MAT 2779, Introduction à la biostatistique

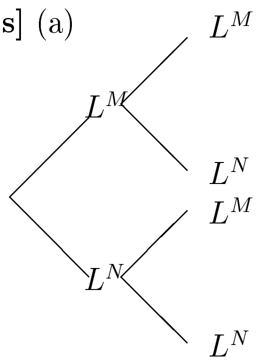
Devoir 1 – Solutionnaire

Écheance : le vendredi 30 septembre avant 15h

S.v.p. déposer votre devoir dans la boîte pour les devoirs à 585 King Edward

Total = 100 points

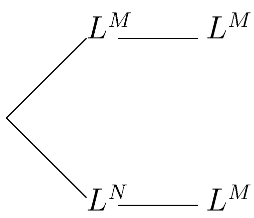
Exercice 2.1. [**15 points**] (a)



Gamète femelle	Gamète mâle L^M	Gamète mâle L^N
L^M	L^ML^M (type M)	L^ML^N (type MN)
L^N	L^ML^N (type MN)	L^NL^N (type N)

L'enfant peut avoir le type M avec une probabilité de 1/4, le type N avec une probabilité de 1/4, et le type MN avec une probabilité de 1/2.

(b)



Gamète femelle	Gamète mâle L^M	Gamète mâle L^N
L^M	L^ML^M (type M)	L^ML^N (type MN)

L'enfant peut avoir le type M ou le type MN, chacun avec une probabilité de 1/2.
(c)

$\underline{\quad\; L^M \quad\;}$ L^N

Gamète femelle	Gamète mâle L^N
L^M	$L^M L^N$ (type MN)

L'enfant peut avoir le type MN avec une probabilité de 1.

Exercice 3.5. [**10 points**] Soit I l'événement que la tomate ait une plus grande résistance aux insectes et D l'événement que la tomate ait une plus longue durée de conservation. On a $P(I) = 0{,}75$; $P(D) = 0{,}5$; $P(I \cap D) = 0{,}3$.
(a) $P(I \cap D') = P(I) - P(I \cap D) = 0{,}75 - 0{,}3 = 0{,}45$.
(c) $P(I' \cap D) = P(D) - P(I \cap D) = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$.
(d) $P(I' \cap D') = 1 - P(I \cup D) = 1 - [P(I) + P(D) - P(I \cap D)] = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$.

Exercice 4.3. [**10 points**] Soit D l'événement qu'un homme développera le cancer de la prostate. Soit A l'événement que son niveau d'APS est plus grand que 10, B est l'événement que son niveau d'APS est entre 4 et 10, et C est l'événement que son niveau d'APS est inférieure à 4. On a

$$P(D|A) = 0{,}67;\ P(D|B) = 0{,}25;\ P(D|C) = 0{,}05;$$

et

$$P(A) = 0{,}15;\ P(B) = 0{,}10;\ P(C) = 0{,}75;$$

(a) On veut

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) \\ &= (0{,}67)(0{,}15) + (0{,}25)(0{,}10) + (0{,}05)(0{,}75) \\ &= 0{,}163. \end{aligned}$$

(b) On veut

$$P(A|D) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{(0{,}67)(0{,}15)}{0{,}163} = 0{,}6166.$$

Exercice 4.4 : [**15 points**] Soit M l'événement que l'individu est malade et soit + l'événement que le résultat du test est positif. On observe

	M	M'
Test +	197	8
Test −	3	92
Total	200	100

(a) Le taux des faux positifs est $P(+|M') = 8/100 = 0{,}08$ et le taux des faux négatifs est $P(-|M) = 3/200 = 0,015$.
(b) La sensibilité est $P(+|M) = 197/200 = 0{,}985$.
la spécificité est $P(-|M') = 92/100 = 0{,}92$.
(c) La valeur prédictive positive est

$$\begin{aligned} \mathsf{VPP} = \mathsf{P(M|+)} &= \frac{P(+|M)P(M)}{P(+|M)P(M) + P(+|M')P(M')} \\ &= \frac{(197/200)(0{,}15)}{(197/200)(0{,}15) + (8/100)(0{,}85)} = 0{,}685. \end{aligned}$$

La valeur prédictive négative est

$$\begin{aligned} \mathsf{VPN} = \mathsf{P(M'|-)} &= \frac{P(-|M')P(M')}{P(-|M')P(M') + P(-|M)P(M)} \\ &= \frac{(92/100)(0{,}85)}{(92/100)(0{,}85) + (3/200)(0{,}15)} = 0{,}9971. \end{aligned}$$

(d) La valeur prédictive positive est

$$\begin{aligned} \mathsf{VPP} = \mathsf{P(M|+)} &= \frac{P(+|M)P(M)}{P(+|M)P(M) + P(+|M')P(M')} \\ &= \frac{(197/200)(0{,}01)}{(197/200)(0{,}01) + (8/100)(0{,}99)} = 0{,}1106. \end{aligned}$$

La valeur prédictive négative est

$$\begin{aligned} \mathsf{VPN} = \mathsf{P(M'|-)} &= \frac{P(-|M')P(M')}{P(-|M')P(M') + P(-|M)P(M)} \\ &= \frac{(92/100)(0{,}99)}{(92/100)(0{,}99) + (3/200)(0{,}01)} = 0{,}9998. \end{aligned}$$

Exercice 8.5. **[15 points]** Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les événements que le groupe sanguin du donneur soit O, A, B, et AB, respectivement. Soient B_1, B_2, B_3, B_4 les événements que le groupe sanguin du patient soit O, A, B, et AB, respectivement. Supposons que le donneur soit une personne au hasard de cette population et le patient soit une personne au hasard de cette population. C'est raisonnable de supposer que le type sanguin du donneur et du patient sont indépendants. L'événement que la transfusion soit une réussite est

$$C = (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_1 \cap B_3) \cup (A_1 \cap B_4) \cup (A_2 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_4) \cup$$

$$(A_3 \cap B_3) \cup (A_3 \cap B_4) \cup (A_4 \cap B_4).$$

Alors,

$$P(C) \;=\; P(A_1 \cap B_1) + P(A_1 \cap B_2) + P(A_1 \cap B_3) + P(A_1 \cap B_4)$$

$$
\begin{aligned}
& +P(A_2 \cap B_2) + (A_2 \cap B_4) + P(A_3 \cap B_3) \\
& +P(A_3 \cap B_4) + P(A_4 \cap B_4) \\
= \; & P(A_1)P(B_1) + P(A_1)P(B_2) + P(A_1)P(B_3) + P(A_1)P(B_4) \\
& +P(A_2)P(B_2) + P(A_2)P(B_4) + P(A_3)P(B_3) \\
& +P(A_3)P(B_4) + P(A_4)P(B_4) \\
= \; & (0,46)(0,46) + (0,46)(0,42) + (0,46)(0,09) + (0,46)(0,03) \\
& +(0,42)(0,42) + (0,42)(0,03) + (0,09)(0,09) \\
& +(0,09)(0,03) + (0,03)(0,03) \\
= \; & 0,6607.
\end{aligned}
$$

La probabilité que la transfusion n'est pas un succés (si on assigne le donneur au patient au hasard) est

$$P(C') = 1 - P(C) = 1 - 0,6607 = 0,3393.$$

Exercice 8.5. **[10 points]** Soit A l'événement que la personne ait accès à de l'eau potable, et B l'événement que la personne souffre d'une maladie hydrique. On a

$$P(A) = 0{,}45; \;\; P(B|A) = 0{,}32; \;\; P(B|A') = 0{,}88.$$

(a) On veut

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A') = (0{,}32)(0{,}45) + (0{,}88)(0{,}55) = 0{,}628.$$

(b) On veut

$$P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A')P(A')}{P(B)} = \frac{(0{,}88)(0{,}55)}{0{,}628} = 0{,}7707.$$

Problem 8.7. **[15 points]** (a) Soit A_i l'événement que la $i$ème drosophile sélectionnée soit noire, pour $i = 1, 2$. Par le formule des probabilités totales :

$$
\begin{aligned}
P(A_2) &= P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|A_1')P(A_1') \\
&= \frac{4}{24} \cdot \frac{5}{25} + \frac{5}{24} \cdot \frac{20}{25} = 0{,}2
\end{aligned}
$$

Puisque $P(A_2|A_1) = 4/24 = 0{,}1667 \neq 0{,}2 = P(A_2)$, alors A_1 et A_2 ne sont pas indépendants.

(b) Même argument que (a), on a :

$$
\begin{aligned}
P(A_2) &= P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|A_1')P(A_1') \\
&= \frac{1999}{9999} \cdot \frac{2000}{10000} + \frac{2000}{9999} \cdot \frac{8000}{10000} = 0{,}2.
\end{aligned}
$$

Puisque $P(A_2|A_1) = 0{,}19992 \approx 0{,}2 = P(A_2)$, alors A_1 et A_2 sont (presque) indépendants.

Exercice 8.14 : [10 points] Soit A l'événement que le donneur est séropositif et soit B l'événement que le donneur est positif pour l'herpès. On a $P(A) = 0{,}01$; $P(B) = 0{,}02$; et

$$\begin{aligned} 0{,}015 &= P[(A \cup B) \cap (A \cap B)'] \\ &= P(A \cup B) - P(A \cap B) \\ &= [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B) \\ &= 0{,}01 + 0{,}02 - 2\,P(A \cap B). \end{aligned}$$

Alors, $P(A \cap B) = (0{,}03 - 0{,}015)/2 = 0{,}0075$. Ensuite, on calcul

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}01 + 0{,}02 - 0{,}0075 = 0{,}0225.$$

Alors, la probabilité demandée est

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}0225 = 0{,}9775.$$