Université d'Ottawa · University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT 1700 C - Partiel # 2 - Automne 2019

Professeur : Hicham Loukrati

NOM________________________________

NUMÉRO D'ÉTU________________________________

Instructions : Cet examen consiste en 8 questions à réponses longues. La valeur totale de l'examen est de 50 points.
Indiquez clairement tous les détails de votre démarche *pour mériter tous les points. Vous pouvez utiliser le verso des pages pour écrire vos réponses en l'indiquant clairement.*

Il est interdit **de se servir de téléphones cellulaires, de dispositifs électroniques non autorisés ou de notes de cours (à moins qu'il s'agisse d'un examen à livre ouvert). Les téléphones et les dispositifs doivent être fermés et rangés dans votre sac : vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées dont le résultat pourrait être un 0 (zéro) pour l'examen.**

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature : ________________________________

PAS DE CALCULATRICES. PAS DE LIVRES. PAS DE NOTES DE COURS.

1. (6 points) Dériver les fonctions suivantes. $\boxed{e^{u(x)} = u' \cdot e^{u(x)}}$ et $\boxed{e(u(x)) = u'v + v'}$

(a) $f(x) = e^{2x}(x+2)^3$

2

$= e^{2x}(x+2)^3$

$= (e^{2x})'(x+2)^3 + e^{2x}[(x+2)^3]'$

$= (2x)' \cdot e^{2x}(x+2)^3 + e^{2x}\left[\frac{1}{3}(x+2)\right]'$

$= 2 \cdot e^{2x}(x+2)^3 + e^{2x}$

$\boxed{f'(x) = 2 \cdot e^{2x}(x+2)^3 + e^{2x}}$

(b) $h(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{x^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ donc ⇓

$h'(x) = \dfrac{(\ln^2(x))'(x^2) - (x^2)'(\ln^2(x))}{(x^2)^2}$

2

$h'(x) =$

2. (4 points) Soit y une fonction qui satisfait la relation implicite suivante,

$$\ln(x)\, e^y + y\, e^{x^2} + x = 1$$

Par dérivation implicite, déterminer la valeur de la dérivée y' au point $x = 1$.

$\ln(x)\, e^y + y e^{x^2} + x = 1$

$y' = (\ln(x) e^y)' + (y e^{x^2})' + (x)'$

$(\ln(x))' e^y + (e^y)'(\ln(x)) + (x^2)' y e^{x^2} + 1$

$= (\ln x)' e^y + (e^y)'(\ln(x)) + (2x) y e^{x^2} + 1$

$= \frac{1}{x} \cdot e^y + y' e^y (\ln(x)) + (2x) y e^{x^2} + 1$

2.5

Scanned with CamScanner

3. (6 points) Trouver les intervalles de croissance et de décroissance ainsi que les extremums de la fonction $f(x)$ définie par,

$$f(x) = e^{(x^3-3x)}$$

d'abord on, calcul $f'(x)$

$$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}}$$

$f(x) = e^{(x^3-3x)}$

$f'(x) = (x^3-3x)' \cdot e^{x^3-3x}$

$= (3x^2-3) \cdot e^{x^3-3x}$

$$\boxed{f'(x) = e^{x^3-3x}(3x^2-3)}$$

Pour trouver les intervals ont pose $f'(x) = 0$

$f'(0) = e^{0^3-3(0)}(3(0)^2-3))$

$= e$

3.5

3. (6 points) Trouver les intervalles de croissance et de décroissance ainsi que les extremums de la fonction $f(x)$ définie par,

$$f(x) = e^{(x^3-3x)}$$

d'abord on calcul $f'(x)$ $\boxed{e^{u(x)} = u'(x) \cdot e^{u(x)}}$

$f(x) = e^{(x^3-3x)}$

$f'(x) = (x^3-3x)' \cdot e^{x^3-3x}$

$= (3x^2-3) \cdot e^{x^3-3x}$

$\boxed{f'(x) = e^{x^3-3x}(3x^2-3)}$

Pour trouver les intervals ont pose $f'(x) = 0$

$f'(0) = e^{0^3-3(0)}(3(0)^2-3))$

$= e$

3.5

Scanned with CamScanner

$1-3+2$

4. (6 points) Déterminez les asymptotes verticales et horizontales. Justifiez vos réponses.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$$

D'abord calculons le domaine de definition =

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$= x \neq 1$ et $x \neq 2$

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}}$$

ⓐ Calculons l'asymptote verticale au point $= 1, 2$

$- \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(1)-1}{(1)^2 - 3(1) + 2} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{0}{0}$ FI

$\Rightarrow$ on utilise la fonction factoriser

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x-2)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(1-1)(1-2)} = \frac{1}{0} = \boxed{\infty}$

$- \lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{2-1}{(2)^2 - 3(2) + 2} = \frac{1}{4-6+2} = \frac{1}{0} = \boxed{\infty}$

$f(x)$ à une asymptote vertical en $x = 1$ ✗ et $x = 2$

3.5

Calculons l'asymptote Horizontale

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = 0$

$f(x)$ etant une fonction polynomial dont les degrée du numerateur inferieur au dégree du dénominateur ✗

il n'admet pas d'asymptote horizontal.

5. Soit la fonction f et ses dérivées successives f' et f'' suivantes,

$$f(x) = \frac{x+3}{x-3}, \quad f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}, \quad f''(x) = \frac{10}{(x-2)^3}$$

x

$f(3) = \frac{3+3}{3-3} = +$

$\frac{10}{4-2}$

(a) (1 point) Trouver le domaine de f.

$x - 3 \neq 0$ alors $x \neq 3$

$\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}}$

1

(b) (2 points) Trouvez les asymptotes horizontale et verticale

Calculons l'asymptote horizontale

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$

Asymptote horizontal $y = 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x} = \frac{-\infty}{-\infty}$

Calculons l'asymptote vertical en $x = 3$

$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{3+3}{3-3} = \frac{6}{0} = \pm\infty$

2

y

x

(c) (2 points) Trouver les intersections de f avec les axes horizontal et vertical.

Intersection avec l'axe horizontal

$f(x) = 0 \mapsto \frac{x+3}{x-3} = 0 \mapsto \begin{matrix} x+3=0 \mapsto \\ x-3=0 \mapsto \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} x=-3 \\ x=3 \end{matrix}}$

Intersection avec l'axe vertical

on calcul $f(0) = \frac{0+3}{0-3} = \frac{3}{-3} = \boxed{-1}$

c à $\boxed{y = -1}$

2

$f(-3) = \frac{-3+3}{-3-3} = \frac{0}{-6}$

$f'(x) = 0 \mapsto \frac{-5}{(x-2)^2} = 0$

$(x-2)(x-2) =$

$x \neq 2 \quad x \to -2$

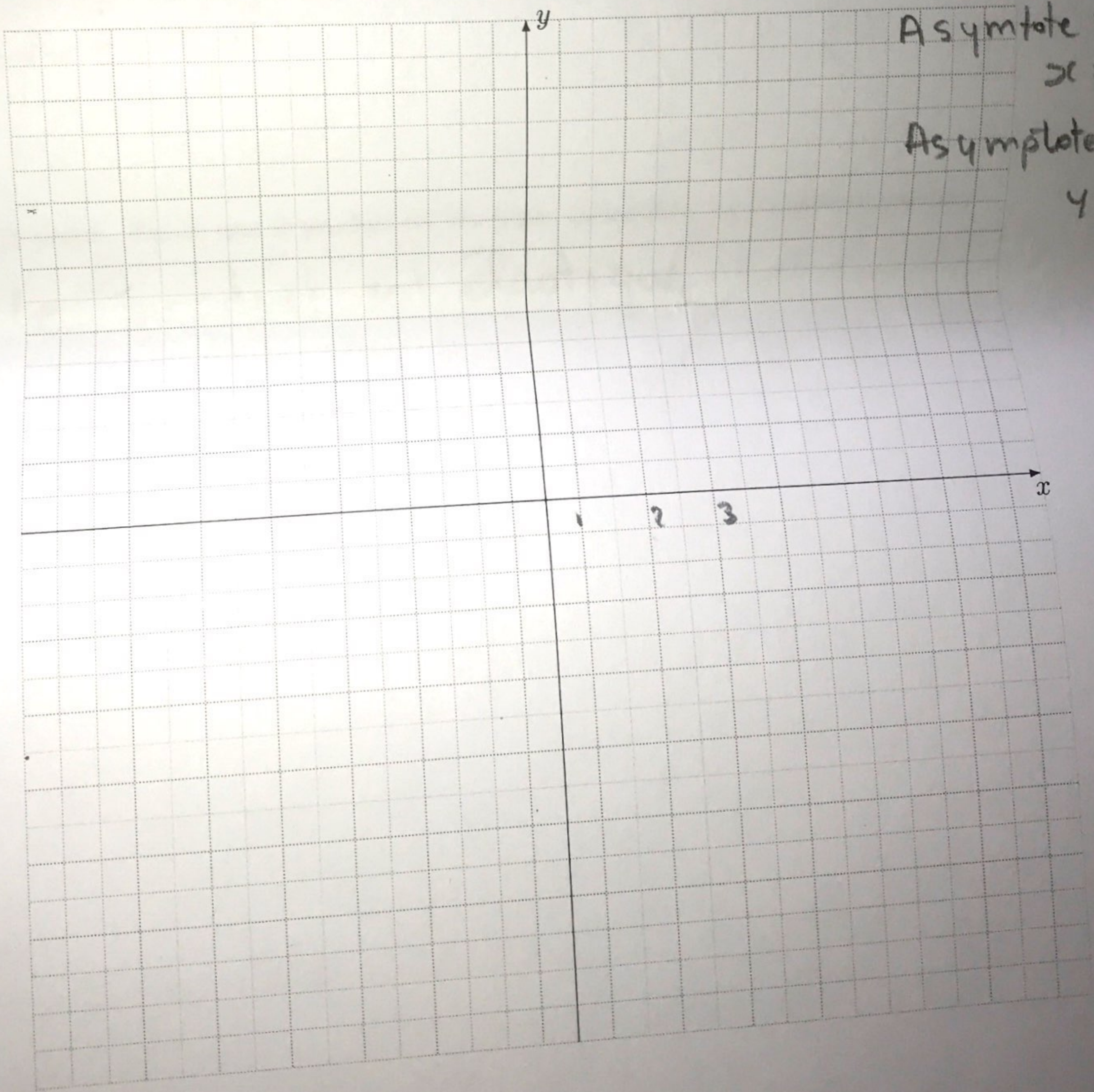
x

(d) (4 points) Remplir le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|		0	$-$	0	$+$ $-$	
$f''(x)$		$-$	0			$+$ $-$	|	$+$	
$f(x)$		↗			↘			↗	

2.5

(e) (3 points) Esquisser le graphe de f.



Asymtote vertical
$x = 3$

Asymplote horizonta
$y = 1$

0.5

6. La fonction demande pour un produit est donnée par

$$p(x) = \frac{x}{x+1}$$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{x'(x+1) - (x+1)'(x)}{(x+1)^2}$

(a) (4 points) Calculer l'élasticité de la demande par rapport au prix lorsque la demande est 12 unités.

Profit = R(x) − C

R(x) = x · P

$p'(x) = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{1}{(x+1)^2}}$

$P(12) = \frac{1}{(12+1)^2} = \frac{1}{(13)^2} = 169$

$\boxed{P(12) = 169}$

2

$R(x) = x \cdot \frac{x}{x+1}$

$= \frac{x^2}{x+1}$

$R'(x) = \frac{(x^2)'(x+1) - \ldots}{(x+1)^2}$

$= \frac{2x(x+1) - 1(x^2)}{x+1}$

$= \frac{2x^2 + 2x - x^2}{x^2 + 2x}$

(b) (1 point) Est-ce que le produit est élastique, inélastique ou d'élasticité unitaire ?

le produit est élastique

1

6 x 7 = 42
48

338

5376

7. (6 points) Une compagnie désire fabriquer des boîtes rectangulaires en métal sans couvercle. Ces boîtes seront fabriquées à partir d'une feuille de métal de 84 cm par 64 cm. Une machine découpera des carrés dans chaque coin et pliera les côtés pour former une boîte. On demande de déterminer la longueur du côté des carrés pour que le volume de la boîte soit maximal.

$x = 84$ cm

$y = 64$ cm

V

V'

$V = 84 \times 64$

$=$

$V(x) = (84 - 2x)(64 - 2x)x$

0

Scanned with CamScanner

8. Un liquide est versé dans un réservoir de forme cylindrique de rayon 8 m et de hauteur 6 m. Le taux avec lequel le liquide est versé est égale à 5 m^3/min. La formule donnant le volume d'un cylindre est donnée par $V = \pi r^2 h$.

(a) (4 points) Déterminer le taux de variation de la hauteur du liquide dans le réservoir, $\frac{dh}{dt}$.

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi 8^2 \times 6 = \pi 64 . 6$

$\boxed{V = \pi 384}$

0.5

(b) (1 point) À l'aide de ce taux de variation, déterminer le temps nécessaire pour remplir de réservoir.

0