

1. Traduisez chacune des phrases suivantes en une proposition composée en utilisant seulement les variables A , F et H et les connecteurs logiques appropriés. Les propositions A , F et H sont :

A : "Le requin attaque Noah." F : "Le requin a faim." H : "Noah est un héro."

P_1 : "Le requin a faim mais le requin n'attaque pas Noah."

Proposition composée pour P_1 :

$F \wedge \neg A$

P_2 : "Le requin attaque Noah ou Noah n'est pas un héro."

Proposition composée pour P_2 :

$A \vee \neg H$

P_3 : "Noah est un héro si le requin a faim."

Proposition composée pour P_3 :

$F \rightarrow H$

(3 points)

2. Utilisez une table de vérité (et seulement une table de vérité) pour déterminez si la proposition $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$ est une tautologie, une contradiction ou ni un ni l'autre. Votre tableau doit contenir au minimum une colonne pour $(P \rightarrow Q)$, $((\neg P) \vee Q)$ et pour $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$. (2 points)

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow \neg P \vee Q$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

une tautologie.

3. Complétez la table de vérité suivante pour déterminer si les propositions $p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$ et $p \vee q \vee r$ sont logiquement équivalentes ou non. Votre table de vérité doit, au minimum, contenir une colonne pour $p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$, $p \vee q \vee r$ et une colonne pour vérifier l'équivalence logique. (5 points)

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	$p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$ ①	$p \vee q \vee r$ ②	① ②
V	V	V	F	F	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F	F	V

Une tautologie. Donc, les propositions sont logiquement équivalentes.

4. Complétez la table de vérité pour déterminer si l'argument $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$ est valide ou non. Votre table doit, au minimum contenir une colonne pour $p \vee q$, $(p \vee q) \wedge \neg p$ et $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$. (2 points)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	F	F

pas une tautologie, donc pas un argument valide.

5. Utilisez les équivalences logiques (et seulement les équivalences logiques) pour démontrer que $(A \vee B) \rightarrow C$ est logiquement équivalent à $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$. Vous devez montrer vos étapes. Ne sautez aucune étape. Vous **n'avez pas** à écrire le nom de la règle que vous utilisez. Le numéro de la règle utilisée est suffisant. Un tableau d'équivalences logiques se trouve à la page 7. (4 points)

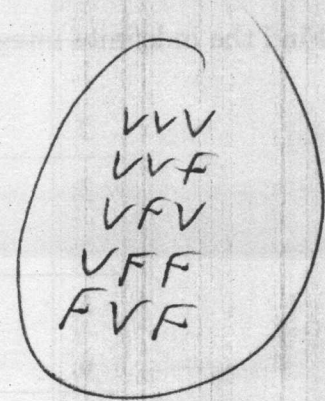
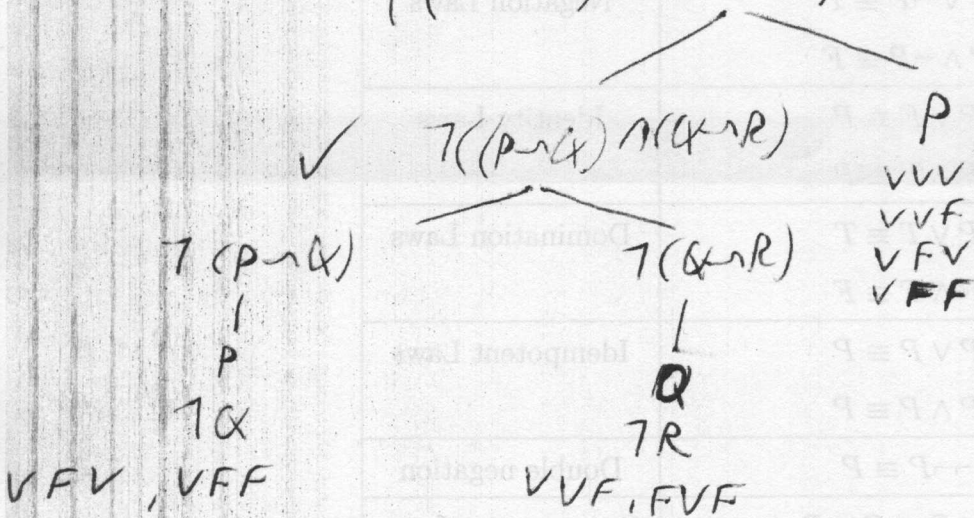
$$\begin{aligned}
 (A \vee B) \rightarrow C &\equiv (\neg(A \vee B)) \vee C && (16) \text{ REL} \\
 &\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee C && (17) \text{ REL} \\
 &\equiv C \vee (\neg A \wedge \neg B) && (10) \\
 &\equiv (C \vee \neg A) \wedge (C \vee \neg B) && (14) \\
 &\equiv (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) && (10) \\
 &\equiv (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) && (18)
 \end{aligned}$$

6. Utilisez les règles d'inférences pour montrer la validité des arguments suivants. Justifiez chacune de vos lignes en indiquant le numéro de la règle que vous utilisez (voir tableau des règles d'inférences se trouvant à la page 8 (4 points) :

$p \wedge q$	(1) $p \wedge q$	hypothèse
$p \rightarrow (r \wedge q)$	(2) p	règle 2 sur (1)
$r \rightarrow (s \vee t)$	(3) $p \rightarrow (r \wedge q)$	hypothèse
$\neg s$	(4) $r \wedge q$	règle 4 sur (2) et (3)
$\therefore t$	(5) r	règle 2 sur (4)
	(6) $r \rightarrow (s \vee t)$	hypothèse
	(7) $s \vee t$	règle 4 sur (5) et (6)
	(8) $\neg s$	hypothèse
	(9) t	règle 7 sur (7) et (8)

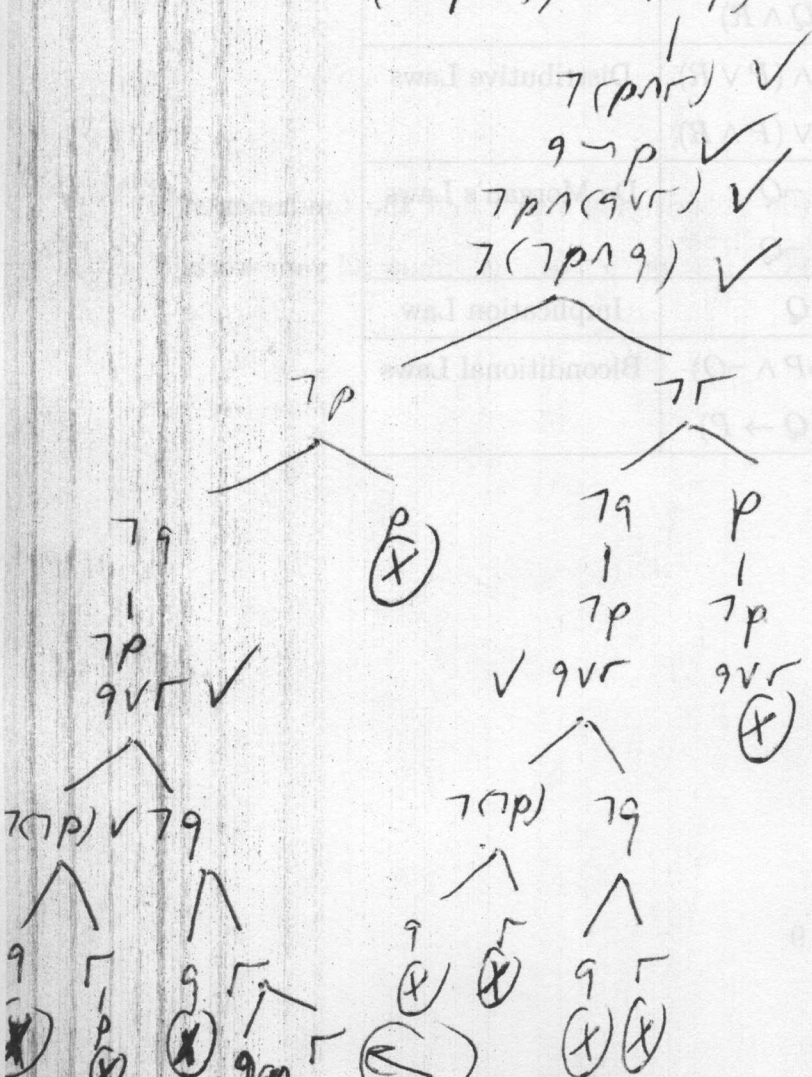
7. Utilisez un arbre de vérité (et seulement un arbre de vérité) pour trouver les valeurs de vérités de P, Q et R où la proposition composée $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow P$ est vraie. (3 points)

$$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow P \quad \checkmark$$



8. Utilisez un arbre de vérité (et seulement un arbre de vérité) pour déterminez si l'argument $(\neg(p \wedge r)) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \wedge (q \vee r)) \rightarrow (\neg p \wedge q)$ est valide ou non. Si non, donnez le(s) contre-exemples. (5 points)

$$(\neg(p \wedge r)) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \wedge (q \vee r)) \rightarrow (\neg p \wedge q) \quad \checkmark$$



Pas valide car il y a une branche active (donc pas une contradiction)
Le contre-exemple LA F F V

La définition suivante est fort utile pour les questions 9 et 10 :

Définition : Soient m et n des nombres entiers où $m \neq 0$. Le nombre m divise le nombre n si il existe un nombre entier k tel que $mk = n$. Dans ce cas, on écrit $m|n$.

9. Soient les entiers a, b, c, d tels que $a \neq 0$ et $c \neq 0$. Démontrez, en utilisant une preuve directe, que si $a|b$ et $c|d$, alors $ac|bd$. (2 points)

$$\begin{aligned} a|b &\Rightarrow b = aM, \quad M \in \mathbb{Z} \\ c|d &\Rightarrow d = cL, \quad L \in \mathbb{Z} \end{aligned} \Rightarrow bd = aM \cdot cL = ac(ML) = ac \cdot t, \quad t \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow ac | bd.$$

10. Considérons l'énoncé suivant : "Si 9 ne divise pas $(ab + a^2)$, alors 3 ne divise pas a ou 3 ne divise pas b ."

a) Déterminez la contraposée de cet énoncé. (2 points)

Si 3 divise a et 3 divise b , alors 9 divise $ab + a^2$

b) Utilisez une preuve par contraposée pour démontrer que l'énoncé est vrai. (3 points)

$$3|a, 3|b \Rightarrow \begin{aligned} a &= 3M, \quad M \in \mathbb{Z} \\ b &= 3L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab + a^2 &= (3M)(3L) + (3M)^2 \\ &= 9ML + 9M^2 \\ &= 9(ML + M^2) \\ &= 9t, \quad \text{and } t = ML + M^2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 9 | ab + a^2$$