :

$$f'(x), \frac{df}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, y', \frac{dy}{dx}.$$



En général, la **dérivée** de  $f$  par rapport à  $x$  est définie par:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \text{si cette limite existe.}$$

### Exemple 1.1

**Calculer les dérivées des fonctions suivantes:**

a)  $f(x) = x^2$  en  $x = -2$       b)  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $x = 2$

c)  $f(x) = x^3$  en  $x = -1$       d)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ , en  $x$

**Astuce:** Pour calculer  $f'(a)$ , il suffit de calculer  $f'(x)$ , puis remplacer  $x$  par  $a$  dans  $f'(x)$ .



## Interprétation de la dérivée

- $f'(a)$  est le **taux de variation instantané** de  $f$  en  $a$ .  
Par conséquent,  $f'(a)$  est la **pen**te de la droite tangente à la courbe de  $f$  au point  $(a, f(a))$ .
- Le réel  $f'(a)$  est appelé: **nombre dérivé** de  $f$  en  $x = a$ .
- Si  $f'(a) = 0$ , alors la tangente à la courbe de  $f$  en  $x = a$  est **horizontale**. Si  $f'(a) = \pm\infty$ , alors la tangente est **verticale**.



Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$ . Alors l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point  $(a, f(a))$  est donnée par:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

### Exemple 1.2

*En utilisant vos réponses précédentes, déterminer l'équation de la tangente à chacune des courbes aux points indiqués.*

a)  $f(x) = x^2$  en  $x = -2$       b)  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $x = 2$

c)  $f(x) = x^3$  en  $x = -1$       d)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ , en  $x$



**Remarque:** La dérivée d'une fonction est encore une autre fonction

**Question:** La dérivée d'une fonction continue est-elle aussi une fonction continue? **pas nécessairement.**

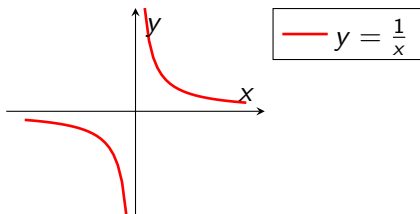
Par exemple, la fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

Sa dérivée est  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  n'est pas continue en  $x = 0$ , puisque  $f'(0)$  n'existe pas.



- Si  $f$  n'est pas continue en  $x = a$ , alors  $f$  n'est pas dérivable en  $x = a$ . D'une manière équivalente, si  $f$  est dérivable en  $x = a$ , alors  $f$  est continue en  $x = a$ . Alors la différentiabilité implique la continuité (mais pas l'inverse)!

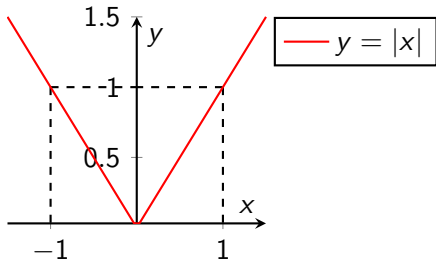
e.g: La fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$  n'est pas continue en  $x = 0$ , alors il n'existe pas de dérivée pour cette fonction en  $x = 0$ .





- Si le graphe de  $f(x)$  possède un “coin” en un point, la dérivée n'existe pas à ce point.

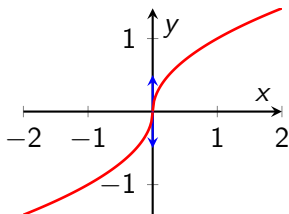
e.g: Il n'existe pas de dérivée pour  $f(x) = |x|$  en  $x = 0$ .





- Si le graphe de  $f(x)$  admet une droite tangente verticale en un point, la dérivée n'existe pas à ce point.

**e.g:** Cette courbe admet une tangente verticale en  $x = 0$ , alors il n'existe pas de dérivée en  $x = 0$ .





**Idée:** avoir “une boîte à outils” pour pouvoir calculer les dérivées sans passer par la limite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

- ① **Dérivée d'une constante :**

$$\frac{d}{dx}[c] = 0 \quad \text{pour toute constante } c.$$

- ② **Dérivée d'une puissance :** Soit  $n$  un nombre réel quelconque,

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

- ③ **Dérivée d'un multiple d'une fonction :**

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c \frac{d}{dx}[f(x)]$$



- ④ **Dérivée d'une somme:**

$$\frac{d}{dx} (f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

- ⑤ **Dérivée d'une différence de fonctions :**

$$\frac{d}{dx} (f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

### Exemple 1.3

Calculer la dérivée de  $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [2x^3 - 4x + 1] &= \frac{d}{dx} [2x^3] + \frac{d}{dx} [-4x] + \frac{d}{dx} [1] \\ &= 2 \frac{d}{dx} [x^3] - 4 \frac{d}{dx} [x] + \frac{d}{dx} [1] \\ &= 2[3x^{3-1}] - 4[(1)x^{1-1}] - [0] \\ &= 6x^2 - 4 \end{aligned}$$



## Exemple 1.4

Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

a)  $f(t) = \sqrt{t}$

b)  $f(x) = \frac{4}{x^3}$

c)  $f(x) = \frac{x^5 + 4\sqrt{x} + \frac{2}{x}}{x^2}$

d)  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$



## Dérivée de l'exponentielle et du logarithmes

- Soit  $f(x) = e^x$  la fonction exponentielle naturelle. Alors

$$[e^x]' = e^x.$$

- Soit  $f(x) = \ln x$  la fonction logarithme népérien. Alors

$$[\ln x]' = \frac{1}{x}.$$



## Dérivées des produits et des quotients

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables. On suppose  $g \neq 0$ . Alors

5 **Loi du produit:**

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

6 **Loi du quotient:**

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$$



## Dérivées des produits et des quotients

Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

$$\text{a) } f(x) = -2x^{\frac{7}{3}}(1 - 2x^4) \qquad \text{b) } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}.$$

Trouvez l'équation de la droite tangente à la courbe de la fonction suivante en  $x = 1$ :  $f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 1}$ .



## Dérivées des fonctions composées.

**Rappel:** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions. La **composée** de  $f$  et  $g$  notée,  $f \circ g$ , est définie par:  $h(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)]$ .

Si  $f$  et  $g$  sont dérivables, alors  $f \circ g$  est dérivable et sa dérivée est:

$$[h(x)]' = [(f \circ g)(x)]' = [f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

## Exemple 1.5

Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

a)  $h(x) = (2x^3 + 1)^8$

b)  $h(x) = \sqrt{2x + 3}$ .



## Dérivée de la fonction puissance généralisée

Si  $f$  est une fonction dérivable et  $a > 1$ , alors

$$[f(x)^n]' = nf'(x)[f(x)]^{n-1}, \quad (n \in \mathbb{R}) ; \quad \left[\sqrt{f(x)}\right]' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

## Exemple 1.6

Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

a)  $f(x) = (2x^3 + 1)^8$

b)  $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$ .



## Dérivée de la fonction exponentielle généralisée

Si  $f$  est une fonction dérivable et  $a > 1$ , alors

$$\left[ a^{f(x)} \right]' = (\ln a) f'(x) a^{f(x)} ; \quad \left[ e^{f(x)} \right]' = f'(x) e^{f(x)}$$

## Exemple 1.7

Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

a)  $f(z) = (e^{-5z})^3$

b)  $f(x) = e^{2x^2+1}$

c)  $f(x) = 3^x$

d)  $f(x) = 3^{2x^2+1}$ .



## Dérivée de la fonction logarithme généralisée

Si  $f$  est une fonction dérivable et  $a > 1$ , alors

$$[\log_a f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a} ; \quad [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

## Exemple 1.8

Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

a)  $f(t) = \ln(2t^2 + 1)$

b)  $f(x) = \ln(\sqrt{x+1})$

c)  $f(x) = \log_3(x^2 + 7)$

d)  $f(x) = \log_5(x^3 + 7)$ .

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

May 26, 2020



Si  $f$  est une fonction **inversible** dérivable, alors son inverse  $f^{-1}$  l'est aussi, de dérivée:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

### Exemple 0.1

Calculer la dérivée de *l'inverse* des fonctions suivantes:

a)  $f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  où  $f(x) = x^2$

b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  où  $f(x) = 3x + 4$

c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  où  $f(x) = \frac{4x - 2}{3x + 1}$ .



## Dérivée d'ordre deux

La **deuxième dérivée**, ou simplement la **dérivée seconde** de  $f(x)$ , notée  $f''(x)$ , si elle existe, est:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)].$$

La **troisième dérivée** est:

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}[f''(x)].$$

## Exemple 0.2

*Calculer la dérivée seconde,  $f''(x)$ , étant donné*

$$f(x) = (x^3 + 1)(2x^9 + 5).$$



## Interprétation de la deuxième dérivée

Une interprétation de la deuxième dérivée qui est souvent discutée est celle de **l'accélération**.

Si  $f(t)$  mesure la distance parcourue par un objet (ou la hauteur (position) d'un projectile au-dessus du sol) au temps  $t$ , alors la dérivée de  $f$ ,  $f'(t)$ , mesure sa **vitesse (ou vélocité)**, et la dérivée seconde,  $f''(t)$ , mesure son **accélération**.

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\text{variation de la distance}}{\text{variation du temps}} = \text{vitesse}$$

$$\frac{\Delta f'}{\Delta t} = \frac{\text{variation de la vitesse}}{\text{variation du temps}} = \text{accélération}$$

**Exemple 0.3 (Interprétation de la deuxième dérivée)**

*Un astronaute debout sur la surface de la lune lance une balle dans l'air. La hauteur de la balle (en mètres) est donnée par*

$$h(t) = -16t^2 + 40t + 50.$$

*Décrivez la position, la vitesse et l'accélération de cette balle après 2 secondes.*

**Définition 0.1 (Dérivée d'ordre  $n$  ou dérivée  $n$ -ième )**

La dérivée  $n$ -ième, notée  $f^{(n)}(x)$ , d'une fonction  $f$  est la fonction obtenue après une succession de  $n$ -dérivées de  $f$ . Par exemple,  $f^{(4)}(x) \equiv$  quatrième dérivée de  $f$ ,  $f^{(5)}(x) \equiv$  cinquième dérivée de  $f$  etc.

**Exemple 0.4**

Calculer la dérivée quatrième,  $f^{(4)}(x)$ , étant donné

$$f(x) = 2x^5 + 3x^2 + 2.$$



### motivation

Dans certains problèmes, les variables considérées changent par rapport au temps. Par exemple:

- le rayon d'un ballon sphérique qui change avec le changement du volume d'air dans le ballon.
- le changement du niveau de l'eau dans une piscine avec le changement du volume d'eau pompée.

Si ces variables sont reliées les unes aux autres d'une certaine façon, leurs taux de variations seront aussi liés.



Considérons la situation où  $y$  est une fonction par rapport à  $u$ :  $y = f(u)$ , et  $u$  est une fonction par rapport à  $x$ :  $u = g(x)$ . Alors, indirectement,  $y$  est une fonction par rapport à  $x$ , car  $y = f(u) = f(g(x)) = f \circ g(x)$ .

Par la dérivée en chaîne,  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ .



## Procédure pour résoudre les problèmes de taux liés

- 1 Identifier toutes les quantités **données** et toutes les quantités qu'il faut **déterminer**. Si possible, faire un schéma représentatif en indiquant les quantités et leur assignant des variables.
- 2 Ecrire une équation qui relie les toutes les quantités dont les taux de variation sont connus ou à déterminer.
- 3 Utiliser la dérivée en chaîne pour dériver les deux côtés de l'égalité par rapport au temps.
- 4 Substituer dans l'équation les valeurs données des variables ou des taux de variation. Ensuite résoudre pour les quantités demandées.



## Exemple 0.5

*Un ballon sphérique est gonflé au taux de 2 centimètres cube par seconde. Trouvez le taux de changement du rayon du ballon lorsque le rayon est 10 centimètres.*

**Solution:** À partir de l'information à propos du *volume*, qui varie avec le temps, nous voulons déterminer la variation du *rayon*.

Ceux-ci sont liés par:  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ .

- $V$  et  $r$  varient tous les deux avec le temps, ainsi nous avons:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt}$$

- On sait que  $\frac{dV}{dt} = 2$ , et on peut calculer  $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$ .
- Ainsi nous pouvons remplacer les quantités par leurs valeurs et expressions:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} \Rightarrow 2 = (4\pi r^2) \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{2}{4\pi r^2} = \frac{1}{2\pi r^2}$$



### Exemple 0.6

*Une échelle de longueur 10m, au temps  $t = 0$  est à la position verticale. L'extrémité basse de l'échelle se déplace horizontalement avec une vitesse 3m/sec alors que l'autre extrémité se déplace verticalement (contre un mur vertical). A quelle vitesse se déplace l'extrémité verticale quand l'extrémité basse est déplacée de 8m de sa position d'origine?*

### Exemple 0.7

*Le profit  $P$  fait sur  $x$  joueurs qui jouent à un jeu d'ordinateur en ligne est donné par:  $P = -0.0003x^2 + 15x - 100000$ . S'il y a 30 joueurs qui abandonnent le jeu par jour, calculez le taux de variation du profit par rapport au temps,  $t$ , en jours lorsqu'il y a 200000 joueurs.*

**Exemple 0.8**

*Le rayon  $r$  de la base d'un cône droit à base circulaire croît à un taux de 2 cm par minute. La hauteur du cône  $h$  est liée au rayon par l'expression suivante:  $h = 3r$ . Trouvez le taux de variation du volume quand le rayon  $r = 6$  cm.*

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

May 28, 2020



Si  $f$  est une fonction **inversible** dérivable, alors son inverse  $f^{-1}$  l'est aussi, de dérivée:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

### Exemple 0.1

Calculer la dérivée de *l'inverse* des fonctions suivantes:

a)  $f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  où  $f(x) = x^2$

b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  où  $f(x) = 3x + 4$

c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  où  $f(x) = \frac{4x - 2}{3x + 1}$ .



## Dérivée d'ordre deux

La **deuxième dérivée**, ou simplement la **dérivée seconde** de  $f(x)$ , notée  $f''(x)$ , si elle existe, est:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)].$$

La **troisième dérivée** est:

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}[f''(x)].$$

## Exemple 0.2

*Calculer la dérivée seconde,  $f''(x)$ , étant donné*

$$f(x) = (x^3 + 1)(2x^9 + 5).$$



## Interprétation de la deuxième dérivée

Une interprétation de la deuxième dérivée qui est souvent discutée est celle de **l'accélération**.

Si  $f(t)$  mesure la distance parcourue par un objet (ou la hauteur (position) d'un projectile au-dessus du sol) au temps  $t$ , alors la dérivée de  $f$ ,  $f'(t)$ , mesure sa **vitesse (ou vélocité)**, et la dérivée seconde,  $f''(t)$ , mesure son **accélération**.

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\text{variation de la distance}}{\text{variation du temps}} = \text{vitesse}$$

$$\frac{\Delta f'}{\Delta t} = \frac{\text{variation de la vitesse}}{\text{variation du temps}} = \text{accélération}$$

**Exemple 0.3 (Interprétation de la deuxième dérivée)**

*Un astronaute debout sur la surface de la lune lance une balle dans l'air. La hauteur de la balle (en mètres) est donnée par*

$$h(t) = -16t^2 + 40t + 50.$$

*Décrivez la position, la vitesse et l'accélération de cette balle après 2 secondes.*

**Définition 0.1 (Dérivée d'ordre  $n$  ou dérivée  $n$ -ième )**

*La dérivée  $n$ -ième, notée  $f^{(n)}(x)$ , d'une fonction  $f$  est la fonction obtenue après une succession de  $n$ -dérivées de  $f$ . Par exemple,  $f^{(4)}(x) \equiv$  quatrième dérivée de  $f$ ,  $f^{(5)}(x) \equiv$  cinquième dérivée de  $f$  etc.*

**Exemple 0.4**

*Calculer la dérivée quatrième,  $f^{(4)}(x)$ , étant donné*

$$f(x) = 2x^5 + 3x^2 + 2.$$



### motivation

Dans certains problèmes, les variables considérées changent par rapport au temps. Par exemple:

- le rayon d'un ballon sphérique qui change avec le changement du volume d'air dans le ballon.
- le changement du niveau de l'eau dans une piscine avec le changement du volume d'eau pompée.

Si ces variables sont reliées les unes aux autres d'une certaine façon, leurs taux de variations seront aussi liés.



Considérons la situation où  $y$  est une fonction par rapport à  $u$ :  $y = f(u)$ , et  $u$  est une fonction par rapport à  $x$ :  $u = g(x)$ . Alors, indirectement,  $y$  est une fonction par rapport à  $x$ , car  $y = f(u) = f(g(x)) = f \circ g(x)$ .

Par la dérivée en chaîne,  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ .



## Procédure pour résoudre les problèmes de taux liés

- 1 Identifier toutes les quantités **données** et toutes les quantités qu'il faut **déterminer**. Si possible, faire un schéma représentatif en indiquant les quantités et leur assignant des variables.
- 2 Ecrire une équation qui relie les toutes les quantités dont les taux de variation sont connus ou à déterminer.
- 3 Utiliser la dérivée en chaîne pour dériver les deux côtés de l'égalité par rapport au temps.
- 4 Substituer dans l'équation les valeurs données des variables ou des taux de variation. Ensuite résoudre pour les quantités demandées.



## Exemple 0.5

*Un ballon sphérique est gonflé au taux de 2 centimètres cube par seconde. Trouvez le taux de changement du rayon du ballon lorsque le rayon est 10 centimètres.*

**Solution:** À partir de l'information à propos du *volume*, qui varie avec le temps, nous voulons déterminer la variation du *rayon*.

Ceux-ci sont liés par:  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ .

- $V$  et  $r$  varient tous les deux avec le temps, ainsi nous avons:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt}$$

- On sait que  $\frac{dV}{dt} = 2$ , et on peut calculer  $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$ .
- Ainsi nous pouvons remplacer les quantités par leurs valeurs et expressions:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} \Rightarrow 2 = (4\pi r^2) \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{2}{4\pi r^2} = \frac{1}{2\pi r^2}$$

**Exemple 0.6**

*Une échelle de longueur 10m, au temps  $t = 0$  est à la position verticale. L'extrémité basse de l'échelle se déplace horizontalement avec une vitesse 3m/sec alors que l'autre extrémité se déplace verticalement (contre un mur vertical). A quelle vitesse se déplace l'extrémité verticale quand l'extrémité basse est déplacée de 8m de sa position d'origine?*

**Exemple 0.7**

*Le profit  $P$  fait sur  $x$  joueurs qui jouent à un jeu d'ordinateur en ligne est donné par:  $P = -0.0003x^2 + 15x - 100000$ . S'il y a 30 joueurs qui abandonnent le jeu par jour, calculez le taux de variation du profit par rapport au temps,  $t$ , en jours lorsqu'il y a 200000 joueurs.*

**Exemple 0.8**

*Le rayon  $r$  de la base d'un cône droit à base circulaire croît à un taux de 2 cm par minute. La hauteur du cône  $h$  est liée au rayon par l'expression suivante:  $h = 3r$ . Trouvez le taux de variation du volume quand le rayon  $r = 6$  cm.*

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

June 2, 2020



MAT1700  
X-ETE20

La dérivée  
implicite

Applications  
de la  
dérivée

La  
croissance  
et la  
décrois-  
sance de  
fonctions

1 La dérivée implicite

2 Applications de la dérivée

3 La croissance et la décroissance de fonctions



## Section 1

# La dérivée implicite



En présence d'une fonction  $y = f(x)$ . on dit que  $y$  est définie **explicitement** par rapport à  $x$ . Dans d'autres situations,  $y$  peut être seulement liée **implicitement** à  $x$ , comme dans l'équation suivante :

$$x^2 - 5y^4 + 3y + 2x = 10. \quad (1)$$

**Question:** Si nous voulons trouver  $y' = \frac{dy}{dx}$  dans (1), comment y arriverons -nous?

Pour trouver  $y' = \frac{dy}{dx}$  dans des cas comme ceux-ci, on utilise une technique nommée la **dérivée implicite** qui dépend de la dérivée en chaîne.



Soit une équation implicite de la forme:  $F(x, y) = G(x, y)$  Voici les étapes à suivre pour déterminer  $\frac{dy}{dx}$ :

- 1 Calculer la dérivée des deux membres de l'équation, i.e,

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = \frac{d}{dx} G(x, y) \quad (2)$$

- 2 Isoler  $\frac{dy}{dx}$  de l'équation (2).



## Exemple 1.1

Etant donné  $x^2 - 5y^4 + 3y + 2x = 6$ , trouver  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

**Solution: Etape 1:** On dérive l'équation les deux côtés:

$$\frac{d}{dx}[x^2 - 5y^4 + 3y + 2x] = \frac{d}{dx}[6]. \quad \text{Alors on a}$$

$$\frac{d}{dx}[x^2] - 5\frac{d}{dx}[y^4] + 3\frac{d}{dx}[y] + 2\frac{d}{dx}[x] = 0. \quad \text{Alors on a:}$$

$$2x - 5 \left[ 4y^{4-1} \frac{dy}{dx} \right] + 3\frac{dy}{dx} + 2 = 0 \Rightarrow 2x - 20y^3 \frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} + 2 = 0.$$

**Etape 2:** On regroupe les termes en  $\frac{dy}{dx}$  pour enfin l'isoler:

$$2x + (-20y^3 + 3)\frac{dy}{dx} + 2 = 0 \Rightarrow (-20y^3 + 3)\frac{dy}{dx} = -2 - 2x.$$

$$\text{D'où} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2 - 2x}{-20y^3 + 3}.$$



Notez que dans l'exemple précédent, nous avons appliqué la loi de la fonction puissance généralisée aux termes en  $y$ , puisqu'on suppose que  $y$  est une fonction de  $x$ .

### Exemple 1.2

- *Etant donné  $y^3 - 2xy = 4 + 4x^2y$ , trouver  $y'$ . En déduire l'équation de la tangente à cette courbe au point  $P(-1, 2)$ .*
- *Etant donné  $x^2y^2 = 2y$ , trouver  $y'$  au point  $(1, 2)$ . En déduire l'équation de la tangente à cette courbe en  $P(-1, 2)$ .*
- *Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'équation  $x^2 - 5y^4 + 3y + 2x = 6$  au point  $P(2, 1)$ .*



## Section 2

# Applications de la dérivée



On utilise le terme **marginal** pour désigner la dérivée d'une fonction appliquée en économie.

- La fonction  $C'(x)$  représente le **coût marginal**. Elle est le taux de variation instantané du coût total,  $C(x)$ , en fonction du nombre d'articles produits  $x$ .
- La fonction  $R'(x)$  exprime le **revenu marginal** et désigne le taux de variation instantané du revenu total,  $R(x)$ , en fonction du nombre d'articles vendus.
- La fonction  $P'(x)$  est le **profit marginal**. Elle désigne le taux de variation instantané du profit total,  $P(x)$  en fonction de  $x$ .



## Exemple 2.1

*La fonction demande pour un produit est donnée par:*

*$p(x) = 13 - x/500$ . Le coût de production de  $x$  unités de ce même produit est donné par  $C(x) = -0.004x^2 + 9.2x + 5000$ .*

- 1 Déterminez le revenu marginal lorsque 1000 unités de ce produit sont vendues. Interprétez cette valeur marginale.*
- 2 Déterminez le coût marginal pour produire 1000 unités.*
- 3 Déterminez le profit et le profit marginal provenant des ventes de 1000 unités de ce produit.*



- L'**élasticité de la demande** mesure la variation de la demande en fonction des changements du prix.

### Définition 2.1

Soit  $x$  la demande et  $p = p(x)$  la fonction demande qui donne le prix par unité quand la demande est  $x$ . *élasticité de la demande par rapport à  $x$* , notée  $\eta(x)$ , est donnée par:

$$\eta(x) = \frac{p(x)}{xp'(x)}, \quad x > 0.$$



- **Rappel:** l'**élasticité de la demande**, notée  $\eta(x)$ , est donnée par:

$$\eta(x) = \frac{p(x)}{xp'(x)}, \quad x > 0.$$

Pour un prix donné,

- a) Si  $|\eta| > 1$ , la demande est dite **élastique**.
- b) Si  $|\eta| < 1$ , la demande est dite **inélastique**.
- c) Si  $|\eta| = 1$ , la demande est dite **unitaire**



Si au lieu d'avoir le prix comme une fonction de la demande  $x$ :  
 $p = p(x)$ , nous avons la demande  $x$  comme une fonction du prix:  
 $x = x(p)$ , alors l'élasticité de la demande,  $\eta$ , est donnée par:

$$\eta(p) = \frac{px'(p)}{x(p)},$$

### Exemple 2.2

*Calculer et quantifier l'élasticité de la demande dans les cas suivants:*

a)  $P(x) = x^2 + 2, x = 1$

b)  $P(x) = 10 + \sqrt{x}, x = 9$

c)  $x(p) = \frac{2}{p+1}, p = 1$

d)  $x(p) = \frac{p^2}{p^2 + 1}, p = 1/2$



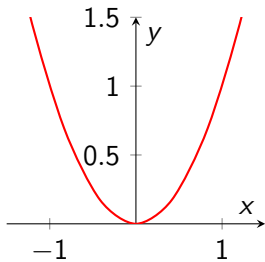
## Section 3

# La croissance et la décroissance de fonctions



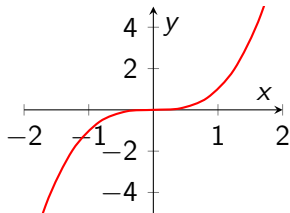
## Définition 3.1

- Une fonction  $f$  est dite **croissante**, resp. **strictement croissante** sur l'intervalle  $(a, b)$ , si pour tout  $x_1, x_2 \in (a, b)$ ,  
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \text{ resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
  - En d'autres termes,  $y$  augmente quand  $x$  augmente
- Une fonction  $f$  est dite **décroissante**, resp. **strictement décroissante** sur l'intervalle  $(a, b)$ , si pour tout  $x_1, x_2 \in (a, b)$ ,  
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \text{ resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$
  - En d'autres termes,  $y$  diminue quand  $x$  augmente



$f(x) = x^2$  est:

- croissante sur  $]0, +\infty[$
- décroissante sur  $] - \infty, 0[$



$f(x) = x^3$  est croissante sur  
 $] - \infty, +\infty[$ .



## Test des fonctions croissantes et décroissantes

Soit  $f$  une fonction différentiable sur l'intervalle  $(a, b)$ .

- 1 Si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in (a, b)$ , alors  $f$  est croissante sur  $(a, b)$ . Le terme croissant est noté par  $\nearrow$ .
- 2 Si  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in (a, b)$ , alors  $f$  est décroissante sur  $(a, b)$ . Le terme décroissant est noté par  $\searrow$ .
- 3 Si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in (a, b)$ , alors  $f$  est constante sur  $(a, b)$ .

**Remarque:** Si  $f$  est une fonction continue, alors  $f'(x)$  peut seulement **changer de signe** aux valeurs de  $x$  où  $f'(x) = 0$  ou  $f'(x)$  n'existe pas.



On dit qu'une fonction  $f$  est **monotone** si elle est soit croissante ou soit décroissante.

### Exemple 3.1

Soit  $f(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$ . Trouvez les intervalles sur lesquels  $f(x)$  est croissante ou décroissante. Esquissez ensuite le graphe de  $f$

**Solution:** La dérivée est

$$f'(x) = \frac{3x^2}{4} - 3 = \frac{3}{4}(x^2 - 4) = \frac{3}{4}(x - 2)(x + 2).$$

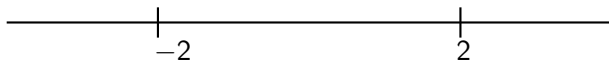
Trouvons le signe de  $f'(x)$ . On peut le faire de deux façons:



**Solution (suite):**(Méthode 1) la dérivée est

$$f'(x) = \frac{3x^2}{4} - 3 = \frac{3}{4}(x^2 - 4) = \frac{3}{4}(x - 2)(x + 2).$$

- La dérivée change de signe quand  $f'(x) = 0$ , c.à.d. quand  $x = -2$  ou  $x = 2$ .
- Nous divisons la droite réelle aux endroits où  $f'(x) = 0$  :



- On Teste le signe de  $f'(x)$  en un point quelconque sur chacun des intervalles:  $] - \infty, 2[$  ;  $] - 2, 2[$  et  $]2, +\infty[$ .



**Solution (suite):** ( Méthode 2) une autre façon de trouver le signe de  $f'(x)$  consiste à:

- trouver d'abord les signes des facteurs  $\frac{3}{4}(x - 2)$  et  $(x + 2)$ .
- Le signe de  $f'(x)$  est obtenu en multipliant les signes des deux facteurs. Dans ce cas, on obtient le tableau suivant:

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$\frac{3}{4}(x - 2)$	-	0	0	+
$x + 2$	-	0	0	+
$f'(x)$	+	0	0	+



**Solution (suite):** Dans les deux cas, on obtient le tableau de signe de  $f'(x)$  suivant:

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

D'après le tableau, on a:

- $f'(x) = \frac{3}{4}(x-2)(x+2) > 0$  sur les intervalles  $] -\infty, -2[$  et  $]2, +\infty[$ , donc  $f$  est **croissante** sur  $] -\infty, -2[$  et  $]2, +\infty[$ .
- $f'(x) = \frac{3}{4}(x-2)(x+2) < 0$  sur l'intervalle  $] -2, 2[$ , alors  $f$  est **décroissante** sur  $] -2, 2[$ .



**Solution (suite):** nous regroupons dans un même tableau, appelé **tableau de variation** de  $f$ , le signe de  $f'$  et la variation de  $f$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	$f(-2)$		$f(2)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	

Diagram illustrating the variation table for a function  $f$ . The table shows the sign of the derivative  $f'(x)$  and the corresponding behavior of the function  $f(x)$  across intervals defined by critical points  $x = -2$  and  $x = 2$ . The function  $f(x)$  is increasing on  $(-\infty, -2)$ , has a local maximum at  $x = -2$ , is decreasing on  $(-2, 2)$ , has a local minimum at  $x = 2$ , and is increasing on  $(2, +\infty)$ . The limits of  $f(x)$  as  $x \rightarrow -\infty$  and  $x \rightarrow +\infty$  are indicated, along with the values  $f(-2)$  and  $f(2)$  at the critical points.

**Remarque:**  $f'(-2) = 0$  et  $f'(2) = 0$ , alors la courbe de  $f$  a une **tangente horizontale** en  $-2$  et en  $2$ , notée  $(\longleftrightarrow)$



**Solution (suite):**  $f(-2) = \frac{(-2)^3}{4} - 3(-2) = 4$ ;  $f(2) = -4$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{4} = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{4} = +\infty$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$4$	$-4$	$+\infty$	

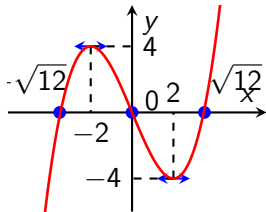
Diagram illustrating the function values and limits. Arrows point from the  $x$  values to the corresponding  $f(x)$  values. Double-headed arrows are placed above the values 4 and -4, and below the values  $-\infty$  and  $+\infty$ .

Pour esquisser le graphe, nous avons besoin de trouver les abscisses et les ordonnées à l'origine.

**Solution (fin):**

- Abscisses à l'origine: on résout  $f(x) = 0$ , alors
$$\frac{x^3}{4} - 3x = 0 \Rightarrow x \left( \frac{x^2}{4} - 3 \right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } \frac{x^2}{4} - 3 = 0.$$
Alors les abscisses à l'origine sont:  $x = 0, \pm \sqrt{12}$
- Ordonnée à l'origine: on calcule  $f(0)$ , alors
$$f(0) = \frac{(0)^3}{4} - 3(0) = 0. \text{ On obtient le point } (0,0).$$

Voici le graphe :





# Procédure pour appliquer le test des fonctions croissantes et décroissantes

Pour déterminer les intervalles sur lesquels une fonction continue est croissante, décroissante ou constante, voici les étapes à suivre:

- 1 Trouver la dérivée de  $f$ .
- 2 Trouver toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $f'(x) = 0$  ou  $f'(x)$  n'existe pas.
- 3 Localiser ces valeurs de  $x$  sur la droite réelle et considérer les intervalles formés par ces valeurs.
- 4 Tester le signe de  $f'(x)$  en un point quelconque sur chacun de ces intervalles
- 5 Utiliser le test des fonctions croissantes et décroissantes pour décider si  $f$  est croissante ou décroissante sur chacun des intervalles.



### Exemple 3.2

*Soit  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$ . Trouvez les intervalles sur lesquels  $f(x)$  est croissante ou décroissante.*

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

June 8, 2020



MAT1700  
X-ETE20

Les extrê-  
mums  
locaux et  
globaux  
d'une  
fonction

Extrémums  
absolus  
(globaux)

- 1 Les extrêmums locaux et globaux d'une fonction
  - Extrêmums absolus (globaux)



## Exemple 0.1

*Trouvez les intervalles sur lesquels les fonctions suivantes sont croissantes ou décroissantes:*

a)  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$

b)  $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 108x + 30$

c)  $f(x) = x + \frac{32}{x^2}$

**Définition 0.1**

Un nombre réel  $c$  est un **point critique** (ou une **valeur critique**) pour une fonction,  $f(x)$ , si  $c$  est dans le domaine de  $f(x)$  et

a)  $f'(c) = 0$ , ou

b)  $f'(c)$  n'existe pas.

**Remarque:** Les **points critiques** et les **points où la fonction n'est pas définie** sont utilisés pour séparer les colonnes dans le **tableau de variation**.



## Exemple 0.2

Déterminer le domaine de définition et les points critiques des fonctions suivantes. Dresser leur tableau de variation.

a)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

b)  $f(x) = x + \frac{32}{x^2}$

c)  $f(x) = 2x - 3x^{\frac{2}{3}}$

d)  $f(x) = \frac{2}{x}$

e)  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$

f)  $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 108x + 30$



## Section 1

# Les extrémums locaux et globaux d'une fonction

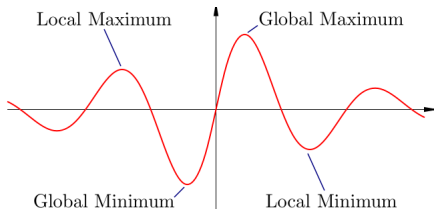


# Les extrêmes(ou Extrêma) locaux d'une fonction

## Définition 1.1

On dit que  $c$  est un *minimum local* (ou *minimum relatif*) d'une fonction  $f(x)$  s'il existe un intervalle ouvert  $]a, b[$  dans le domaine de  $f(x)$  qui contient  $c$  tel que

$$f(x) \geq f(c), \text{ pour tout } x \text{ dans } ]a, b[.$$



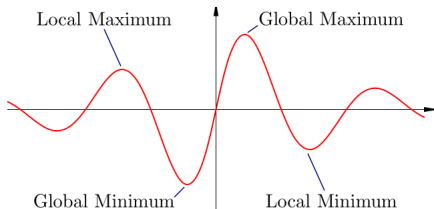


# Les extrêmes(Extrêma) locaux d'une fonction

## Définition 1.2

On dit que  $c$  est un *maximum local* (ou *maximum relatif*) d'une fonction  $f(x)$  s'il existe un intervalle ouvert  $]a, b[$  dans le domaine de  $f(x)$  qui contient  $c$  tel que

$$f(x) \leq f(c), \text{ pour tout } x \text{ dans } ]a, b[.$$





# Les extrêmums(Extrêma) locaux d'une fonction

Les minimums et maximums locaux d'une fonction sont appelés les **extrêmums locaux** de la fonction. Une fonction peut avoir plusieurs minimums et maximums locaux.

## Théorème 1.1

*Si  $f(x)$  admet un maximum ou un minimum local en  $x = c$ , alors soit  $f'(c) = 0$  ou  $f'(c)$  n'existe pas.*

*En d'autres termes, si  $x = c$  est un extrênum local (c'-à-d, un maximum ou un minimum local) de la fonction  $f$ , alors  $x = c$  est un **point critique** de  $f$ .*



# Extrêmes locaux - Test de la première dérivée

**Remarque:**  $f'(c) = 0$  n'implique pas l'existence d'un extrême local en  $x = c$  !

## Théorème 1.2

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $]a, b[$ . Soit  $c \in ]a, b[$ . Alors

- $f$  possède un **extrême local** en  $c \iff f'(c) = 0$  et  $f'$  **change de signe** en  $c$ .

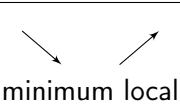
**Exemple:** Si  $f(x) = x^3$ , alors  $f'(x) = 2x^2$  et  $f'(0) = 0$ , mais  $f$  n'admet pas d'extrême local en  $x = 0$ . En effet,  $f'(0) = 0$  mais  $f'(x) = 2x^2 \geq 0$  ne change pas de signe en  $0$ .



## Théorème 1.3

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $]a, b[$ . Soit  $c \in ]a, b[$  un *point critique* de  $f$ . Alors

- Si  $f'(x) < 0$  pour tout  $x < c$  (à gauche de  $c$ ) et  $f'(x) > 0$  pour tout  $x > c$  (à droite de  $c$ ), alors  $c$  est *minimum local* de  $f$ .

$x$	$a$	$c$	$b$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$			



## Théorème 2.3 (suite)

- Si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x < c$  (à gauche de  $c$ ) et  $f'(x) < 0$  pour tout  $x > c$  (à droite de  $c$ ), alors  $c$  est **maximum local** de  $f$ .

$x$	$a$	$c$	$b$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	maximum local 		



## Théorème 2.3 (fin)

- Si  $f'(x)$  garde le même signe pour tout  $x < c$  et pour tout  $x > c$ , alors  $c$  n'est ni un **minimum** ni un **maximum local**.

$x$	$a$	$c$	$b$	$x$	$a$	$c$	$b$
$f'(x)$	+	0	+	$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$f(c)$ ↗			$f(x)$	$f(c)$ ↘		



## Définition 1.3

*Trouvez tous les extrêmes locaux des fonctions suivantes:*

a)  $f(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$

b)  $f(x) = x + \frac{32}{x^2}$

c)  $h(x) = x^2 e^{3x}$

d)  $f(x) = 2x - 3x^{\frac{2}{3}}$

e)  $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 108x + 30$



## Subsection 1

# Extrémums absolus (globaux)



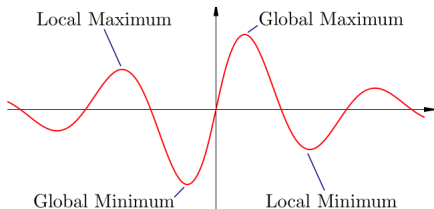
## Théorème 1.4

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  (possiblement sur tout  $\mathbb{R}$ ). Soit  $c \in I$ .

- $c$  est un **minimum global** (ou **minimum absolu**) de  $f$  sur  $I$ , si

$$f(x) \geq f(c), \text{ pour tout } x \text{ dans } I.$$

La valeur  $f(c)$  est appelée la **valeur minimale** de  $f$  sur  $I$ .



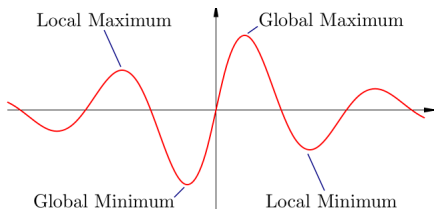


## Théorème 2.4 (suite)

- $c$  est un **maximum global** (ou **maximum absolu**) de  $f$  sur  $I$ , si

$$f(x) \leq f(c), \quad \text{pour tout } x \text{ dans } I.$$

La valeur  $f(c)$  est appelée la **valeur maximale** de  $f$  sur  $I$ .





# Extrêmes absolus (globaux) sur un intervalle fermé

Les minimums et maximums absolus (ou globaux) d'une fonction sont appelés les **extrêmes absolus (ou globaux)** de la fonction. Notez que la valeur minimale ou maximale d'une fonction sur un intervalle quelconque est **unique** (si elle existe).

## Théorème des valeurs extrêmes

Si  $f$  est continue sur un intervalle fermé  $[a, b]$ , alors  $f$  admet un **maximum absolu** et un **minimum absolu** sur  $[a, b]$ .

**Remarque:** Ce théorème est faux si  $f$  n'est pas continue ou si l'intervalle considéré n'est pas fermé. Par exemple,  $f(x) = e^x$  n'admet aucun maximum ou minimum absolu sur  $\mathbb{R}$ .



Supposons que  $f$  est continue sur l'intervalle fermé  $[a, b]$ .

## Procédure pour trouver les extrêmes absolus

- 1 Trouvez tous les points critiques de  $f$  sur  $]a, b[$
- 2 Évaluez  $f$  en chacun des points critiques sur  $[a, b]$ .
- 3 Évaluez  $f$  aux bornes de l'intervalle  $[a, b]$ , c.à.d., en  $a$  et  $b$ .
- 4 La **plus petite** de ces valeurs est la **valeur minimale** de  $f$  et la **plus grande** est la **valeur maximale** de  $f$  sur  $[a, b]$ .
- 5 Toutes les valeurs de  $x$  qui atteignent les valeurs maximales et minimales sont les maximums et les minimums absolus de  $f(x)$  sur  $[a, b]$ .



# Extrêmes absolus (globaux) sur un intervalle fermé

## Exemple 1.1

*Trouvez les valeurs maximales et minimales, et tous les extrêmes globaux des fonctions suivantes sur les intervalles indiqués:*

a)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 2$  sur  $[0, 5]$ ,

b)  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  sur  $[0, 4]$ .

## Exemple 1.2

*Une entreprise détermine que son profit  $P(x)$ , où  $x$  représente des milliers d'unités, est donné par*

$$P(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 9$$

*Si l'entreprise peut seulement produire un maximum de 6 000 unités, quel est le maximum absolu de son profit ?*



### Théorème 1.5

Si  $f$  est une fonction **continue** sur un intervalle et n'admet qu'un **seul point critique** dans cet intervalle, alors un maximum ou un minimum **local** est aussi un maximum ou minimum **absolu**.

### Exemple 1.3

Exemple Trouver les extrêmes absolus de fonction suivante:

$$f(x) = x \ln x.$$

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

June 11, 2020



MAT1700  
X-ETE20

La dérivée  
seconde  
et la  
concavité

## 1 La dérivée seconde et la concavité



Supposons que  $f$  est continue sur l'intervalle fermé  $[a, b]$ .

## Procédure pour trouver les extrêmes absolus

- 1 Trouvez tous les points critiques de  $f$  sur  $]a, b[$
- 2 Évaluez  $f$  en chacun des points critiques sur  $[a, b]$ .
- 3 Évaluez  $f$  aux bornes de l'intervalle  $[a, b]$ , c.à.d., en  $a$  et  $b$ .
- 4 La **plus petite** de ces valeurs est la **valeur minimale** de  $f$  et la **plus grande** est la **valeur maximale** de  $f$  sur  $[a, b]$ .
- 5 Toutes les valeurs de  $x$  qui atteignent les valeurs maximales et minimales sont les maximums et les minimums absolus de  $f(x)$  sur  $[a, b]$ .



# Extrêmes absolus (globaux) sur un intervalle fermé

## Exemple 0.1

*Trouvez les valeurs maximales et minimales, et tous les extrêmes globaux des fonctions suivantes sur les intervalles indiqués:*

a)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 2$  sur  $[0, 5]$ ,

b)  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  sur  $[0, 4]$ .

## Exemple 0.2

*Une entreprise détermine que son profit  $P(x)$ , où  $x$  représente des milliers d'unités, est donné par*

$$P(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 9$$

*Si l'entreprise peut seulement produire un maximum de 6 000 unités, quel est le maximum absolu de son profit ?*



### Théorème 0.1

Si  $f$  est une fonction **continue** sur un intervalle et n'admet qu'un **seul point critique** dans cet intervalle, alors un maximum ou un minimum **local** est aussi un maximum ou minimum **absolu**.

### Exemple 0.3

Exemple Trouver les extrêmes absolus de fonction suivante:

$$f(x) = x \ln x.$$

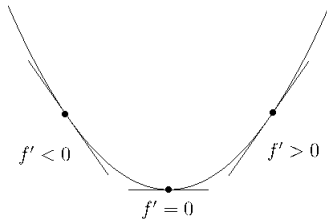


## Section 1

# La dérivée seconde et la concavité



- De façon informelle,  $f$  est **concave vers le haut** sur l'intervalle  $]a, b[$ , si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

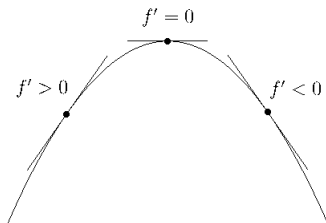


On constate que  $f'$  est **croissante** sur cet intervalle, et admet un **minimum local**.



# Concavité

- De façon informelle,  $f$  est **concave vers le bas** (c.v.b) sur l'intervalle  $]a, b[$ , si sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



On constate que  $f'$  est **décroissante** sur cet intervalle, et admet un **maximum local**.



### Définition 1.1

Soit  $f$  une fonction définie et deux fois dérivable sur  $]a, b[$ .

- $f$  est **concave vers le haut** (c.v.h) sur  $]a, b[$ , si  $f'$  est croissante sur  $]a, b[$ .
- $f$  est **concave vers le bas** (c.v.b) sur  $]a, b[$ , si  $f'$  est décroissante sur  $]a, b[$ .

Puisque nous pouvons déterminer si une fonction est croissante ou décroissante en regardant sa dérivée, nous considérons la dérivée de  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ , la **dérivée seconde** de  $f$ .



Soit  $f$  une fonction définie et deux fois dérivable sur  $]a, b[$ .

### Test pour la concavité

- 1 Si  $f''(x) > 0$  pour tout  $x$  dans  $]a, b[$ , alors  $f$  est **concave vers le haut** sur  $]a, b[$ .
- 2 Si  $f''(x) < 0$  pour tout  $x$  dans  $]a, b[$ , alors  $f$  est **concave vers le bas** sur  $]a, b[$ .

**Remarque:** Les intervalles sur lesquels la fonction  $f$  est concave vers le haut ou concave vers le bas sont appelés les **intervalles de concavité**.



## Définition 1.2

Un point  $x = a$  dans le domaine de  $f$  où la **concavité** change de signe (*c'-à-d*, **c.v.h** change en **c.v.b** ou vice-versa) est appelé **point d'inflexion**.

## Théorème 1.1

Si  $f(x)$  admet un **point d'inflexion** en  $x = a$ , alors soit  $f''(a) = 0$  ou  $f''(a)$  n'existe pas.

**Remarque:** La condition  $f''(x) = 0$  n'implique pas forcément que  $x$  est un point d'inflexion. Par exemple, en prenant  $f(x) = x^4$ , on a  $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ , donc le graphe de  $f$  a toujours une concavité vers le haut alors que  $f''(0) = 0$ .



# Procédure pour appliquer le test de concavité

Pour déterminer les intervalles sur lesquels une fonction continue  $f$  est **concave vers le haut ou vers le bas**, voici les étapes à suivre:

- 1 Trouver le domaine de  $f$ , puis la deuxième dérivée  $f''$ .
- 2 Trouver toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $f''(x) = 0$  ou  $f''(x)$  n'existe pas.
- 3 Localiser ces valeurs de  $x$  sur la droite réelle et considérer les intervalles formés par ces valeurs.
- 4 Tester le signe de  $f''(x)$  en un point quelconque sur chacun de ces intervalles.
- 5 Utiliser le test de concavité pour décider si  $f$  est concave vers le haut ou vers le bas sur chacun des intervalles, ou si  $f$  admet des point d'inflexions.



## Exemple 1.1

*Trouvez les intervalles de concavité et les points d'inflexion des fonctions suivantes:*

a)  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

b)  $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 1$

c)  $h(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$

d)  $f(x) = 2x - 3x^{\frac{2}{3}}$



## Théorème 1.2

Soit  $f$  une fonction définie et deux fois dérivable sur  $]a, b[$ .

Soit  $c \in ]a, b[$  un **point critique** de  $f$  avec  $f'(c) = 0$ .

- 1 Si  $f''(c) > 0$ , alors  $f$  admet un minimum local en  $c$ .
- 2 Si  $f''(c) < 0$ , alors  $f$  admet un maximum local en  $c$ .
- 3 Si  $f''(c) = 0$  ou  $f''(c)$  n'est pas définie, alors le test ne peut rien conclure.

**Remarque:** Notez que le **test de la deuxième dérivée** est plus facile à utiliser, mais parfois il ne peut rien conclure. Le **test de la première dérivée** fonctionne en tout temps.



## Exemple 1.2

- *Trouver et classifier les points critiques des fonctions:*
  - a)  $f(x) = (x^2 - 8x + 16)e^x$     b)  $f(x) = -3x^5 + 5x^3$ .
  - c)  $f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 30x^2 - 9$ .
- *Trouver les points critiques et les intervalles de concavité:*
  - a)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$     b)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
  - c)  $f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 30x^2 - 9$ .

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

June 16, 2020



MAT1700  
X-ETE20

Construction  
des  
graphes  
(page  
206-  
manuel)

Modélisation  
et optimi-  
sation

1 Construction des graphes (page 206-manuel)

2 Modélisation et optimisation



- 1 **Point critique  $c$ :**  $f'(c) = 0$  ou  $f'(c)$  n'existe pas.
  - Maximum, Minimum ou Point de selle
- 2 **Point d'inflexion  $c$ :**  $f''(c) = 0$  ou  $f''(c)$  n'existe pas.
  - Point où la fonction change de concavité.
- 3 Pour trouver **les intervalles de croissance ou décroissance** d'une fonction: Test de la croissance et décroissance
- 4 Pour trouver **les intervalles de concavité** vers le haut ou vers le bas d'une fonction: Test de la concavité
- 5 Pour trouver les extrêmes relatifs d'une fonction:
  - Test de la deuxième dérivée
  - Test de la première dérivée (surtout quand le Test de la deuxième dérivée n'est pas utile)



## Section 1

Construction des graphes (page 206-manuel)



## Étapes à suivre pour tracer le graphe d'une fonction

- 1 Trouvez le domaine de définition de la fonction.
- 2 Trouver les limites aux bornes du domaine de définition.
- 3 Trouvez les asymptotes horizontales et les asymptotes verticales et tracez-les.
- 4 Trouvez l'ordonnée à l'origine, c'-à-d, calculez  $f(0)$  et placez-la dans le repère.
- 5 Trouvez les abscisses à l'origine, c'-à-d, résoudre  $f(x) = 0$  et placez-les dans le repère.



## Etapes à suivre pour tracer le graphe d'une fonction

- 6 Trouvez  $f'(x)$  et déterminez les points critiques, c'-à-d, résoudre  $f'(x) = 0$ , ou  $f'(x)$  n'existe pas.
- 7 Trouvez les intervalles de croissance et de décroissance.
- 8 Identifiez les extrémums locaux et placez-les dans le repère.
- 9 Trouvez  $f''(x)$  et déterminez les intervalles de concavité vers le bas et vers le haut.
- 10 Identifiez les points d'inflexion ( $f''(x) = 0$  ou  $f''(x)$  n'existe pas) et placez-les dans le repère.
- 11 Tracez le graphe avec l'information obtenue en (7) et (9).



## Exemple 1.1

*Esquissez le graphe des fonctions suivantes:*

a)  $f(x) = -3x^5 + 5x^3$

b)  $f(x) = \frac{5x^2 - 5}{2x^2 - 18}$

c)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

d)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 11$



## Section 2

# Modélisation et optimisation



Dans cette partie, nous allons voir comment les notions enseignées dans les cours précédents (dérivée, extrêmes locaux et globaux, concavité  $\dots$ ), peuvent nous servir à résoudre des problèmes de la vie quotidienne, et aussi des problèmes plus spécifiques en Gestion et en Economie.



## Etapes proposées pour résoudre des problèmes d'optimisation

- 1 Identifier toutes les quantités données et les quantités à déterminer. Si possible, faire un schéma.
- 2 Ecrire le problème sous forme mathématique: on dit qu'on **modélise** le problème.
- 3 Identifier les fonctions à optimiser. Ces fonctions peuvent avoir plusieurs inconnues (variables).
- 4 Utiliser les informations données dans le problème pour réduire ces fonctions à une seule inconnue (variable).
- 5 Déterminer les valeurs de la variable pour lesquelles le problème a un sens.
- 6 Trouver et classer les points critiques des fonctions à optimiser en utilisant les techniques vues en classe (dérivée, deuxième dérivée...). Puis répondre à la question.



### Exemple 2.1

*Un manufacturier veut créer une boîte rectangulaire de base carrée, avec la face du haut ouverte et une superficie de  $108 \text{ cm}^2$ . Quelles sont les dimensions qui maximiseront le volume ? Quel est le volume maximal ?*

### Exemple 2.2

*La propriétaire d'une tour à appartements loue chacun de ses 200 appartements pour la somme de 500\$ par mois. Elle sait que si elle augmente le loyer par tranche de 10\$, elle perd en moyenne 2 locataires. Que devrait être le loyer mensuel moyen d'un de ces appartements si elle désire faire un revenu mensuel maximal. Quel est ce revenu.*



### Exemple 2.3

*Nous voulons clôturer une région rectangulaire de  $12\,250\text{ m}^2$  située près d'un mur. Seulement 3 côtés ont besoin d'être clôturés. La clôture pour un des côtés perpendiculaires au mur coûte  $30\text{ \$/m}$ . Les deux autres côtés coûtent  $20\text{ \$/m}$ . Quelles sont les dimensions du rectangle qui minimise le coût ? Quel est le coût minimum ?*

### Exemple 2.4

*La fonction demande d'un produit est donnée par  $p(x) = e^{-2x}$ , où  $x$  est le nombre des unités et  $p(x)$  est le prix par unité. Quel prix par unité maximise le revenu ?*

**Exercices suggérés:** Les exercices impairs de la section 6.3 (Exercices 6.3).

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

June 18, 2020



MAT1700  
X-ETE20

Modélisation  
et optimi-  
sation

L'intégrale

1 Modélisation et optimisation

2 L'intégrale



uOttawa

MAT1700  
X-ETE20

Modélisation  
et optimi-  
sation

L'intégrale

## Section 1

# Modélisation et optimisation



Dans cette partie, nous allons voir comment les notions enseignées dans les cours précédents (dérivée, extrémums locaux et globaux, concavité  $\dots$ ), peuvent nous servir à résoudre des problèmes de la vie quotidienne, et aussi des problèmes plus spécifiques en Gestion et en Economie.



## Etapes proposées pour résoudre des problèmes d'optimisation

- 1 Identifier toutes les quantités données et les quantités à déterminer. Si possible, faire un schéma.
- 2 Ecrire le problème sous forme mathématique: on dit qu'on **modélise** le problème.
- 3 Identifier les fonctions à optimiser. Ces fonctions peuvent avoir plusieurs inconnues (variables).
- 4 Utiliser les informations données dans le problème pour réduire ces fonctions à une seule inconnue (variable).
- 5 Déterminer les valeurs de la variable pour lesquelles le problème a un sens.
- 6 Trouver et classer les points critiques des fonctions à optimiser en utilisant les techniques vues en classe (dérivée, deuxième dérivée...). Puis répondre à la question.



### Exemple 1.1

*Un manufacturier veut créer une boîte rectangulaire de base carrée, avec la face du haut ouverte et une superficie de  $108 \text{ cm}^2$ . Quelles sont les dimensions qui maximiseront le volume ? Quel est le volume maximal ?*

### Exemple 1.2

*La propriétaire d'une tour à appartements loue chacun de ses 200 appartements pour la somme de 500\$ par mois. Elle sait que si elle augmente le loyer par tranche de 10\$, elle perd en moyenne 2 locataires. Que devrait être le loyer mensuel moyen d'un de ces appartements si elle désire faire un revenu mensuel maximal. Quel est ce revenu.*



### Exemple 1.3

*Nous voulons clôturer une région rectangulaire de  $12\,250\text{ m}^2$  située près d'un mur. Seulement 3 côtés ont besoin d'être clôturés. La clôture pour un des côtés perpendiculaires au mur coûte  $30\text{ \$/m}$ . Les deux autres côtés coûtent  $20\text{ \$/m}$ . Quelles sont les dimensions du rectangle qui minimise le coût ? Quel est le coût minimum ?*

### Exemple 1.4

*La fonction demande d'un produit est donnée par  $p(x) = e^{-2x}$ , où  $x$  est le nombre des unités et  $p(x)$  est le prix par unité. Quel prix par unité maximise le revenu ?*

**Exercices suggérés:** Les exercices impairs de la section 6.3 (Exercices 6.3).



uOttawa

MAT1700  
X-ETE20

Modélisation  
et optimi-  
sation

L'intégrale

## Section 2

# L'intégrale



## motivation

Etant donnée une fonction algébrique  $f$ , nous sommes en mesure de calculer sa dérivée  $f'$ . Cependant, **sommes-nous en mesure de trouver la fonction  $f$  étant donnée sa dérivée  $f'$  ?**

**Par exemple:** Supposons qu'on nous donne:

$f'(x) = 2$ , et  $g'(x) = 3x^2$ . Le but est de trouver  $f$  et  $g$ . En adoptant un raisonnement déductif, on peut dire que:

- $f(x) = 2x$  et  $g(x) = x^3$  puisque  $(2x)' = 2$  et  $(x^3)' = 3x^2$ .



## Définition 2.1

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . On dit que la fonction  $F$  est une **primitive** de la fonction  $f$  sur  $I$  si

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

## Théorème 2.1

- Soit  $F$  une primitive de  $f$ . Alors, pour toute constante  $C \in \mathbb{R}$ , la fonction  $F + C$  est aussi une primitive de  $f$ .
- Soient  $F$  et  $G$  deux primitives de  $f$ . Alors il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que

$$F(x) - G(x) = C.$$



# La primitive d'une fonction

Les théorèmes précédents indiquent qu'une fonction possède une infinité de primitives, et que deux primitives d'une même fonction diffèrent par une constante.

## Exemple 2.1

Etant donnée la fonction  $f(x) = 6e^{3x}$ . Les fonctions  $F_1(x) = 2e^{3x}$ ,  $F_2(x) = 2e^{3x} + 37$ , et  $F_3(x) = 2e^{3x} - 12$  sont toutes des primitives de  $f$ . En effet,

$$F_1'(x) = 2e^{3x} \cdot 3 = 6e^{3x}$$

$$F_2'(x) = 2e^{3x} \cdot 3 + 0 = 6e^{3x}$$

$$F_3'(x) = 2e^{3x} \cdot 3 - 0 = 6e^{3x}$$



## Notation

Si  $F$  est une primitive d'une fonction  $f$ , nous écrivons

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

pour signifier que  $F(x) + C$  est la famille de primitives de  $f$ .

- L'expression  $\int f(x)dx$  est appelée une **intégrale indéfinie**. Elle représente la primitive de  $f$  par rapport à  $x$  tout comme  $\frac{df}{dx}$  représente la dérivée de  $f$  par rapport à  $x$ .
- $C$  est une constante arbitraire appelée la **constante d'intégration**.



# Quelques règles d'intégration

- ① Règle du multiple d'une fonction: Si  $k$  est une constante et  $f$  est une fonction, alors

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

- ② Règle de la somme/différence: Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions et  $a$  et  $b$  sont deux constantes, alors

$$\int [af(x) \pm bg(x)] dx = a \int f(x) dx \pm b \int g(x) dx$$



## Primitives des fonctions usuelles

- ① Règle de la constante: Si  $k$  est une constante, alors

$$\int k \, dx = kx + C$$

- ② Règle de la puissance: Si  $n \neq -1$ , alors

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$



## Primitives des fonctions usuelles

- ③ Fonctions exponentielles: Soit  $a > 0$  et  $a \neq 1$ .

$$\int e^x dx = e^x + C; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad \int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$$

- ④ Fonctions logarithmiques :

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C.$$

**Remarque:** Vous pouvez vérifier vos réponses en prenant la dérivée et en vérifiant si vous obtenez la fonction de départ.



## Exemple 2.2

Calculer les intégrales suivantes:

$$a) \int (4x^3 + 12x^2 - 8x + 3) dx$$

$$b) \int \frac{4}{\sqrt{x}} dx$$

$$c) \int \frac{2x - 1}{x^{4/3}} dx$$

$$d) \int e^{x+3} - \frac{3}{5x} dx$$

$$e) \int 5e^x - \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x} dx$$

$$f) \int 3^x + e^{2x} dx$$

**Exercices suggérés:** Les exercices impairs de la section 7.1 (Exercices 7.1).

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

June 23, 2020



MAT1700  
X-ETE20

Les aires  
et  
l'intégrale  
définie

## 1 Les aires et l'intégrale définie



# Problèmes à condition initiale

Souvent dans les applications, on a besoin de calculer la constante d'intégration  $C$  pour trouver la fonction particulière recherchée. Pour calculer  $C$ , on a besoin de la valeur de la fonction pour une seule valeur de la variable. Cette information est appelée une **condition initiale**.

Supposez que nous connaissons  $f'(x)$  et nous connaissons la valeur de  $f(a)$  pour un  $a$  quelconque. Alors nous pouvons trouver la fonction  $f(x)$  par la méthode suivante:

- 1 Trouver la primitive générale de  $f'(x)$ .
- 2 Remplacer  $x = a$  dans la primitive générale et résoudre pour la constante d'intégration,  $C$ .



## Problèmes à condition initiale

## Exemple 0.1

- Soit  $f'(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} - 4e^{-2x}$  et  $f(0) = 1$ . Trouver  $f(x)$  et  $f(2)$ .
- Soit  $f'(x) = 4x^{-\frac{3}{2}} - 3x^{-1}$  et  $f(1) = 2$ . Trouver  $f(4)$ .

## Exemple 0.2

Supposons que le coût marginal par rapport à la demande,  $x$ , est donné par:

$C'(x) = 0.12x^2 - 30x^{\frac{1}{2}} - 1500x^{-1}$  et que le coût lorsque 100 unités sont vendues est de 4000\$. Trouver la fonction coût par rapport à  $x$ ,  $C(x)$ .



### Exemple 0.3

*Un ballon est lancé droit dans les airs avec une vitesse initiale de  $19,6 \text{ m/s}$  d'une hauteur initiale de  $24,5 \text{ m}$ . Trouvez l'équation pour  $h(t)$ , la hauteur du ballon après  $t$  secondes. Vous pouvez utiliser le fait que l'accélération est de  $-9,8 \text{ m/s}^2$ .*

### Exemple 0.4

*Une entreprise sait que le coût marginal d'un niveau de production de  $x$  unités est  $M(x) = x^2 - 2x + 10$ . Supposez que le coût initial est de  $35000\$$ . Trouvez la fonction coût.*



uOttawa

MAT1700  
X-ETE20

Les aires  
et  
l'intégrale  
définie

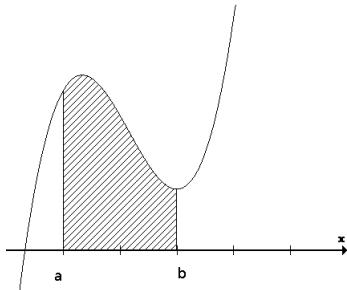
## Section 1

# Les aires et l'intégrale définie

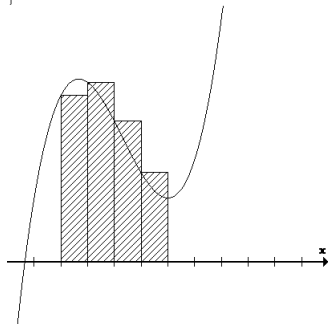


# l'intégrale définie comme limite d'une somme

Supposez que  $f$  est positive sur un intervalle fermé  $[a, b]$ . Nous voulons calculer l'aire sous la courbe mais au-dessus de l'axe des  $x$  entre  $a$  et  $b$  :



Une approche est d'utiliser des rectangles pour approximer l'aire. Ces rectangles ont la même largeur.





## l'intégrale définie comme limite d'une somme

Les aires des rectangles sont faciles à calculer: la largeur de chaque rectangle est  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  où  $n$  est le nombre de rectangles, alors l'aire totale est

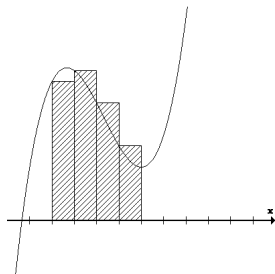
$$\sum_{i=0}^n f(c_i) \Delta x$$

Ici  $c_i$  est un point arbitraire dans le  $i$ -ième intervalle, et  $f(c_i)$  représente la longueur du rectangle dans le  $i$ -ième intervalle.

L'aire réelle est obtenue en prenant la limite quand  $n \rightarrow \infty$ , ou de façon équivalente, quand  $\Delta x \rightarrow 0$  ([animation](#)).

Nous appelons la limite ci-dessus l'**intégrale définie** et nous la notons  $\int_a^b f(x) dx$ . Donc

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(c_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

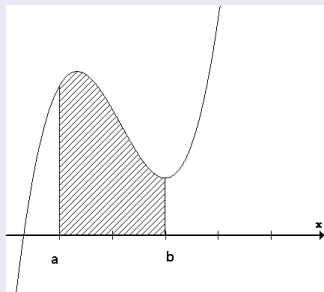




## Définition 1.1

Soit  $f$  une fonction positive et continue sur un intervalle fermé  $[a, b]$ . L'aire de la région formée par le graphe de  $f$ , l'axe des  $x$  et les droites  $x = a$  et  $x = b$  est donnée par:

$$\text{Aire} = \int_a^b f(x) dx$$



L'expression  $\int_a^b f(x) dx$  est appelée **intégrale définie** entre  $a$  et  $b$ , où  $a$  est la **limite inférieure** et  $b$  la **limite supérieure** d'intégration.



## Le Théorème Fondamental de l'Analyse

Si  $f(x)$  est continue et positive sur  $[a, b]$ , alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

où  $F$  est n'importe quelle primitive de  $f$ .

Nous allons souvent utiliser l'une des notations suivantes:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



**Remarque :** Le Théorème fondamental du calcul nous dit que si **on peut trouver une primitive** de  $f(x)$ , on peut alors utiliser

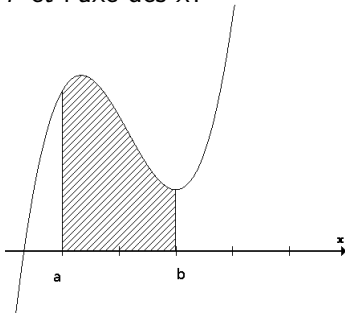
cette primitive pour évaluer l'intégrale définie  $\int_a^b f(x)dx$ .

Cependant ce théorème ne décrit pas une procédure pour trouver les primitives.

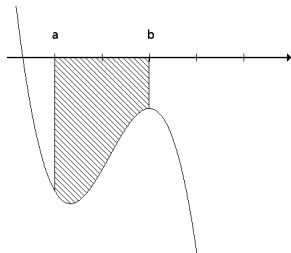


L'utilisation de l'intégrale définie pour calculer l'aire entre une fonction et l'axe des  $x$  est applicable même si la fonction n'est pas nécessairement positive.

- ① Si  $f$  est non-négative, alors  $\int_a^b f(x)dx$  donne l'aire entre  $f$  et l'axe des  $x$ .



- ② Si  $f$  est toujours négative, alors  $\int_a^b f(x)dx$  sera négative. Sa **valeur absolue** donnera l'aire entre  $f$  et l'axe des  $x$ .

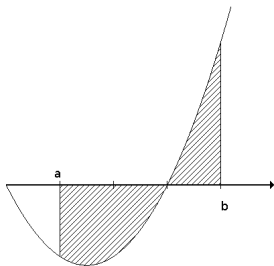




- ③ Si  $f$  croise l'axe des  $x$ ,  
alors  $\int_a^b f(x)dx$  peut être  
positive ou négative.  
Cependant, l'aire doit être  
toujours positive. Donc  
pour éviter ce problème,  
l'aire de chacune des deux  
régions doit être calculée  
séparément.

Ainsi, l'aire totale de la région limitée par  $f$  et l'axe des  $x$  entre  $a$  et  $b$  est calculée en additionnant:

La valeur absolue de l'intégrale  
de la partie négative de  $f$     +    La valeur de l'intégrale  
de la partie positive de  $f$





En plus des propriétés des intégrales indéfinies, voici quelques propriétés additionnelles pour les intégrales définies:

### Propriétés des intégrales définies

$$\textcircled{1} \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{avec } a \leq c \leq b$$

$$\textcircled{2} \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\textcircled{3} \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$



## Exemple 1.1

Considérez  $f(x) = x^3$ .

- 1 Calculez  $\int_{-1}^1 x^3 dx$
- 2 Calculez l'aire totale entre le graphe de  $x^3$  et l'axe des  $x$  sur  $[-1, 1]$ .

## Exemple 1.2

Considérez  $f(x) = (x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3$ .

- 1 Calculez  $\int_0^2 f(x) dx$
- 2 Calculez l'aire totale entre le graphe de  $f(x)$  et l'axe des  $x$  sur  $[0, 2]$

**Remarque:** L'intégrale définie peut être égale à zéro ou négative, tandis que l'aire est toujours strictement positive.



## Exemple 1.3

Considérez  $f(x) = (x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3$ .

- 1 Calculez  $\int_0^2 f(x) dx$
- 2 Calculez l'aire totale entre le graphe de  $f(x)$  et l'axe des  $x$  sur  $[0, 2]$

**Remarque:** L'intégrale définie peut être égale à zéro ou négative, tandis que l'aire est toujours strictement positive.



## Exemple 1.4

$$a) \int_{-2}^4 |x - 3| dx; \quad \int_{17}^{17} (x(x - 1)) dx$$

$$b) \int_{-1}^1 (3x + 12x^3) dx; \quad \int_0^1 (\sqrt{x} + x^{3/2} - 3x^{7/3}) dx$$

$$c) \text{ Si } \int_3^6 f(x) dx = 4; \quad \int_5^6 f(x) dx = -2, \text{ évaluer } \int_3^5 f(x) dx.$$



## Définition 1.2

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors la **valeur moyenne** de  $f$  sur  $[a, b]$  est donnée par:

$$\text{Valeur moyenne} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

## Exemple 1.5

Calculer la valeur moyenne de la fonction suivante sur l'intervalle  $[2, 5]$ :  $f(x) = 3x^2 + x - 2$ .

**Question:** Comment calculer l'intégrale  $\int_1^2 xe^{x^2} dx$ ?

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

June 25, 2020



MAT1700  
X-ETE20

Quelques  
tech-  
niques  
d'intégration

Intégration  
par substi-  
tution/  
change-  
ment de  
variable

Intégration  
par parties

Les appli-  
cations de  
l'intégrale

- 1 Quelques techniques d'intégration
  - Intégration par substitution/ changement de variable
  - Intégration par parties
  
- 2 Les applications de l'intégrale



## Exemple 0.1

a)  $\int_{-2}^4 |x - 3| dx$ ;  $\int_{17}^{17} (x(x - 1)) dx$

b)  $\int_{-1}^1 (3x + 12x^3) dx$ ;  $\int_0^1 (\sqrt{x} + x^{3/2} - 3x^{7/3}) dx$

c) Si  $\int_3^6 f(x) dx = 4$ ;  $\int_5^6 f(x) dx = -2$ , évaluer  $\int_3^5 f(x) dx$ .



## Définition 0.1

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors la **valeur moyenne** de  $f$  sur  $[a, b]$  est donnée par:

$$\text{Valeur moyenne} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

## Exemple 0.2

Calculer la valeur moyenne de la fonction suivante sur l'intervalle  $[2, 5]$ :  $f(x) = 3x^2 + x - 2$ .

**Question:** Comment calculer l'intégrale  $\int_1^2 xe^{x^2} dx$ ?



## Section 1

# Quelques techniques d'intégration



## Subsection 1

# Intégration par substitution/ changement de variable



# Intégration par substitution/ changement de variable

MAT1700  
X-EET20Quelques  
tech-  
niques  
d'intégrationIntégration  
par substi-  
tution/  
change-  
ment de  
variableIntégration  
par partiesLes appli-  
cations de  
l'intégrale

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions. Supposons que  $g$  soit dérivable et que  $f$  admette une primitive  $F$ , c'est-à-dire,  $F' = f$ .

## Intégration par substitution (intégrales indéfinies)

La technique d'intégration par **substitution** ou **changement de variable** intervient si l'intégrale indéfinie qu'on veut évaluer est de la forme:

$$\int g'(x)f[g(x)] dx. \quad (1)$$

Par **substitution**, on pose  $u = g(x)$  dans (1), il vient que

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x) dx. \text{ Alors,}$$

$$\begin{aligned} \int g'(x)f[g(x)] dx &= \int f(u) du = F(u) + C \\ &= F(g(x)) + C = (F \circ g)(x) + C. \end{aligned}$$



# Procédure pour calculer une intégrale indéfinie par substitution

MAT1700  
X-ETE20Quelques  
tech-  
niques  
d'intégrationIntégration  
par substi-  
tution/  
change-  
ment de  
variableIntégration  
par partiesLes appli-  
cations de  
l'intégrale

Pour calculer par **substitution**, l'intégrale  $\int g'(x)f[g(x)] dx$ :

- 1 Poser  $u = g(x)$ .
- 2 Calculer  $\frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x) dx$ .
- 3 Substituer  $u$  et  $du$  dans l'expression à intégrer - il ne doit plus y avoir de  $x$  ou de  $dx$ .
- 4 Calculer la nouvelle intégrale simplifiée.
- 5 Remplacer  $u$  par son expression  $g(x)$  dans votre résultat final.



# Intégration par substitution (intégrales définies)

## Intégration par substitution (intégrales définies)

Pour calculer l'intégrale **définie**,  $\int_a^b g'(x)f[g(x)] dx$ , on dispose de **deux** méthodes:

### Méthode 1:

- On calcule par **substitution**, l'intégrale indéfinie (la primitive),  $F(x) = \int g'(x)f[g(x)] dx$ .
- Puis  $\int_a^b g'(x)f[g(x)] dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ .



## Intégration par substitution (intégrales définies)

Méthode 2:

Pour calculer  $\int_a^b g'(x)f[g(x)] dx$ , on peut aussi:

- Poser  $u = g(x)$ .
- Calculer  $\frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x) dx$ . Puis changer les bornes  $a$  et  $b$  en  $g(a)$  et  $g(b)$ . Alors

$$\begin{aligned}\int_a^b g'(x)f[g(x)] dx &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du \\ &= [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} \\ &= F[g(b)] - F[g(a)].\end{aligned}$$



## Exemple 1.1

Calculer les intégrales suivantes par substitution:

a)  $\int x^2(3x^3 + 2)^5 dx$

b)  $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x - 5} dx$

c)  $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 2} dx$

d)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^3}} dx$

e)  $\int \frac{x - 5}{(x + 1)^2} dx$

f)  $\int \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 3}} 2^{\sqrt{4x^2 + 3}} dx$



## Exemple 1.2

Calculer les intégrales suivantes par substitution:

a) 
$$\int_0^2 x^2(3x^3 + 2)^5 dx$$

b) 
$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x - 5} dx$$

c) 
$$\int_2^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 2} dx$$

d) 
$$\int_{-1}^0 \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^3}} dx$$

e) 
$$\int_2^6 \frac{x - 5}{(x + 1)^2} dx$$

f) 
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 3}} 2^{\sqrt{4x^2 + 3}} dx$$



**Remarque 1:** L'intégrale indéfinie  $\int g'(x)f[g(x)] dx$  peut se calculer par la méthode directe:

$$\begin{aligned}\int g'(x)f[g(x)] dx &= \int g'(x)F'[g(x)] dx, \quad \text{car } F' = f \\ &= \int (F \circ g)'(x) dx \\ &= (F \circ g)(x) + C = F(g(x)) + C.\end{aligned}$$

**Remarque 2:** Il découle de la remarque 1 que la méthode d'intégration par substitution est essentiellement basée sur la règle de dérivation en chaîne.



## Intégration par substitution généralisée

$$\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1);$$

$$\int k f'(x) dx = k f(x) + C.$$

## Exemple 1.3

Calculer les intégrales suivantes par substitution:

a)  $\int_0^2 x^2(3x^3 + 2)^5 dx$

b)  $\int \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5 dx$



## Intégration par substitution généralisée

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C,$$

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = -\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}} + C.$$

## Exemple 1.4

Calculer les intégrales suivantes par substitution:

a)  $\int_{-1}^1 \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x - 5} dx$

b)  $\int \frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4} dx$



## Intégration par substitution généralisée

$$\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C,$$

$$\int f'(x)a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C.$$

## Exemple 1.5

Calculer les intégrales suivantes par substitution:

a)  $\int xe^{x^2} dx$

b)  $\int \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 3}} 2^{\sqrt{4x^2 + 3}} dx$



## Subsection 2

# Intégration par parties



Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions différentiables. La technique d'intégration par **parties** intervient si l'intégrale indéfinie qu'on veut évaluer est de la forme:

$$\int f'(x)g(x) dx \text{ ou } \int g'(x)f(x) dx.$$

Cette méthode d'intégration est essentiellement basée sur la règle de **dérivation du produit**.



## Intégration par parties (intégrales indéfinies)

Par la règle de dérivation du produit de deux fonctions, on a:

$$\begin{aligned}[f(x)g(x)]' &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x), \\ f'(x)g(x) &= [f(x)g(x)]' - g'(x)f(x).\end{aligned}$$

On en déduit la formule suivante de l'intégration par parties:

$$\int f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)] - \int g'(x)f(x) dx.$$



## Intégration par parties (intégrales définies)

La formule d'intégration par parties pour les **intégrales définies** est la suivante:

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)f(x) dx.$$



Pour calculer l'intégrale,  $\int f'(x)g(x) dx$ , **par parties**, il faut:

- 1 Choisir pour  $f'(x)$  une fonction que vous savez intégrer.
- 2 Choisir pour  $g(x)$  la fonction qui ne devient pas plus complexe lorsqu'on la dérive. On cherche aussi à prendre pour  $g(x)$  la fonction qui se simplifie le plus après une dérivation.
- 3 Déterminer si l'intégrale,  $\int f(x)g'(x) dx$ , qui en résulte est plus simple que celle du départ  $\left(\int f'(x)g(x) dx\right)$ .



## Exemple 1.6

Calculer les intégrales suivantes par substitution:

a)  $\int xe^x dx$

b)  $\int_{-1}^1 xe^{-3x} dx$

c)  $\int \ln x dx$

d)  $\int x^n \ln x dx$

e)  $\int_{-3}^1 (x^2 + 1)^3 (x^3 + 1) dx$

f)  $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$

**Remarque:** Parfois nous devons intégrer par partie deux fois (ou plus).



uOttawa

MAT1700  
X-ETE20

Quelques  
tech-  
niques  
d'intégration

Intégration  
par substi-  
tution/  
change-  
ment de  
variable

Intégration  
par parties

Les appli-  
cations de  
l'intégrale

## Section 2

# Les applications de l'intégrale



# L'aire d'une région bornée par deux courbes

MAT1700  
X-ETE20Quelques  
tech-  
niques  
d'intégrationIntégration  
par substi-  
tution/  
change-  
ment de  
variable  
Intégration  
par partiesLes appli-  
cations de  
l'intégrale

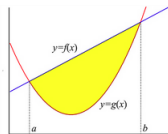
Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ .

Supposons que  $\mathcal{A}$  soit l'aire de la région délimitée par les courbes:  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  et les droites:  $x = a$ ,  $x = b$ .

Nous pouvons utiliser l'intégrale pour calculer, l'aire,  $\mathcal{A}$ .

- l'aire  $\mathcal{A}$  est donnée par:

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

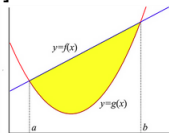




## L'aire d'une région bornée par deux courbes

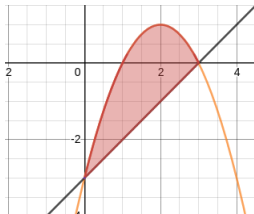
- Si  $f(x) \geq g(x)$  pour tout  $x$  dans  $[a, b]$ , alors l'aire  $\mathcal{A}$  est:

$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



- Si au contraire  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x$  dans  $[a, b]$ , alors l'aire  $\mathcal{A}$  est:

$$\mathcal{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$





# L'aire d'une région bornée par deux courbes

MAT1700  
X-ETE20

Quelques  
tech-  
niques  
d'intégration

Intégration  
par substi-  
tution/  
change-  
ment de  
variable  
Intégration  
par parties

Les appli-  
cations de  
l'intégrale

La procédure pour calculer l'aire entre les courbes  $y = f(x)$  et  $y = g(x)$  est la suivante:

- 1 Trouver tous les points d'intersection de  $f$  et  $g$ , c'est-à-dire, tous les points où  $f(x) = g(x)$ .
- 2 Intégrer  $|f(x) - g(x)|$  sur les intervalles déterminés par les points d'intersection, et additionner les résultats obtenus.

Si on ne précise pas un intervalle fermé  $[a, b]$ , il faut alors trouver **les points d'intersection** entre les courbes considérées, et évaluer l'intégrale définie entre la valeur minimale et la valeur maximale parmi ces points d'intersection.



## Exemple 2.1

- 1 Calculer l'aire entre les courbes  $y = \sqrt{x}$  et  $y = x^2$  sur l'intervalle  $[0, 2]$ .
- 2 Calculer l'aire de la région bornée par les courbes  $y = x^2 + 3$  et  $y = -x^2 - 1$  sur  $[-2, 2]$ .
- 3 Calculer l'aire entre les courbes  $y = -x^2 + 8x$  et  $y = 2x + 5$  sur l'intervalle  $[0, 5]$ .
- 4 Calculer l'aire de la région bornée par les courbes  $y = x^2$  et  $y = 2 - x^2$ .
- 5 Calculer l'aire entre les courbes  $y = x$  et  $y = x^3$ .

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

July 2, 2020



uOttawa

# Table des matières I

MAT1700  
X-ETE20



## Section 1

# Les surplus du producteur et du consommateur



## Rappel de fonctions utilisées en Économie

- La **fonction demande** notée  $p(x)$  représente le prix par unité d'un produit quand la demande est  $x$ , c'-à-d, le prix quand les consommateurs sont prêts à acheter  $x$  unités de ce produit.
- La fonction **offre** notée  $S(x)$  donne le prix par unité d'un produit que les producteurs sont prêts à vendre quand la demande est  $x$ , c'-à-d, le prix quand les producteurs sont prêts à vendre  $x$  unités de ce produit.

## Définition 1.1

*Le **prix d'équilibre** du marché est le prix pour lequel la fonction demande et offre sont égales, c'-à-dire,  $S(x) = p(x)$ .*

*Le **point d'équilibre** est le point  $(x_0, p(x_0))$  ou  $(x_0, S(x_0))$  telle que  $p(x_0) = S(x_0)$ .*



# Les surplus du producteur et du consommateur

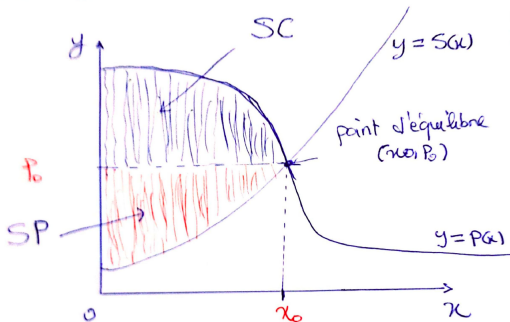
- Le **surplus des consommateurs (SC)**: mesure les gains réalisés par le consommateur.
- Le **surplus des producteurs (SP)**: mesure les gains réalisés par le producteur.
- Le surplus du consommateur et le surplus du producteur sont simplement des aires entre des courbes.



# Les surplus du producteur et du consommateur

Supposons que  $(x_0, p_0)$  est le point d'équilibre du marché.

- Le **surplus des consommateurs (SC)** est l'aire bornée par la courbe de la fonction **demande**,  $p(x)$  et la droite  $y = p_0$  entre  $0$  et  $x_0$ .
- Le **surplus des producteurs (SP)** est l'aire bornée par la courbe de la fonction **offre**,  $S(x)$  et la droite  $y = p_0$  entre  $0$  et  $x_0$ .



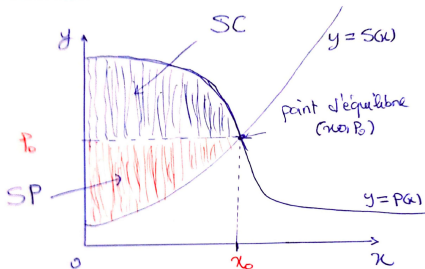


# Les surplus du producteur et du consommateur

Supposons que  $(x_0, p_0)$  est le point d'équilibre du marché.  
De ce qui précède, on déduit les formules suivantes:

$$SC = \int_0^{x_0} [p(x) - p_0] dx$$

$$SP = \int_0^{x_0} [p_0 - S(x)] dx$$



**Remarque:** Pour calculer les surplus (SC) et (SP), il faut:

- Déterminer le **point d'équilibre**  $(x_0, p_0)$  en résolvant  $p(x) = S(x)$ . Alors  $p_0 = p(x_0)$  ou  $p_0 = S(x_0)$ .
- Calculer les surplus par les formules données ci-haut.



## Exemple 1.1

Calculer le surplus du consommateur et le surplus du producteur si la demande est  $p(x) = 15 - x$  et l'offre  $S(x) = 3 + \frac{x}{2}$ .

**Solution:** Premièrement, trouvons le point d'équilibre :

$$\begin{aligned} p(x) = S(x) &\Leftrightarrow 15 - x = 3 + \frac{x}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 12 \Rightarrow x = 8. \end{aligned}$$

Alors  $x_0 = 8$  et ainsi  $p_0 = p(8) = 15 - 8 = 7$ . Alors le point  $(8, 7)$  est le point d'équilibre.



## Solution - Exemple 2.1 - Suite et fin

Il suit que **le surplus du consommateur** est :

$$\begin{aligned} SC &= \int_0^{x_0} (p(x) - p_0) dx \\ &= \int_0^8 (15 - x - 7) dx \\ &= \int_0^8 (8 - x) dx \\ &= 8x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^8 = 32\$ \end{aligned}$$



## Solution - Exemple 2.1 - Fin

De même, le surplus du producteur est :

$$\begin{aligned} SP &= \int_0^{x_0} (p_0 - S(x)) dx = \int_0^8 \left(7 - 3 - \frac{x}{2}\right) dx \\ &= 4x - \frac{x^2}{4} \Big|_0^8 = 16\$ \end{aligned}$$



## Exemple 1.2

Calculer le surplus du consommateur et le surplus du producteur si la demande est  $p(x) = 9e^{-x}$  et l'offre  $S(x) = e^x$ .

**Solution:** On trouve le point d'équilibre:

$$\begin{aligned} p(x) = S(x) &\Leftrightarrow 9e^{-x} = e^x \\ &\Leftrightarrow 9 = e^{2x} \Leftrightarrow 2x = \ln 9. \\ &\Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \ln 9 = \ln 9^{\frac{1}{2}} = \ln 3 \end{aligned}$$

Alors  $p_0 = p(x_0) = S(x_0) = e^{\ln 3} = 3$ , et

$$SC = \int_0^{\ln 3} (9e^{-x} - 3) dx = [-9e^{-x} - 3x]_0^{\ln 3} = 6 - \ln 27.$$

$$SP = \int_0^{\ln 3} (3 - e^x) dx = [3x - e^x]_0^{\ln 3} = \ln 27 - 2.$$



## Section 2

# Intégrales impropres



Dans la définition de l'intégrale définie  $\int_a^b f(x) dx$ , deux conditions nécessaires étaient supposées:

- L'intervalle  $[a, b]$  doit être fini, c-à-d, les deux valeurs  $a$  et  $b$  doivent être finies (non infinies).
- La fonction  $f$  doit être continue sur tout l'intervalle  $[a, b]$ .

Cependant, dans plusieurs situations, l'une ou l'autre de ces conditions n'est pas satisfaite. Par exemple:

- L'une des bornes de l'intégrale ou les deux peuvent être infinies ( $-\infty$  ou  $+\infty$ ).
- La fonction peut être discontinue en un certain point dans l'intervalle  $[a, b]$ .

Les intégrales qui présentent une parmi ces caractéristiques sont appelées **des intégrales impropres**.



## Définition 2.1

Une *intégrale impropre de type I* est une intégrale dont au moins une des bornes d'intégration est infinie.

## Exemple 2.1

Voici quelques exemples d'intégrales impropres de type I:

①  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$  (limite supérieure infinie - type I)

②  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$  (limites infinies - type I)



# Intégrales impropres du type I

## Intégrales impropres du type I

Supposons que  $f(x)$  est continue sur  $[a, +\infty)$  et  $(-\infty, b]$ .

- 1 Si une seule des bornes est infinie, l'intégrale impropre est définie par une limite:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

Les intégrales impropres (??) et (??) sont dite **convergentes** si les limites qui les définissent existent (c-à-d, sont des nombres réels) et **divergentes** dans le cas contraire.



## Intégrales impropres du type I

- ② Si les deux bornes d'intégration sont infinies, l'intégrale impropre est définie par une somme de deux intégrales impropres comportant chacune une seule borne infinie:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx \quad (3) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx,\end{aligned}$$

où  $c$  désigne n'importe quel nombre réel.

Dans ce cas, l'intégrale impropre (??) **converge** si ces deux dernières limites existent. Elle **diverge** si au moins l'une des deux limites est infinie.



## Exemple 2.2

Déterminer si les intégrales impropres suivantes convergent ou divergent:

a)  $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

b)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

c)  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$

d)  $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^x dx &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 e^x dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} [e^x]_b^0 \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} [e^0 - e^b] \\ &= 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

L'intégrale impropre converge.



## [Solution - Exemple 1.2]

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-x^{-1}]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{b} - \left( -\frac{1}{1} \right) \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{b} + 1 \right] = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{b} \right) + 1 \\ &= 0 + 1 = 1 \text{ converge.}\end{aligned}$$

En général, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  converge si et seulement si  $p > 1$ .



## [Solution - Exemple 1.2]

**Solution:**

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^x dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} [e^x]_0^b \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^0 - e^a] + \lim_{b \rightarrow +\infty} [e^b - e^0] \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [1 - e^a] + \lim_{b \rightarrow +\infty} [e^b - 1] \\ &= 1 - \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a + \lim_{b \rightarrow +\infty} e^b - 1 \\ &= 1 - 0 + (+\infty) - 1 = +\infty.\end{aligned}$$

Alors l'intégrale impropre diverge.



## Définition 2.2

Une *intégrale impropre de type II* est une intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  dont l'intégrande  $f(x)$  possède au moins une *discontinuité* sur l'intervalle  $[a, b]$  et présente une asymptote verticale à cet endroit.

## Exemple 2.3

Voici quelques exemples d'intégrales impropres de II:

❶  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  [discontinuité et asymptote verticale (AV) en 0]

❷  $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$  [discontinuité et AV en  $x = 2$ ]

❸  $\int_{-2}^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx$  (discontinuité en  $x = -1$ )



## Intégrales impropres du type II

- ① Supposons que  $f(x)$  est continue sur  $[a, b)$  et que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty, \text{ alors}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx. \quad (4)$$

- ② Supposons que  $f(x)$  est continue sur  $(a, b]$  et que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \text{ alors}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx. \quad (5)$$

Les intégrales impropres (??) et (??) sont dite **convergentes** si les limites qui les définissent existent (c-à-d, sont des nombres réels) et **divergentes** dans le cas contraire.



## Intégrales impropres du type II

- ③ Supposez que  $f(x)$  est continue sur  $[a, b]$  sauf pour un certain  $c$  dans  $(a, b)$  où  $f$  tend vers l'infini, alors:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx & (6) \\ &= \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x) dx,\end{aligned}$$

où  $c$  désigne n'importe quel nombre réel.

Dans ce cas, l'intégrale impropre (??) **converge** si ces deux dernières limites existent. Elle **diverge** si au moins l'une des deux limites est infinie.



## Exemple 2.4

$$\text{Calculer } \int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx.$$

La fonction  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$  n'est pas définie en  $x = 3$  et

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = +\infty. \text{ Il suit que:}$$

$$\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx = \lim_{t \rightarrow 3^+} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx$$

Calculons  $\int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx$  par substitution. Posons  $u = x - 3$ , alors  $du = dx$  et

$$\text{Si } x = t, \quad u = t - 3$$

$$\text{Si } x = 5, \quad u = 5 - 3 = 2$$



$$\begin{aligned}\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \int_{t-3}^2 \frac{1}{\sqrt{u}} du = \lim_{t \rightarrow 3^+} \int_{t-3}^2 \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} du \\ &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \left[ \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_{t-3}^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow 3^+} [2\sqrt{u}]_{t-3}^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow 3^+} [2\sqrt{2} - 2\sqrt{t-3}] \\ &= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3-3} \\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

L'intégrale impropre converge.



## Exemple 2.5

Calculer  $\int_0^5 \frac{3}{x-2} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_0^5 \frac{3}{x-2} dx &= \int_0^2 \frac{3}{x-2} dx + \int_2^5 \frac{3}{x-2} dx \\ &= \underbrace{\lim_{t \rightarrow 2^-} \int_0^t \frac{3}{x-2} dx}_{I_1} + \underbrace{\lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^5 \frac{3}{x-2} dx}_{I_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1 &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_0^t \frac{3}{x-2} dx \quad (\text{substitution: } u = x - 2) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} [3 \ln |x - 2|]_0^t = \lim_{t \rightarrow 2^-} [3 \ln |t - 2| - 3 \ln |0 - 2|] \\ &= -\infty - 3 \ln 2 = -\infty \quad \text{diverge.}\end{aligned}$$

On conclut que l'intégrale  $\int_0^5 \frac{3}{x-2} dx$  est divergente. Notez qu'il est inutile de calculer  $I_2$ .

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

June 30, 2020



MAT1700  
X-ETE20

Les appli-  
cations de  
l'intégrale

Les  
surplus du  
produc-  
teur et du  
consom-  
mateur

1 Les applications de l'intégrale

2 Les surplus du producteur et du consommateur



## Section 1

# Les applications de l'intégrale



# L'aire d'une région bornée par deux courbes

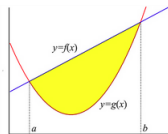
Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ .

Supposons que  $\mathcal{A}$  soit l'aire de la région délimitée par les courbes:  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  et les droites:  $x = a$ ,  $x = b$ .

Nous pouvons utiliser l'intégrale pour calculer, l'aire,  $\mathcal{A}$ .

- l'aire  $\mathcal{A}$  est donnée par:

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

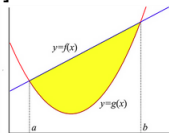




## L'aire d'une région bornée par deux courbes

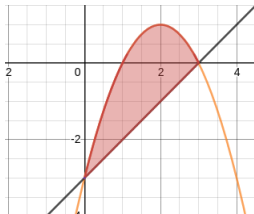
- Si  $f(x) \geq g(x)$  pour tout  $x$  dans  $[a, b]$ , alors l'aire  $\mathcal{A}$  est:

$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



- Si au contraire  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x$  dans  $[a, b]$ , alors l'aire  $\mathcal{A}$  est:

$$\mathcal{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$





# L'aire d'une région bornée par deux courbes

La procédure pour calculer l'aire entre les courbes  $y = f(x)$  et  $y = g(x)$  est la suivante:

- 1 Tracer les courbes considérées.
- 2 Trouver tous les points d'intersection de  $f$  et  $g$ , c'est-à-dire, tous les points où  $f(x) = g(x)$ .
- 3 Intégrer  $|f(x) - g(x)|$  sur les intervalles déterminés par les points d'intersection, et additionner les résultats obtenus.

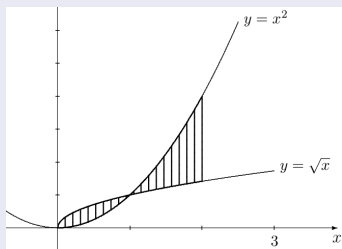
Si on ne précise pas un intervalle fermé  $[a, b]$ , il faut alors trouver **les points d'intersection** entre les courbes considérées, et évaluer l'intégrale définie entre la valeur minimale et la valeur maximale parmi ces points d'intersection.



## Exemple 1.1

- ① Calculer l'aire entre les courbes  $y = \sqrt{x}$  et  $y = x^2$  sur l'intervalle  $[0, 2]$ .

**Solution:** Il faut esquisser les deux courbes, puis hachurer la région délimitée par celles-ci dans  $[0, 2]$ . Ensuite, trouver leurs points d'intersection, c'est-à-dire, les points dans l'intervalle  $[0, 2]$  tels que  $\sqrt{x} = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} - x^2 = 0$ .



$$\begin{aligned} \sqrt{x} - x^2 = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x^4} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x \cdot x^3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{x^3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(1 - \sqrt{x^3}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \text{ ou } (1 - x^{\frac{3}{2}}) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x^{\frac{3}{2}} = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$



## L'aire d'une région bornée par deux courbes

## Solution - Exemple 1.1 - Suite

Les intervalles sur lesquels il faut intégrer sont donc  $[0, 1]$ , sur le quel la courbe  $y = \sqrt{x}$  est au dessus de la courbe  $y = x^2$ , c'est-à-dire,  $\sqrt{x} \geq x^2$  et  $[1, 2]$  sur lequel  $\sqrt{x} \leq x^2$ , comme nous pouvons le voir sur la figure précédente. **L'aire recherchée** est :

$$A = \int_0^2 |\sqrt{x} - x^2| dx = \int_0^1 |\sqrt{x} - x^2| dx + \int_1^2 |\sqrt{x} - x^2| dx.$$

Mais,

$$\text{Sur } [0, 1], \sqrt{x} \geq x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |\sqrt{x} - x^2| = \sqrt{x} - x^2.$$

$$\text{Sur } [1, 2], \sqrt{x} \leq x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow |\sqrt{x} - x^2| = -(\sqrt{x} - x^2).$$



## L'aire d'une région bornée par deux courbes

## Solution - Exemple 1.1 - Suite

Il vient que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^2 |\sqrt{x} - x^2| dx = \int_0^1 |\sqrt{x} - x^2| dx + \int_1^2 |\sqrt{x} - x^2| dx \\ &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx + \int_1^2 -(\sqrt{x} - x^2) dx \\ &= \left[ \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_1^2 \\ &= \left[ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \end{aligned}$$



## L'aire d'une région bornée par deux courbes

## Solution - Exemple 1.1 - Suite et fin

Il vient que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left[ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\ &= \left[ \left( \frac{2}{3} 1^{\frac{3}{2}} - \frac{1^3}{3} \right) - \left( \frac{2}{3} 0^{\frac{3}{2}} - \frac{0^3}{3} \right) \right] + \\ &\quad \left[ \left( \frac{2^3}{3} - \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} \right) - \left( \frac{1^3}{3} - \frac{2}{3} 1^{\frac{3}{2}} \right) \right] \\ &= \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$



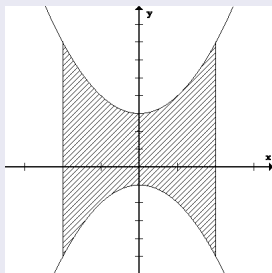
## L'aire d'une région bornée par deux courbes

## Exemple 1.2

① Calculer l'aire entre  $y = x^2 + 3$  et  $y = -x^2 - 1$  sur  $[-2, 2]$ .

**Solution:** La courbe  $y = x^2 + 3$  est la parabole tournée vers le haut, tandis que la courbe  $y = -x^2 - 1$  est la parabole tournée vers le bas.

D'après la figure, les deux courbes n'ont pas de points d'intersection.



D'après le graphe, la courbe  $y = x^2 + 3$  est au dessus de  $y = -x^2 - 1$  partout et donc en particulier sur  $[-2, 2]$ . Alors,  $x^2 + 3 \geq -x^2 - 1$  sur  $[-2, 2] \Rightarrow (x^2 + 3) - (-x^2 - 1) \geq 0$  alors,  $|(x^2 + 3) - (-x^2 - 1)| = (x^2 + 3) - (-x^2 - 1)$ .



## L'aire d'une région bornée par deux courbes

## Solution - Exemple 1.2 - Suite et fin

Puisque les deux courbes n'ont pas de points d'intersection, le seul intervalle sur lequel il faut intégrer est  $[-2, 2]$ . Il vient que:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 |(x^2 + 3) - (-x^2 - 1)| dx &= \int_{-2}^2 (x^2 + 3) - (-x^2 - 1) dx \\ &= \int_{-2}^2 (2x^2 + 4) dx \\ &= \left. \frac{2x^3}{3} + 4x \right|_{-2}^2 \\ &= \left( \frac{2}{3}(8) + 8 \right) - \left( \frac{2}{3}(-8) - 8 \right) \\ &= \frac{32}{3} + 16 = \frac{80}{3}\end{aligned}$$



## Solution - Exemple 1.2 - Fin

**Remarque:** On pouvait aussi déterminer que les deux courbes n'ont pas de points d'intersection en résolvant:

$$\begin{aligned}x^2 + 3 = -x^2 - 1 &\Leftrightarrow x^2 + 3 - (-x^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4/2 = -2.\end{aligned}$$

Impossible!!! Les deux courbes n'ont pas de points d'intersection.



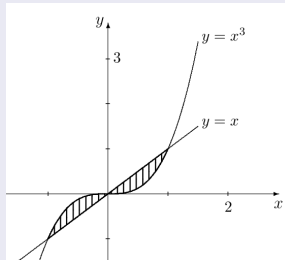
## L'aire d'une région bornée par deux courbes

## Exemple 1.3

- ① Calculer l'aire entre les courbes  $y = x$  et  $y = x^3$ .

**Solution:** Noter qu'ici les bornes d'intégration ne sont pas données explicitement. Esquissons le graphe, puis trouvons leurs points d'intersection:

$$\begin{aligned}x^3 &= x \\ \Leftrightarrow x^3 - x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0, x = 1, \text{ ou } x = -1.\end{aligned}$$



On en déduit que  $x = -1$ ,  $x = 0$  et  $x = 1$  sont des points d'intersection. D'après le graphe, la courbe  $y = x^3$  est au dessus de  $y = x$  dans l'intervalle  $[-1, 0]$ , et en dessous de  $y = x$  dans  $[0, 1]$ .



## L'aire d'une région bornée par deux courbes

## Solution - Exemple 1.3 - Suite et fin

Il vient que:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |x^3 - x| dx &= \int_{-1}^0 |x^3 - x| dx + \int_0^1 |x^3 - x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx \\ &= \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \left[ \left( \frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} \right) - \left( \frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4} \right) \right] + \\ &\quad \left[ \left( \frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} \right) - \left( \frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

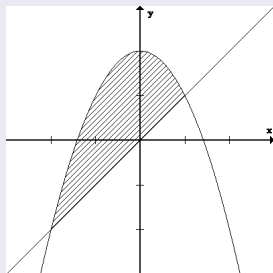


## Exemple 1.4

- ① Calculer l'aire entre les courbes  $y = 2 - x^2$  et  $y = x$ .

**Solution:** Noter également qu'ici les bornes d'intégration ne sont pas données explicitement. Esquissons le graphe, puis trouvons leurs points d'intersection:

$$\begin{aligned}2 - x^2 &= x \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -2 \text{ et } x = 1.\end{aligned}$$



On en déduit que  $x = -2$  et  $x = 1$  sont des points d'intersection.



## L'aire d'une région bornée par deux courbes

## Solution - Exemple 1.4 - Suite et fin

D'après le graphe, la courbe  $y = 2 - x^2$  est au dessus de  $y = x$  dans l'intervalle  $[-2, 1]$ . Il vient que:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 |(2 - x^2) - x| dx &= \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx \\ &= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-2}^1 \\ &= \left( -\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2(1) \right) - \\ &\quad \left( -\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 2(2) \right) \\ &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$



## Exemple 1.5

- 1 Calculer l'aire entre les courbes  $y = -x^2 + 8x$  et  $y = 2x + 5$  sur l'intervalle  $[0, 5]$ .
- 2 Calculer l'aire de la région bornée par les courbes  $y = x^2$  et  $y = 2 - x^2$ .



- On commence toujours par tracer les graphes des fonctions données. Puis on trouve leurs points d'intersection.
- Si  $[a, b]$  n'est pas donné, on trouve les points d'intersection entre les 02 courbes et on intègre entre ces points.
- On utilise toujours la fonction qui est au-dessus de l'autre en premier.
- Si par exemple  $x = c$  est un point d'intersection sur  $[a, b]$ , et que  $f(x)$  est au-dessus de  $g(x)$  sur  $[a, c]$  et  $g(x)$  au-dessus de  $f(x)$  sur  $[c, b]$ , alors

$$\text{Aire} = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$$



## Section 2

# Les surplus du producteur et du consommateur



# Les surplus du producteur et du consommateur

## Rappel de fonctions utilisées en Économie

- La **fonction demande** notée  $p(x)$  représente le prix par unité d'un produit quand la demande est  $x$ , c'-à-d, le prix quand les consommateurs sont prêts à acheter  $x$  unités de ce produit.
- La fonction **offre** notée  $S(x)$  donne le prix par unité d'un produit que les producteurs sont prêts à vendre quand la demande est  $x$ , c'-à-d, le prix quand les producteurs sont prêts à vendre  $x$  unités de ce produit.

## Définition 2.1

*Le **prix d'équilibre** du marché est le prix pour lequel la fonction demande et offre sont égales, c'-à-dire,  $S(x) = p(x)$ .*

*Le **point d'équilibre** est le point  $(x_0, p(x_0))$  ou  $(x_0, S(x_0))$  telle que  $p(x_0) = S(x_0)$ .*



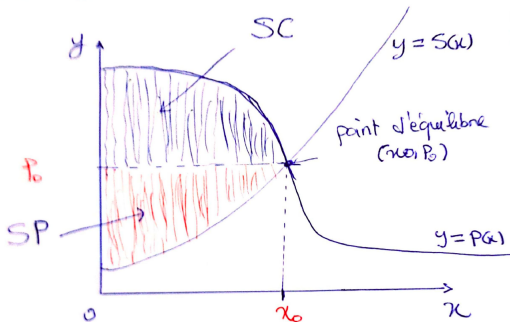
- Le **surplus des consommateurs (SC)**: mesure les gains réalisés par le consommateur.
- Le **surplus des producteurs (SP)**: mesure les gains réalisés par le producteur.
- Le surplus du consommateur et le surplus du producteur sont simplement des aires entre des courbes.



# Les surplus du producteur et du consommateur

Supposons que  $(x_0, p_0)$  est le point d'équilibre du marché.

- Le **surplus des consommateurs (SC)** est l'aire bornée par la courbe de la fonction **demande**,  $p(x)$  et la droite  $y = p_0$  entre  $0$  et  $x_0$ .
- Le **surplus des producteurs (SP)** est l'aire bornée par la courbe de la fonction **offre**,  $S(x)$  et la droite  $y = p_0$  entre  $0$  et  $x_0$ .



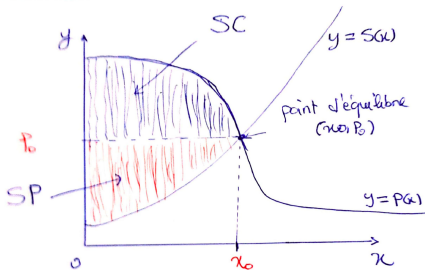


# Les surplus du producteur et du consommateur

Supposons que  $(x_0, p_0)$  est le point d'équilibre du marché.  
De ce qui précède, on déduit les formules suivantes:

$$SC = \int_0^{x_0} [p(x) - p_0] dx$$

$$SP = \int_0^{x_0} [p_0 - S(x)] dx$$



**Remarque:** Pour calculer les surplus (SC) et (SP), il faut:

- Déterminer le **point d'équilibre**  $(x_0, p_0)$  en résolvant  $p(x) = S(x)$ . Alors  $p_0 = p(x_0)$  ou  $p_0 = S(x_0)$ .
- Calculer les surplus par les formules données ci-haut.



## Exemple 2.1

Calculer le surplus du consommateur et le surplus du producteur si la demande est  $p(x) = 15 - x$  et l'offre  $S(x) = 3 + \frac{x}{2}$ .

**Solution:** Premièrement, trouvons le point d'équilibre :

$$\begin{aligned} p(x) = S(x) &\Leftrightarrow 15 - x = 3 + \frac{x}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 12 \Rightarrow x = 8. \end{aligned}$$

Alors  $x_0 = 8$  et ainsi  $p_0 = p(8) = 15 - 8 = 7$ . Alors le point  $(8, 7)$  est le point d'équilibre.



## Solution - Exemple 2.1 - Suite et fin

Il suit que **le surplus du consommateur** est :

$$\begin{aligned} SC &= \int_0^{x_0} (p(x) - p_0) dx \\ &= \int_0^8 (15 - x - 7) dx \\ &= \int_0^8 (8 - x) dx \\ &= 8x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^8 = 32\$ \end{aligned}$$



## Solution - Exemple 2.1 - Fin

De même, le surplus du producteur est :

$$\begin{aligned} SP &= \int_0^{x_0} (p_0 - S(x)) dx = \int_0^8 \left(7 - 3 - \frac{x}{2}\right) dx \\ &= 4x - \frac{x^2}{4} \Big|_0^8 = 16\$ \end{aligned}$$



## Exemple 2.2

Calculer le surplus du consommateur et le surplus du producteur si la demande est  $p(x) = 9e^{-x}$  et l'offre  $S(x) = e^x$ .

**Solution:** On trouve le point d'équilibre:

$$\begin{aligned} p(x) = S(x) &\Leftrightarrow 9e^{-x} = e^x \\ &\Leftrightarrow 9 = e^{2x} \Leftrightarrow 2x = \ln 9. \\ &\Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \ln 9 = \ln 9^{\frac{1}{2}} = \ln 3 \end{aligned}$$

Alors  $p_0 = p(x_0) = S(x_0) = e^{\ln 3} = 3$ , et

$$SC = \int_0^{\ln 3} (9e^{-x} - 3) dx = [-9e^{-x} - 3x]_0^{\ln 3} = 6 - \ln 27.$$

$$SP = \int_0^{\ln 3} (3 - e^x) dx = [3x - e^x]_0^{\ln 3} = \ln 27 - 2.$$

MAT1700 X  
MÉTHODES MATHÉMATIQUES I  
ETE 2020

Département de Mathématiques & Statistique  
Université d' Ottawa

July 19, 2020



MAT1700  
X-ETE20

Intégrales  
impropres

Les  
fonctions  
à  
plusieurs  
variables

Les  
dérivées  
partielles

Les extré-  
mums des  
fonctions  
à deux  
variables

1 Intégrales impropres

2 Les fonctions à plusieurs variables

3 Les dérivées partielles

4 Les extrémums des fonctions à deux variables



## Section 1

# Intégrales impropres



## Définition 1.1

Une *intégrale impropre de type II* est une intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  dont l'intégrande  $f(x)$  possède au moins une *discontinuité* sur l'intervalle  $[a, b]$  et présente une asymptote verticale à cet endroit.

## Exemple 1.1

Voici quelques exemples d'intégrales impropres de II:

❶  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  [discontinuité et asymptote verticale (AV) en 0]

❷  $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$  [discontinuité et AV en  $x = 2$ ]

❸  $\int_{-2}^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx$  (discontinuité en  $x = -1$ )



## Intégrales impropres du type II

- ① Supposons que  $f(x)$  est continue sur  $[a, b)$  et que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty, \text{ alors}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx. \quad (1)$$

- ② Supposons que  $f(x)$  est continue sur  $(a, b]$  et que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \text{ alors}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx. \quad (2)$$

Les intégrales impropres (1) et (2) sont dite **convergentes** si les limites qui les définissent existent (c-à-d, sont des nombres réels) et **divergentes** dans le cas contraire.



## Intégrales impropres du type II

- ③ Supposez que  $f(x)$  est continue sur  $[a, b]$  sauf pour un certain  $c$  dans  $(a, b)$  où  $f$  tend vers l'infini, alors:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx & (3) \\ &= \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x) dx,\end{aligned}$$

où  $c$  désigne n'importe quel nombre réel.

Dans ce cas, l'intégrale impropre (3) **converge** si ces deux dernières limites existent. Elle **diverge** si au moins l'une des deux limites est infinie.



## Exemple 1.2

$$\text{Calculer } \int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx.$$

La fonction  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$  n'est pas définie en  $x = 3$  et

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = +\infty. \text{ Il suit que:}$$

$$\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx = \lim_{t \rightarrow 3^+} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx$$

Calculons  $\int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx$  par substitution. Posons  $u = x - 3$ ,  
alors  $du = dx$  et

$$\text{Si } x = t, \quad u = t - 3$$

$$\text{Si } x = 5, \quad u = 5 - 3 = 2$$



$$\begin{aligned}\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \int_t^2 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \int_{t-3}^2 \frac{1}{\sqrt{u}} du = \lim_{t \rightarrow 3^+} \int_{t-3}^2 \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} du \\ &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \left[ \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_{t-3}^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow 3^+} [2\sqrt{u}]_{t-3}^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow 3^+} [2\sqrt{2} - 2\sqrt{t-3}] \\ &= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3-3} \\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

L'intégrale impropre converge.



## Exemple 1.3

Calculer  $\int_0^5 \frac{3}{x-2} dx$ .

$$\begin{aligned} \int_0^5 \frac{3}{x-2} dx &= \int_0^2 \frac{3}{x-2} dx + \int_2^5 \frac{3}{x-2} dx \\ &= \underbrace{\lim_{t \rightarrow 2^-} \int_0^t \frac{3}{x-2} dx}_{I_1} + \underbrace{\lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^5 \frac{3}{x-2} dx}_{I_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_0^t \frac{3}{x-2} dx \quad (\text{substitution: } u = x - 2) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} [3 \ln |x - 2|]_0^t = \lim_{t \rightarrow 2^-} [3 \ln |t - 2| - 3 \ln |0 - 2|] \\ &= -\infty - 3 \ln 2 = -\infty \quad \text{diverge.} \end{aligned}$$

On conclut que l'intégrale  $\int_0^5 \frac{3}{x-2} dx$  est divergente. Notez qu'il est inutile de calculer  $I_2$ .



## Section 2

# Les fonctions à plusieurs variables



## Motivation

Supposez que vous gérez une entreprise qui produit deux types d'articles:

- Soit  $x_1$  la quantité du premier article (type 1).
- Soit  $x_2$  la quantité du deuxième article (type 2).

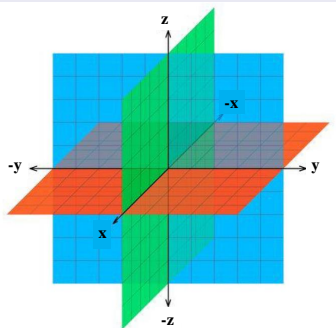
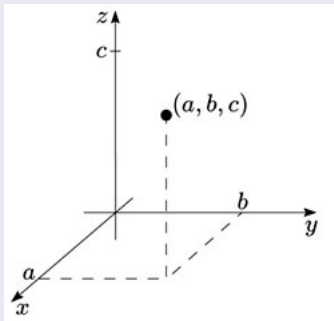
Alors les fonctions **profit**, **revenu**, et **coût** vont dépendre de  $x_1$  et  $x_2$ . Typiquement nous écrivons  $P(x_1, x_2)$ ,  $R(x_1, x_2)$ , et  $C(x_1, x_2)$ .

Généralement, ces fonctions dépendent de plusieurs variables, tels que le nombre d'employés, le coût des matériaux, et ainsi de suite:  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$  etc.

Dans ce partie, nous allons définir les fonctions à plusieurs variables indépendantes. Nous allons aussi développer les outils nécessaires pour trouver les maximums et minimums de ces fonctions.

Espace cartésien tridimensionnel  $\mathbb{R}^3$ 

C'est un système de trois axes de coordonnées: l'axe des  $x$ , l'axe des  $y$  et l'axe des  $z$ . Ces 03 axes forment 03 plans perpendiculaires deux-à-deux: le plan  $xy$ , le plan  $xz$  et le plan  $yz$ .



Chaque point dans l'espace cartésien est une représentation d'un triplet  $(x, y, z)$  de coordonnées.

Equations du plan dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ 

L'équation générale d'un plan de vecteur normal  $\vec{n}(a, b, c)$  est:

$$ax + by + cz = d$$

où  $a, b, c, d$  sont des constantes.

Equations de la sphère dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ 

Dans  $\mathbb{R}^3$ , une **sphère** de rayon  $r$  centrée au point  $(a, b, c)$  a pour équation:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$



Nous allons nous concentrer sur les fonctions à deux variables.

### Définition 2.1

Une **fonction à deux variables**  $x$  et  $y$  est une relation qui associe à chaque paire ordonnée de réels  $(x, y)$  dans le plan  $xy$  ( $\mathbb{R}^2$ ), un nombre réel unique  $z$ . On note:

$$\begin{aligned} f : \text{Dom}_f \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto z = f(x, y) \in \text{Im}_f. \end{aligned}$$

L'expression analytique  $z = f(x, y)$  traduit cette relation.

- $z$  est appelée **la variable dépendante**, et  $x$  et  $y$  sont **les variables indépendantes**.
- Le **domaine**  $f$  est:  
 $\text{Dom}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f \text{ est définie}\}$ .
- **L'image** de  $f$  est tous les nombres  $f(x, y)$  avec  $(x, y)$  choisies dans le domaine:  $\text{Im}_f = \{f(x, y), (x, y) \in \text{Dom}_f\}$ .



- Dans le cas des fonctions à **deux variables**, le **domaine de définition** est un sous-ensemble du plan-xy ( $\mathbb{R}^2$ ).
- L'**image** de  $f$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ .
  - Si  $f(x, y) = x^2 + 3y^3 - 4xy$ , l'image du point  $(2, 1)$  est:

$$f(2, 1) = 2^2 + 3(1)^3 - 4(2)(1) = -1, \text{ c'-à-d,}$$

le point  $(2, 1, f(2, 1)) = (2, 1, -1)$  est sur le graphe de  $f$ .

- Notez que les mêmes règles et conditions sur les domaines de définition des **fonctions à une seule variable** s'appliquent pour **les fonctions à plusieurs variables** (tout ce qui est sous le radical doit être positif, dénominateur différent de 0, ...)



## Exemple 2.1

Décrivez le domaine des fonctions suivantes:

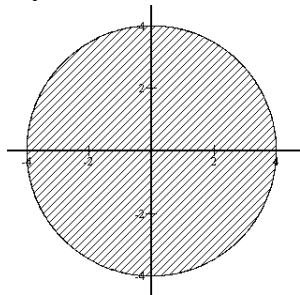
$$a) f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \quad b) g(x, y) = e^{xy^2}$$

**Solution:** a) Puisque nous avons une racine carrée, il faut que  $16 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 16 \geq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 16$ .

L'équation d'un cercle centré à l'origine et de rayon  $r$  est:  $x^2 + y^2 = r^2$ . Le domaine recherché est représenté par la région intérieure du cercle de rayon 4 et centré à l'origine.

C'est un disque de rayon 4 centré à l'origine.

b) Si  $g(x, y) = e^{xy^2}$ , alors  $\text{Dom}_g = \mathbb{R}^2$ .





## Exemple 2.2

Décrivez le domaine des fonctions suivantes:

a)  $h(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

b)  $f(x, y) = x^2 + y^3 + x^2y$

**Solution:** a) Le domaine de la fonction  $h$  est:

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  puisque  $(0, 0)$  est le seul point où  $h$  n'est pas défini. L'image de  $h$  est  $]0, +\infty]$  puisque  $h(x, y) > 0$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

b) Si  $f(x, y) = x^2 + y^3 + x^2y$ , alors  $\text{Dom}_f = \mathbb{R}^2$ .

## Exemple 2.3

Décrivez le domaine des fonctions suivantes:

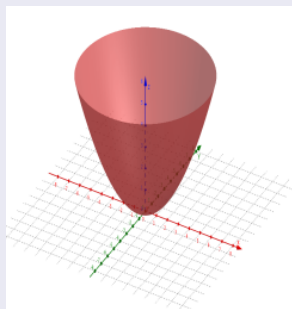
a)  $f(x, y) = \ln(4 - x - y)$

b)  $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

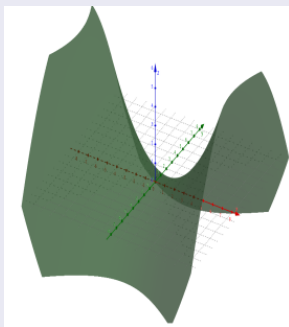


Le graphe d'une fonction à une variable  $y = f(x)$  est une **courbe** dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , tandis que le graphe d'une fonction à plusieurs variables est une **surface** dans  $\mathbb{R}^3$ .

## Les surfaces dans l'espace $\mathbb{R}^3$



$$z = x^2 + y^2$$



$$z = x^2 - y^2$$



## Section 3

# Les dérivées partielles



## Motivation

Pour les fonctions à **une seule variable**, on avait utilisé la dérivée.  
Pour les fonctions à **plusieurs variables**, on utilisera la notion de **dérivée partielle**, puisqu'on a plusieurs variables indépendantes.

Une fonction de deux variables  $z = f(x, y)$  aura deux dérivées partielles:

- la dérivée partielle par rapport à  $x$
- la dérivée partielle par rapport à  $y$



## Définition 3.1

Soit  $f$  une fonction à deux variables. La **dérivée partielle** de  $f$  par rapport à  $x$  au point  $(x, y)$ , notée  $f_x(x, y)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ , est définie par:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}, \quad \text{si cette limite existe.}$$

De même, La **dérivée partielle** de  $f$  par rapport à  $y$  au point  $(x, y)$ , notée  $f_y(x, y)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ , est définie par:

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}, \quad \text{si cette limite existe.}$$

- Si  $f_x(x, y)$  et  $f_y(x, y)$  existent, on dit que  $f$  est **dérivable** (ou **différentiable**) au point  $(x, y)$ .
- Si  $f_x(x, y)$  et  $f_y(x, y)$  existent pour tout  $(x, y)$  dans le domaine de  $f$ , on dit que  $f$  **dérivable** sur  $\text{Dom}_f$ .



- Pour calculer  $f_x(x, y)$  on dérive  $f$  par rapport à  $x$  en considérant  $y$  comme une **constante**, tout en appliquant les **règles de dérivation**.
- Egalement, pour calculer  $f_y(x, y)$  on dérive  $f$  par rapport à  $y$  en considérant  $x$  comme une **constante**.

### Exemple 3.1

Soit  $f(x, y) = 2xy + 3xy^2$ . Évaluez  $f_x(2, 1)$  et  $f_y(2, 1)$ .

$$\begin{aligned} \text{Solution : } f_x(x, y) &= 2y + 3y^2 \Rightarrow f_x(2, 1) = 2(1) + 3(1)^1 = 5 \\ f_y(x, y) &= 2x + 6xy \Rightarrow f_y(2, 1) = 2(2) + 6(2)(1) = 16 \end{aligned}$$



## Exemple 3.2

Trouvez les dérivées partielles des fonctions suivantes:

a)  $f(x, y) = x^2y^3 + xy + 4y^2$     b)  $f(x, y) = e^{2x+3y}$

c)  $g(x, y) = 4x^2y + x^3y^3 + y$     d)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

a)  $f_x(x, y) = 2xy^3 + y$ ;  $f_y(x, y) = 3x^2y^2 + x + 8y$

b)  $f_x(x, y) = 2e^{2x+3y}$ ;  $f_y(x, y) = 3e^{2x+3y}$

c)  $g_x(x, y) = 8xy + 3x^2y^3$ ;  $g_y(x, y) = 4x^2 + 3x^3y^2 + 1$

d)  $f_x(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

$f_y(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

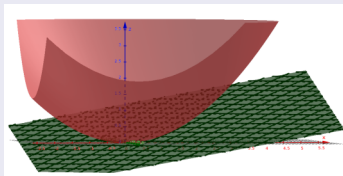


- Si  $f$  est une fonction à une variable dérivable en  $a$ , nous avons vu que l'équation de la droite tangente à la courbe  $y = f(x)$  au point  $(a, f(a))$  est donnée par:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

- Si  $f$  est une fonction à plusieurs variables dérivable en  $(a, b)$ , alors l'équation du plan tangent à la surface  $z = f(x, y)$  au point  $(a, b, f(a, b))$  est donnée:

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b).$$





## Exemple 3.3

Déterminer l'équation du plan tangent à la surface  $z = f(x, y)$  aux points indiqués:

a)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$  au point  $(2, 0, 2)$

b)  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  au point  $(1, 0, e^{-1})$

**Solution:**

On a  $f(2, 0) = \sqrt{2^2 - 0^2} = \sqrt{4} = 2$ .

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \quad \text{et} \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}. \quad \text{Ainsi,}$$

$$f_x(2, 0) = \frac{2}{\sqrt{2^2 - 0^2}} = 1 \quad \text{et} \quad f_y(2, 0) = \frac{-0}{\sqrt{2^2 - 0^2}} = 0.$$

L'équation du plan tangent est:

$$\begin{aligned} z &= f_x(2, 0)(x - 2) + f_y(y - 0) + f(2, 0) \\ &= 1(x - 2) + 0(y - 0) = x - 2 \end{aligned}$$



## Dérivée partielles d'ordre deux

Les **dérivées partielles premières**,  $f_x(x, y)$  et  $f_y(x, y)$  d'une fonction à plusieurs variables  $f(x, y)$  sont aussi des fonctions à deux variables.

Comme pour les dérivées d'une fonction à une variable, on peut prendre la deuxième dérivée et les dérivées d'ordre supérieur pour les fonctions à plusieurs variables.

Puisqu'une fonction à deux variables  $f(x, y)$  a deux **premières dérivées**, et que chacune à son tour a **deux dérivées partielles**, la fonction  $f(x, y)$  a quatre dérivées partielles secondes.



## Dérivées partielles d'ordre supérieur

La **dérivée seconde** de  $f(x, y)$  par rapport à  $x$ , notée  $f_{xx}(x, y)$  ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ , si elle existe, est:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}[f_x(x, y)].$$

La **dérivée seconde** de  $f(x, y)$  par rapport à  $y$ , notée  $f_{yy}(x, y)$  ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ , si elle existe, est:

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}[f_y(x, y)].$$

Les deux **dérivées secondes mixtes** de  $f(x, y)$ , notées

$f_{xy}(x, y)$  (ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ) et  $f_{yx}(x, y)$  (ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ), si elles existent, sont:

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}[f_x(x, y)]; \quad f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}[f_y(x, y)].$$

**Remarque:**  $f_{xy}(x, y)$  n'est pas toujours égales à  $f_{yx}(x, y)$ .  
Cependant,  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$  si la fonction  $f$  est continue.



## Exemple 3.4

Soit  $f(x, y) = x^2y^3 + x^4y + xe^y$ . Calculez les 4 dérivées secondes. En déduire  $f_{xx}(2, 1)$ .

**Solution:** Nous calculons les dérivées partielles premières

$$f_x = 2xy^3 + 4x^3y + e^y; \quad f_y = 3x^2y^2 + x^4 + xe^y$$

Nous avons:

$$f_{xx} = 2y^3 + 12x^2y; \quad f_{yy} = 6x^2y + xe^y$$

$$f_{xy} = 6xy^2 + 4x^3 + e^y; \quad f_{yx} = 6xy^2 + 4x^3 + e^y$$

$$f_{xx} = 2y^3 + 12x^2y \Rightarrow f_{xx}(2, 1) = 2(1)^3 + 12(2)^2(1) = 50$$



## Exemple 3.5

Soit  $f(x, y) = x \ln y + ye^x$ . Calculez les 4 deuxièmes dérivées.

**Solution:** Nous calculons les dérivées partielles premières

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(x \ln y + ye^x) = \ln y + ye^x$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(x \ln y + ye^x) = \frac{x}{y} + e^x$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\ln y + ye^x) = ye^x; \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y} + e^x\right) = \frac{-x}{y^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\ln y + ye^x) = \frac{1}{y} + e^x; \quad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y} + e^x\right) = \frac{1}{y} + e^x$$



## Dérivées partielles d'ordre 2

La fonction  $f(x, y)$  a quatre deuxièmes dérivées:

- $f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} f_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =$  dérivée par rapport à  $x$  deux fois de suite.
- $f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} f_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$  dérivée par rapport à  $y$  deux fois de suite.
- $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} f_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} =$  dérivée par rapport à  $x$  ensuite par rapport à  $y$ .
- $f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} f_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =$  dérivée par rapport à  $y$  ensuite par rapport à  $x$ .



# Points critiques d'une fonction à plusieurs variables

## Définition 3.2

Un point  $(a, b)$  est un **point critique** pour une fonction à plusieurs variables,  $f(x, y)$ , si  $(a, b)$  est dans le domaine de  $f(x, y)$  et

a)  $f_x(a, b) = 0$  et  $f_y(a, b) = 0$ , ou

b) au moins une des dérivées partielles  $f_x(a, b)$  et  $f_y(a, b)$  n'existe pas.

**Remarque:** Les **points critiques**  $(a, b)$  d'une fonction à plusieurs variables que nous considérons dans ce cours seront les **points où**  $f_x(a, b) = 0$  et  $f_y(a, b) = 0$ ,.

Pour trouver les points critiques de  $f(x, y)$ . Il faut:

- Calculez  $f_x$  et  $f_y$
- Posez chacune des dérivées partielles égale à 0.
- Résolvez  $f_x = 0$  et  $f_y = 0$  pour  $x$  et  $y$ .



## Points critiques d'une fonction à plusieurs variables

## Exemple 3.6

Trouvez tous les points critiques de

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

**Solution:** Nous calculons les dérivées partielles premières

$$f_x = 4x^3 - 4y \quad \text{et} \quad f_y = 4y^3 - 4x$$

$$f_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^3 - 4y = 0 \Rightarrow x^3 - y = 0 \quad (4)$$

$$f_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 4y^3 - 4x = 0 \Rightarrow y^3 - x = 0. \quad (5)$$

De (4), on a  $y = x^3$ . En remplaçant  $y = x^3$  dans l'équation (5) on a:  $(x^3)^3 - x = 0 \Rightarrow x^9 - x = 0 \Rightarrow x(x^8 - 1) = 0$ . Alors on a:

$$\begin{aligned} x(x^8 - 1) = 0 &\Rightarrow x((x^4)^2 - 1^2) = 0 \\ &\Rightarrow x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0 \end{aligned}$$



**Solution (suite):** Alors on a:

$$\begin{aligned}x(x^8 - 1) = 0 &\Rightarrow x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0 \\&\Rightarrow x((x^2)^2 - 1)(x^4 + 1) = 0 \\&\Rightarrow x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0 \\&\Rightarrow x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0.\end{aligned}$$

Alors  $x = 0$ ,  $x - 1 = 0$ ,  $x + 1 = 0$ , car  $x^2 + 1 \neq 0$ , et  $x^4 + 1 \neq 0$ , c'est-à-dire,  $x = 0$ ,  $x = 1$ , et  $x = -1$ .

- Pour  $x = 0$ ,  $y = x^3 = 0^3 = 0$ . On a le point  $(0, 0)$ .
- Pour  $x = 1$ ,  $y = x^3 = 1^3 = 1$ . On a le point  $(1, 1)$ .
- Pour  $x = -1$ ,  $y = (-1)^3 = -1$ . On a le point  $(-1, -1)$ .

Donc  $f$  admet trois points critiques:  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  et  $(-1, -1)$ .



## Section 4

# Les extrémums des fonctions à deux variables



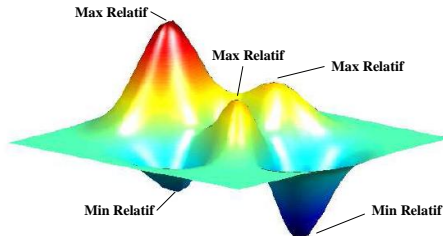
# Les extrêmes (ou Extrêma) locaux d'une fonction à deux variables

MAT1700  
X-ETE20Intégrales  
impropresLes  
fonctions  
à  
plusieurs  
variablesLes  
dérivées  
partiellesLes extrêmes  
des  
fonctions  
à deux  
variables

## Définition 4.1

Soit  $f$  une fonction définie sur une région contenant le point  $(x_0, y_0)$ .

- Alors  $f$  admet un **maximum local** en  $(x_0, y_0)$  s'il existe une région  $R$  du domaine de  $f$  contenant  $(x_0, y_0)$  telle que  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  pour tout  $(x, y)$  dans  $R$ .
- De même,  $f$  admet un **minimum local** en  $(x_0, y_0)$  s'il existe une région  $R$  du domaine de  $f$  contenant  $(x_0, y_0)$  telle que  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$  pour tout  $(x, y)$  dans  $R$ .





# Les extrêmmums (ou Extrêma) locaux d'une fonction à deux variables

Le résultat suivant nous permet de classifier les points critiques :

## Théorème 4.1 (Le test de la deuxième dérivée)

Soit  $f(x, y)$  une fonction à deux variables deux fois dérivable.

Soit  $(a, b)$  un **point critique** de  $f$ , c'-à-d,  $f_x(a, b) = 0$  et  $f_y(a, b) = 0$ . Supposons que

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2. \quad \text{Alors}$$

- 1 Si  $D > 0$  et  $f_{xx}(a, b) < 0$ ,  $f$  a un **maximum local** en  $(a, b)$
- 2 Si  $D > 0$  et  $f_{xx}(a, b) > 0$ ,  $f$  a un **minimum local** en  $(a, b)$
- 3 Si  $D < 0$ ,  $f$  a un **point de selle** en  $(a, b)$ .
- 4 Si  $D = 0$ , le test ne donne aucune information.

**Remarque:** Soit  $(a, b)$  un point critique de  $f$ . Si  $f$  n'admet pas de maximum local ou de minimum local en  $(a, b)$ , on dit que  $(a, b)$  est un **point selle**.



# Les extrêums (ou Extrêma) locaux d'une fonction à deux variables

## Exemple 4.1

Soit  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ . Trouvez et classifiez les points critiques de  $f$ .

**Solution:** D'après l'Exemple 3.6,  $f$  admet trois points critiques:  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  et  $(-1, -1)$  et on avait

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 4y \\ f_y = 4y^3 - 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = 12x^2 \\ f_{yy} = 12y^2 \\ f_{xy} = -4 \end{cases}$$

- Nature du point critique  $(0, 0)$ :

$$\begin{cases} f_{xx} = 12x^2 \\ f_{yy} = 12y^2 \\ f_{xy} = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}(0, 0) = 12(0)^2 = 0 \\ f_{yy}(0, 0) = 12(0)^2 = 12(0)^2 = 0 \\ f_{xy}(0, 0) = -4 \end{cases}$$



# Les extrêmes (ou Extrêma) locaux d'une fonction à deux variables

**Solution (suite):** On en déduit que

$$D = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 = (0)(0) - (-4)^2 = -16 < 0.$$

Alors  $D < 0$  et le point critique  $(0, 0)$  est un point **selle**.

- Nature du point critique  **$(1, 1)$** :

$$\begin{cases} f_{xx} = 12x^2 \\ f_{yy} = 12y^2 \\ f_{xy} = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}(1, 1) = 12(1)^2 = 12 \\ f_{yy}(1, 1) = 12y^2 = 12(1)^2 = 12 \\ f_{xy}(1, 1) = -4 \end{cases}$$

$$D = f_{xx}(1, 1)f_{yy}(1, 1) - [f_{xy}(1, 1)]^2 = (12)(12) - (-4)^2 = 128 > 0.$$

Alors  $D > 0$  et  $f_{xx}(1, 1) = 12(1)^2 = 12 > 0$ . D'où le point critique  $(1, 1)$  est un **minimum local**.



# Les extrêmes (ou Extrêma) locaux d'une fonction à deux variables

MAT1700  
X-ETE20Intégrales  
impropresLes  
fonctions  
à  
plusieurs  
variablesLes  
dérivées  
partiellesLes extrêmes  
des  
fonctions  
à deux  
variables

## Solution (fin):

- Nature du point critique  $(-1, -1)$ :

$$\begin{cases} f_{xx} = 12x^2 \\ f_{yy} = 12y^2 \\ f_{xy} = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}(-1, -1) = 12(-1)^2 = 12 \\ f_{yy}(-1, -1) = 12y^2 = 12(-1)^2 = 12 \\ f_{xy}(-1, -1) = -4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D &= f_{xx}(-1, -1)f_{yy}(-1, -1) - [f_{xy}(-1, -1)]^2, \\ &= (12)(12) - (-4)^2 = 128 > 0. \end{aligned}$$

Alors  $D > 0$  et  $f_{xx}(-1, -1) = 12(-1)^2 = 12 > 0$ . D'où le point critique  $(-1, -1)$  est un **minimum local**.



# Les extrêmmums (ou Extrêma) locaux d'une fonction à deux variables

## Exemple 4.2

Soit  $f(x, y) = -2x^2 - y^2 + 8x - 6y + 20$ . Trouvez et classifiez les points critiques de  $f$ .

**Solution :**  $f_x = -4x + 8$  et  $f_y = -2y - 6$

$$f_x = 0 \Rightarrow -4x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f_y = 0 \Rightarrow -2y - 6 = 0 \Rightarrow y = -3.$$

Alors le point  $(2, -3)$  est le seul point critique de  $f$ . On aussi

$$f_{xx} = -4; \quad f_{yy} = -2, \text{ et } f_{xy} = 0.$$

- Nature du point critique  $(2, -3)$ :

$$\begin{cases} f_{xx}(2, -3) = -4 \\ f_{yy}(2, -3) = -2 \\ f_{xy}(2, -3) = 0 \end{cases}$$



# Les extrêmes (ou Extrêma) locaux d'une fonction à deux variables

MAT1700  
X-ETE20Intégrales  
impropresLes  
fonctions  
à  
plusieurs  
variablesLes  
dérivées  
partiellesLes extrêmes  
des  
fonctions  
à deux  
variables

Solution (fin):

- Nature du point critique  $(2, -3)$ :

$$\begin{cases} f_{xx}(2, -3) = -4 \\ f_{yy}(2, -3) = -2 \\ f_{xy}(2, -3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D &= f_{xx}(2, -3)f_{yy}(2, -3) - [f_{xy}(2, -3)]^2, \\ &= (-4)(-2) - (0)^2 = 8 > 0. \end{aligned}$$

Alors  $D > 0$  et  $f_{xx}(2, -3) = -4 < 0$ . D'où le point critique  $(2, -3)$  est un **maximum local**.