Chapitre 1

Fonctions

1. Calculer le domaine des fonctions suivantes.

   a) $a(x) = \dfrac{3}{2x-3}$

   b) $b(x) = \dfrac{x-2}{5x+2}$

   c) $c(x) = \sqrt{x+7}$

   d) $d(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{x+7}}$

   e) $e(x) = \sqrt{8-2x}$

   f) $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{8-2x}}$

   g) $g(x) = \ln(x-5)$

   h) $h(x) = \dfrac{1}{\ln(x-5)}$

   i) $i(x) = \dfrac{\sqrt{5-x}}{\ln(x+3)}$

   j) $j(x) = \dfrac{\sqrt{18-x}}{(x-9)\ln(x+9)}$

2. Construire le tableau des signes des fonctions suivantes.

   a) $a(x) = \dfrac{x+3}{5-x}$

   b) $b(x) = \dfrac{x^2+14x+49}{x-3}$

   c) $c(x) = \dfrac{x^2-5x-36}{x^2-2x+1}$

3. Avec les fonctions $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ de la **Question 2**, calculer le domaine des fonctions suivantes.

   a) $\sqrt{a(x)}$

   b) $\ln(a(x))$

   c) $\sqrt{b(x)}$

   d) $\ln(b(x))$

   e) $\sqrt{c(x)}$

   f) $\ln(c(x))$

Réponses

1. a) $\text{dom}(a) =]-\infty, 1.5[\cup]1.5, \infty[$
   b) $\text{dom}(b) =]-\infty, -0.4[\cup]-0.4, \infty[$
   c) $\text{dom}(c) = [-7, \infty[$
   d) $\text{dom}(d) =]-7, \infty[$
   e) $\text{dom}(e) =]-\infty, 4]$
   f) $\text{dom}(f) =]-\infty, 4[$
   e) $\text{dom}(g) =]5, \infty[$
   f) $\text{dom}(h) =]5, 6[\cup]6, \infty[$
   i) $\text{dom}(i) =]-3, -2[\cup]-2, 5]$
   j) $\text{dom}(j) =]-9, -8[\cup]-8, 9[\cup]9, 18]$

2. a)

x	$]-\infty, -3[$	-3	$]-3, 5[$	5	$]5, \infty[$
signe de $a(x)$	-	0	+	n.d.	-

b)

x	$]-\infty, -7[$	-7	$]-7, 3[$	3	$]3, \infty[$
signe de $b(x)$	-	0	-	n.d.	+

c)

x	$]-\infty, -4[$	-4	$]-4, 1[$	1	$]1, 9[$	9	$]9, \infty[$
signe de $c(x)$	+	0	-	n.d.	-	0	+

3. a) $\text{dom}\left(\sqrt{a(x)}\right) = [-3, 5[$
   b) $\text{dom}\left(\ln(a(x))\right) =]-3, 5[$
   c) $\text{dom}\left(\sqrt{b(x)}\right) = \{-7\} \cup]3, \infty[$
   d) $\text{dom}\left(\ln(b(x))\right) =]3, \infty[$
   e) $\text{dom}\left(\sqrt{c(x)}\right) =]-\infty, -4] \cup [9, \infty[$
   f) $\text{dom}\left(\ln(c(x))\right) =]-\infty, -4[\cup]9, \infty[$

Solutions (DGD)

1. b) • $\dfrac{1}{A} \iff A \neq 0$: Ici $A = 5x + 2$,

$$\begin{aligned} 5x + 2 &\neq 0 \\ 5x &\neq -2 \\ x &\neq \frac{-2}{5} \\ x &\neq -0.4. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{dom}(b) = \mathbb{R} \setminus \{-0.4\} =]-\infty, -0.4[\cup]-0.4, \infty[$.

e) • $\sqrt{A} \iff A \geqslant 0$: Ici $A = 8 - 2x$,

$$\begin{aligned} 8 - 2x &\geqslant 0 \\ 8 &\geqslant 2x \\ \frac{8}{2} &\geqslant x \\ 4 &\geqslant x \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{dom}(e) =]-\infty, 4]$.

f) • $\sqrt{A} \iff A \geqslant 0$: Ici $A = 8 - 2x$ et de la Question 1 e) $x \leqslant 4$.

• $\dfrac{1}{A} \iff A \neq 0$: Ici $A = \sqrt{8 - 2x}$ et $\sqrt{8 - 2x} = 0$ si et seulement si $x = 4$, donc

$$x = 4 \notin \mathrm{dom}(f).$$

Ainsi $\mathrm{dom}(f) =]-\infty, 4[$.

g) • $\ln(A) \iff A > 0$: Ici $A = x - 5$,

$$\begin{aligned} x - 5 &> 0 \\ x &> 5. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{dom}(g) =]5, \infty[$.

h) • $\ln(A) \iff A > 0$: Ici $A = x - 5$ et de la Question 1 g) $x > 5$.

• $\dfrac{1}{A} \iff A \neq 0$: Ici $A = \ln(x - 5)$,

$$\begin{aligned} \ln(x - 5) &\neq 0 \\ x - 5 &\neq 1 \\ x &\neq 6. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{dom}(h) =]5, 6[\cup]6, \infty[$.

j)
- $\frac{1}{A} \iff A \neq 0$:
  Avec $A = x - 9$,
  $$\begin{aligned} x - 9 &\neq 0 \\ x &\neq 9. \end{aligned}$$
  Avec $A = \ln(x+9)$,
  $$\begin{aligned} \ln(x+9) &\neq 0 \\ x + 9 &\neq 1 \\ x &\neq -8. \end{aligned}$$
- $\ln(A) \iff A > 0$: Ici $A = x + 9$,
  $$\begin{aligned} x + 9 &> 0 \\ x &> -9. \end{aligned}$$
- $\sqrt{A} \iff A \geqslant 0$: Ici $A = 18 - x$,
  $$\begin{aligned} 18 - x &\geqslant 0 \\ 18 &\geqslant x \end{aligned}$$

Ainsi $\text{dom}(j) =]-9, -8[\cup]-8, 9[\cup]9, 18]$.

2. a) La fonction est non-définie lorsque $x - 5 = 0$, donc à $x = 5$. La fonction a un zéro lorsque $x + 3 = 0$, donc à $x = -3$.
   - Pour $x < -3$, puisque $f(-4) = -1/9 < 0$ par exemple, alors $a(x)$ est strictement négative.
   - Pour $-3 < x < 4$, puisque $f(0) = 3/5 > 0$ par exemple, alors $a(x)$ est strictement positive.
   - Pour $x > 5$, puisque $f(6) = -9 < 0$ par exemple, alors $a(x)$ est strictement négative.

   Ainsi

x	$]-\infty, -3[$	-3	$]-3, 5[$	5	$]5, \infty[$
signe de $a(x)$	-	0	+	n.d.	-

3. a) Puisque $\sqrt{A} \iff A \geqslant 0$, nous gardons les 0 et les + du tableau des signes de $a(x)$ de la Question 2 a), ainsi
   $$\text{dom}\left(\sqrt{a(x)}\right) = \{-3\} \cup]-3, 5[= [-3, 5[.$$
   b) Puisque $\ln(A) \iff A > 0$, nous gardons les + du tableau des signes de $a(x)$ de la Question 2 a), ainsi
   $$\text{dom}\left(\ln(a(x))\right) =]-3, 5[.$$