Université d'Ottawa · University of Ottawa
Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique
Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT 1702 C : Fake 2

31 octobre 2019

Professeur : Robert Hart

Nom de famille :____

Prénom :____

- Vous avez 80 minutes pour compléter cet examen. Au besoin, vous pouvez utiliser le verso d'une page pour vos solutions. SVP ne pas détacher les pages.
- Cet examen contient **7 questions** sur **10 pages** (incluant la page couverture).
- Lire toutes les questions attentivement avant d'y répondre. La pondération des questions est différente pour chaque question. Commencer par les questions avec lesquelles vous êtes les plus à l'aise.
- Examen à livres fermés. L'utilisation de tout appareil électronique est interdit.
- Calculatrice non-graphique permise.
- Toutes vos réponses doivent être accompagnées avec les justifications nécéssaires.
- Vérifier vos réponses lorsque possible.
- Bonne chance!!!

585, av. King-Edward C.P. 450, Succ. A
Ottawa (Ontario) K1N 6N5 Canada
585 King Edward Ave., P.O. Box 450, Stn. A
Ottawa, Ontario K1N 6N5 Canada
(613) 562-5864 • Téléc./Fax (613) 562-5776
Courriel/Email: uomaths@science.uottawa.ca

Question	1	2	3	4	5	6	7	Total (30)
Points								

1. Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -10 & 13 \end{bmatrix}$. Calculer $\det(B)$ et B^{-1}.

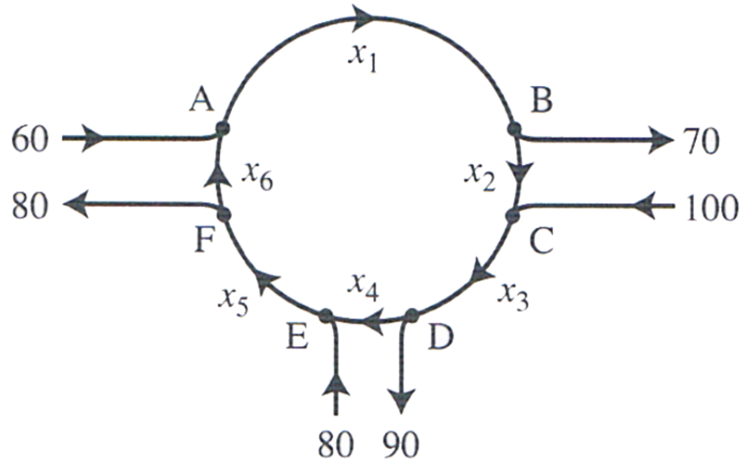
2. Soit $C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer $\det(C)$.

3. Si $\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = -2$, alors calculer $\det\left(\begin{bmatrix} d & 2a-3d & 2g \\ e & 2b-3e & 2h \\ f & 2c-3f & 2i \end{bmatrix}\right)$.

4. Résoudre le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} x & - & 3y & + & 4z & = & -7 \\ -x & + & 3y & - & 5z & = & 8 \\ 3x & - & 10y & + & 13z & = & -23 \end{cases}.$$

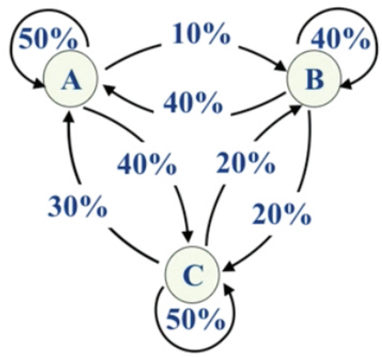
5. a) Calculer les flots dans du réseau suivant qui représente le trafic dans un rond-point :



b) Calculer le flot minimum sur x_6.

(Question 5, suite)

6. Trois compagnies de téléphones, A, B et C, compétitionnent pour le marché. Présentement, la compagnie A détient 60% du marché, la compagnie B détient 30% du marché et compagnie C détient 10% du marché. À chaque année, les consommateurs peuvent changer de compagnie. La compagnie C fait une étude de marché pour mesurer le comportement des consommateurs. Le résultat du l'étude est résumé par le diagramme suivant :



Par exemple, de la proportion d'une année des clients de la compagnie A, à l'année suivante, 50% resteront avec la compagnie A, 10% quitteront pour la compagnie B et 40% quitteront pour la compagnie C.
Soit

$$\vec{p}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix},$$

où a_n est la proportion des consommateurs avec la compagnie A, b_n est la proportion des consommateurs avec la compagnie B et c_n est la proportion des consommateurs avec la compagnie C, dans n années. Donc

$$\vec{p}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

a) Trouver la matrice de Markov M telle que $\vec{p}_{n+1} = M\vec{p}_n$.

b) Expliquer pourquoi M est régulière.

c) Calculer la distribution du marché entre les 3 compagnies dans 2 années.

d) Calculer le vecteur stable de M et interpréter.

(Question 6, suite)

7. Un pays a trois secteurs d'activités principaux : l'énergie, l'agriculture et les transports. Pour produire :
   - une unité d'énergie, il faut 0.05 unité de d'énergie, 0.05 unité d'agriculture et 0.2 unité de transports.
   - une unité d'agriculture , il faut 0.2 unité d'énergie, 0.1 unité d'agriculture et 0.3 unité de transports.
   - une unité d'automoblie, il faut 0.3 unité d'énergie, 0.1 unité d'agriculture et 0.1 unité de transports.

   Calculer les niveaux de production des secteurs si on veut répondre ùne demande externe de 340 millions d'unités d'énergie, 280 millions d'unité d'agriculture et 210 million d'unités de transports

(Question 7, suite)

1. $\det(B) = -1$ et $B^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.
2. $\det(C) = 110$.
3. 8.
4. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
5. a)
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60+s \\ -10+s \\ 90+s \\ s \\ 80+s \\ s \end{bmatrix}, \ s \in \mathbb{N}.$$

   b) $x_6 \geq 10$.
6. a) $M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$.

   b) Toutes les entrées de M sont strictement positives.

   c) $\vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 0.41 \\ 0.195 \\ 0.395 \end{bmatrix}$. Donc dans 2 ans, la compagnie A aura 41% du marché, la compagnie B aura 19.5% du marché et la compagnie C aure 39.5% du marché.

   d) $\vec{q} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}$. Donc éventuellement, la compagnie A aura 40% du marché, la compagnie B aura 20% du marché et la compagnie C aure 40% du marché.

7. **Variables** :
 $p_e = \#$ unité d'énergie en millions,
 $p_a = \#$ unité d'agriculture en millions et
 $p_t = \#$ unité de transport en millions.

 SÉL : $\begin{cases} p_e &= 0.05p_e &+ 0.2p_a &+ 0.3p_t &+ 340 \\ p_a &= 0.05p_e &+ 0.1p_a &+ 0.1p_t &+ 280 \\ p_t &= 0.2p_e &+ 0.3p_a &+ 0.1p_t &+ 210 \end{cases}.$

 Forme matricielle : $\begin{bmatrix} p_e \\ p_a \\ p_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.2 & 0.3 \\ 0.05 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_e \\ p_a \\ p_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 340 \\ 280 \\ 210 \end{bmatrix}.$

 Donc $C = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.2 & 0.3 \\ 0.05 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{bmatrix} 340 \\ 280 \\ 210 \end{bmatrix}$.

 Ainsi, $[I_3 - C|\vec{d}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0.95 & -0.2 & -0.3 & 340 \\ -0.05 & 0.9 & -0.1 & 280 \\ -0.2 & -0.3 & 0.9 & 210 \end{array}\right] \overset{GJ}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 500 \end{array}\right]$

 Les niveaux de production sont 600 millions d'unités d'énergie, 400 millions d'unités d'agriculture et 500 millions d'unités de transport.