Université d'Ottawa

Département de Mathématiques et Statistiques

MAT 1702C: Méthodes Mathématiques II
Professeur: Pierre-Alain Jacqmin

Deuxième examen de mi-session – Version A

30 octobre 2018

Nom________________________ Prénom ______________________

Numéro d'étudiant # ______________________

Instructions:

(a) Vous avez 80 minutes pour remplir cet examen.

(b) Vos réponses doivent être soigneusement écrites dans l'espace prévu à cet effet. Le verso des feuilles peut être utilisé comme brouillon. Si vous avez besoin de plus de place pour écrire vos réponses, vous pouvez continuer à rédiger sur le verso de la page, en indiquant **clairement** que cela fait partie intégrante de votre réponse. Dans le cas contraire, le verso des pages ne sera pas corrigé.

(c) Indiquez votre numéro d'étudiant au dessus de chaque feuille, à l'endroit prévu à cet effet.

(d) Vos notes de cours, livres, papier brouillon personnel, calculatrices ou autres appareils électroniques sont interdits.

(e) Vous êtes fortement recommandés d'utiliser un stylo-bille pour rédiger vos réponses, pas un crayon.

(f) Vous pouvez utiliser la dernière page de cet examen comme papier brouillon. S'il vous manque du papier brouillon, demandez-en plus au surveillant.

(g) Les téléphones, appareils électroniques ou notes de cours ne sont pas autorisés durant cet examen. **Les appareils électroniques doivent être éteints et rangés dans vos sacs**. Ne les gardez pas en votre possession, ni dans votre poche. Si vous êtes vu avec un tel appareil ou document, ceci pourrait se passer: vous devrez immédiatement quitter la salle d'examen et un rapport de fraude académique sera rédigé, ce qui pourra entraîner une cote de 0 (zéro) à l'examen.

En signant ci-dessous, vous assurez que vous respectez ces règles.

Signature ________________________

S'il vous plait, n'écrivez rien dans le tableau ci-dessous.

Question	1	2	3	4	5	6	Total
Maximum	5	5	4	4	4	2	24
Points							

1. [**5 points**] Soient quatre vecteurs $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 10 \\ -18 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}$.

(a) [**4 points**] Trouver la solution générale de l'équation vectorielle

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} + d\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

pour les variables a, b, c, d.

Solution: La matrice augmentée correspondant au système est:

$$[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}\,\mathbf{z}|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 & 0 \\ -1 & -5 & 1 & -18 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_1]{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \to \frac{1}{-2}L_2 \\ L_4 \to \frac{1}{-2}L_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_3 \to L_3 - L_2 \\ L_4 \to L_4 - L_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{2}L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \to L_2 + L_3 \\ L_1 \to L_1 - L_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 3L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

D'où,

$$\begin{cases} a + 2d = 0 \\ b + 3d = 0 \\ c - d = 0. \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{cases} a & = & -2d \\ b & = & -3d \\ c & = & d \\ d & : & \text{libre} \end{cases}$$

(b) [**1 point**] L'ensemble $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ est-il linéairement dépendant?

- S'il est linéairement indépendant, expliquer pourquoi;
- S'il est linéairement dépendant, trouver une relation de dépendance linéaire pour ces vecteurs.

Solution: À partir de (a), on voit que l'équation vectorielle a des solutions non-triviales. Donc l'ensemble est linéairement dépendant.

En choisissant par exemple $d = 1$, alors $a = -2$, $b = -3$, $c = 1$. Donc

$$-2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

2. [**5 points**] Soient $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$.

(a) [**3 points**] Trouver la matrice A de taille 2×2 telle que $A = (C^T + I_2)B^{-1}$, où I_2 est la matrice identité 2×2.

Solution:

$$C^T + I_2 = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -5 \end{bmatrix},$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 18 & -7 \end{bmatrix}.$$

(b) [**2 points**] Calculer B^{-2}.

Solution:

$$B^{-2} = B^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & -18 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}.$$

3. [**4 points**] Pour chacun des énoncés suivants, indiquez s'il est vrai ou faux. Vous recevrez 1 point pour chaque réponse correcte, 0 point si vous ne répondez pas et -0,5 points pour chaque mauvaise réponse. Quoi qu'il arrive, votre score final pour cette question sera au minimum 0.

__________ L'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ est linéairement indépendant.

__________ Soient A, B et C des matrices 2×2, où $A \neq 0_{2\times 2}$. Si $AB = AC$, alors $B = C$.

__________ Si les colonnes d'une matrice A de taille 4×4 sont linéairement indépendantes, alors le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ n'admet pas d'autre solution que la solution triviale.

__________ Si A et B sont deux matrices 3×3, nous avons $(A^T B^T)^T = AB$.

Solution:
Vrai
Faux
Vrai
Faux

4. [**4 points**] Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \\ 3 & 9 & 10 \end{bmatrix}$.

Solution:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - 3L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 10 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 16 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Donc, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. [**4 points**] On considère une économie divisée en deux secteurs: Agriculture et Service. Pour produire une unité du secteur Agriculture, on a besoin de $\frac{1}{3}$ unité du secteur Agriculture et de $\frac{1}{2}$ unité du secteur Service. Pour produire une unité du secteur Service, on a besoin de $\frac{1}{6}$ unité du secteur Agriculture et de $\frac{3}{4}$ unité du secteur Service.

(a) [**1 point**] Quelle est la matrice de consommation C pour cette économie?

(b) [**1 point**] Calculer $I - C$ et $(I - C)^{-1}$.

(c) [**2 points**] Quelle quantité chaque secteur doit-il produire pour satisfaire une demande finale de 20 unités du secteur Agriculture et 10 unités du secteur Service?

Solution: (a) La matrice de consommation pour cette économie est:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

(b)

$$I - C = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 1 - \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$(I - C)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{12}} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

(c) $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 200 \end{bmatrix}$$

6. [**2 points**] Soient A, B et C des matrices 2×2 inversibles. Résoudre l'équation matricielle

$$A(B^{-1} + X^T)C = CA.$$

d'inconnue X (c'est à dire, exprimer X en termes de A, B, et C).

Solution:

$$A(B^{-1} + X^T)CC^{-1} = CAC^{-1}.$$
$$A(B^{-1} + X^T) = CAC^{-1}.$$
$$A^{-1}A(B^{-1} + X^T) = A^{-1}CAC^{-1}.$$
$$B^{-1} + X^T = A^{-1}CAC^{-1}.$$
$$X^T = A^{-1}CAC^{-1} - B^{-1}.$$
$$X = (A^{-1}CAC^{-1} - B^{-1})^T.$$