Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie I : MAT1730
Examen Final – 20 décembre 2018

Professeurs: Benoit Dionne

uOttawa

Questions à choix multiples

Question 1 (**1 point**)
Une population de poissons en pisciculture est décrite par le système dynamique discret (SDD) $p_{t+1} = 1900 - 0.9p_t$ où p_t est la densité de poisson après t semaine. Laquelle des formules suivantes représente la solution générale du SDD si la densité initiale était $p_0 = 3000$?

A) $p_t = -(0.9)^t(2000) + 1000$	**B**) $p_t = (-0.9)^t(2000) + 1000$
C) $p_t = (0.9)^t(-16000) + 19000$	**D**) $p_t = (-0.9)^t(-16000) + 19000$
E) $p_t = -(0.9)^t(3000) + 1000$	**F**) $p_t = (-0.9)^t(3000) + 19000$

Solution:
La solution générale est de la forme $p_t = r^t(x_0 - p) + p$ où p est le point d'équilibre du SDD, x_0 est la condition initiale, et r est le taux de croissance.

La fonction génératrice est $f(x) = 1900 - 0.9x$. Le point d'équilibre p est la solution de $f(x) = 1900 - 0.9x = x$. Donc, $x = 1000$. Puisque $r = -0.9$ et $x_0 = 3000$, on obtient

$$p_t = (-0.9)^t(3000 - 1000) + 1000 = (-0.9)^t(2000) + 1000 \ .$$

Réponse : B

Question 2 (**1 point**)
Laquelle des fonctions suivantes est la dérivée de $f(x) = \ln\left(\sqrt{4x^2+9}\right)$

A) $f'(x) = \dfrac{2}{2x+3}$	**B**) $f'(x) = \sqrt{4x^2+9}\ln\left(\sqrt{4x^2+9}\right)$	**C**) $f'(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{4x^2+9}}$
D) $f'(x) = \dfrac{1}{4x^2+9}$	**E**) $f'(x) = \dfrac{4x}{4x^2+9}$	**F**) $f'(x) = \dfrac{8x}{2x+3}$

Solution:
On a que

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{4x^2+9}\right) = \ln\left((4x^2+9)^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\ln(4x^2+9) \ .$$

Donc

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\ln(y)\bigg|_{y=2x^2+9}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x^2+9) = \frac{1}{2y}\bigg|_{y=2x^2+9}(8x) = \frac{4x}{2x^2+9} \ .$$

Réponse : E

Question 3 (**1 point**)
Si $f(x) = x^x$, alors $f'(x)$ et $f''(x)$ sont

A) $f'(x) = x^x(\ln(x)+1)$ et $f''(x) = x^x\left(\ln(x)+1\right)^2$
B) $f'(x) = \dfrac{x^{x-1}}{x-1}$ et $f''(x) = \dfrac{x^{x-2}}{(x-1)(x-2)}$
C) $f'(x) = x^x\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$ et $f''(x) = x^x\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^2 - x^{x-2}$
D) $f'(x) = x^x(\ln(x)+1)$ et $f''(x) = x^x\left(\ln(x)+1\right)^2 + x^{x-1}$
E) $f'(x) = x^x\ln(x)$ et $f''(x) = x^x(\ln(x))^2 + x^{x-1}$
F) $f'(x) = x^x$ et $f''(x) = x^x$

Solution:
Puisque $f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln(x)}$, on a que

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}e^y\bigg|_{y=x\ln(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ln(x)) = e^y\bigg|_{y=x\ln(x)}(\ln(x)+1) = e^{x\ln(x)}(\ln(x)+1) = x^x(\ln(x)+1)$$

Ainsi
$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^x\right)\left(\ln(x)+1\right) + x^x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln(x)+1\right) = x^x\left(\ln(x)+1\right)^2 + x^{x-1}$$

Réponse : D

Question 4 (**4 point**)
Déterminez si les énoncés suivants sont vrais ou faux. Encerclez votre réponse.

a) $\ln(a^b) = \ln(a)\ln(b)$ **vrai** **faux**

b) $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ **vrai** **faux**

c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(-x) = -\dfrac{1}{x}$ pour $x < 0$. **vrai** **faux**

d) Il y a des valeurs de l'angle θ pour lesquelles $\arcsin(\sin(\theta)) \neq \theta$. **vrai** **faux**

e) Si $f(x)$ a un maximum local en $x = a$, alors $f'(a) = 0$. **vrai** **faux**

f) Le Théorème des valeurs moyennes affirme qu'il existe au moins un point c entre a et b tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ si f est dérivable sur l'intervalle $[a, b]$. **vrai** **faux**

g) Si $f(x)$ est dérivable en $x = a$, alors $f(x)$ est continue en $x = a$. **vrai** **faux**

h) $f(x) = \arctan(x)$ et $g(x) = \ln(1+x^2)$ sont deux primitives de $\dfrac{1}{1+x^2}$. **vrai** **faux**

Solution:
a) Faux car $\ln(a^b) = b\ln(a)$
b) Faux car $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$
c) Faux car $\ln(x)$ n'est pas définie pour $x \leq 0$. On a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$.

d) Vrai car l'image de arcsin est $[\pi/2, \pi/2]$.

e) Faux car $f(x)$ peut avoir un maximum local en $x = a$ sans que f ne soit même dérivable en $x = a$. Par exemple, $f(x) = -|x|$ a un maximum en $x = 0$ mais f n'est pas dérivable en $x = 0$.

f) Il est vrai que le Théorème des valeurs moyennes affirme qu'il existe au moins un point c entre a et b tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ si f est dérivable sur l'intervalle $[a, b]$.

g) Il est aussi vrai que si $f(x)$ est dérivable en $x = a$, alors $f(x)$ est continue en $x = a$.

h) Faux car la dérivée de fonctions composées donne $g'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$. Il est vrai que $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Questions à développement

Question 5 (**2 point**)
Une courbe est donnée implicitement par l'équation $y^2 \sin(x) = -e^x \cos(y)$. Donnez l'équation de la droite tangente à cette courbe au point $(0, \pi/2)$?

Réponse : $\boxed{y = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 x}$

Solution:
On suppose que y est une fonction de x, et on dérive des deux côtés de l'équation pour obtenir

$$2yy' \sin(x) + y^2 \cos(x) = -e^x \cos(y) + e^x \sin(y)y'$$

Au point $(x, y) = (0, \pi/2)$, cette équation nous donne $y' = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$.

l'équatiom de la droite tangente est donc $y = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 x$

Question 6 (**3 point**)
La population d'insectes d'une région donnée varie en fonction de la température et le taux d'humidité. La population d'insectes d'une région donnée est décrite par la fonction

$$g(t) = 6(t^2 + 5)e^{-t/3}$$

pour $0 \leq t \leq 10$ où $g(t)$ est le nombres d'insectes par mètre carré au temps t mesuré en mois à partir du premier février. Quelle est le maximum absolu et le minimum absolu d'insectes par mètre carré sur l'intervalle $[0, 10]$? Donnez vos réponses avec une précision de deux chiffres décimaux.

Maximum : $\boxed{34.00}$ Minimum : $\boxed{22.47}$

Solution:
La fonction $g(t)$ est continue sur l'intervalle $[0, 10]$ et différentiable sur l'intervalle $]0, 10[$. On peut donc utiliser le Théorème des valeurs extrêmes. On a que

$$g'(t) = -2\left(t^2 - 6t + 5\right) e^{-t/3} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 = (t - 5)(t - 1) = 0 \ .$$

Les deux points critiques sont $t = 1$ et $t = 5$ qui sont tous les deux dans l'intervalle $[0, 10]$. On a que $g(0) = 30$, $g(1) = 25.80$, $g(5) = 34.00$ et $g(10) = 22.47$. Donc, le maximum absolu est 34.00 lorsque $t = 5$ et le minimum absolu est 22.47 lorsque $t = 10$.

Question 7 (**4 point**)
Pour chacune des limites ci-dessous, déterminez si elle existe et, si elle existe, calculez cette limite (sans utiliser de suites numériques).

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{|4-2x|}{x^2-4} = \boxed{\text{n'existe pas}}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{7x^2}{\sin^2(3x)} = \boxed{7/9}$

Solution:
a) La limite n'existe pas car la limite à droite

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|4-2x]}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x-4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2}{(x+2)} = \frac{1}{2}$$

et la limite à gauche

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|4-2x]}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{4-2x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-2}{(x+2)} = -\frac{1}{2}$$

ne sont pas égales.

b) On a une indétermination de la forme 0/0. On peut donc utiliser la règle de l'Hospital.

$$\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{7x^2}{\sin^2(3x)}}_{0/0} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{14x}{6\sin(3x)\cos(3x)}}_{0/0} \qquad = \lim_{x\to 0} \frac{14}{18\cos^2(3x) - 18\sin^2(3x)} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

Question 8 (**4 point**)
Notre but est d'estimer la valeur de $\ln(0.9)$ à l'aide d'un polynôme de Taylor d'ordre trois.
a) Énoncez la formule générale pour un polynôme de Taylor d'ordre trois centré en $x = a$ pour la fonction $f(x)$.

Réponse : $\boxed{p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3}$

b) Trouvez le polynôme de Taylor d'ordre trois centré en $x = 0$ pour la fonction $f(x) = \ln(1+x)$.

Réponse : $\boxed{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}$

c) Pour quelle valeur de x a-t-on $f(x) = \ln(0.9)$?
Réponse : $\boxed{-0.1}$

d) Utilisez l'information en (b) et (c) pour estimer la valeur de $\ln(0.9)$ à six chiffres décimaux près.

Réponse : $\boxed{-0.105\overline{3}}$

Solution:

b) Le polynôme de Taylor d'ordre trois centré en $a = 0$ est

$$p(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2 + \frac{1}{6}f'''(0)(x-0)^3 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

car $f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$ et $f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$.

c) $f(x) = \ln(1+x) = \ln(0.9)$ pour $x = -0.1$.

d) On a que

$$\ln(0.9) = f(-0.1) \approx p(-0.1) = -\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3 = -0.105\overline{3}\ .$$

Question 9 (**5 point**)

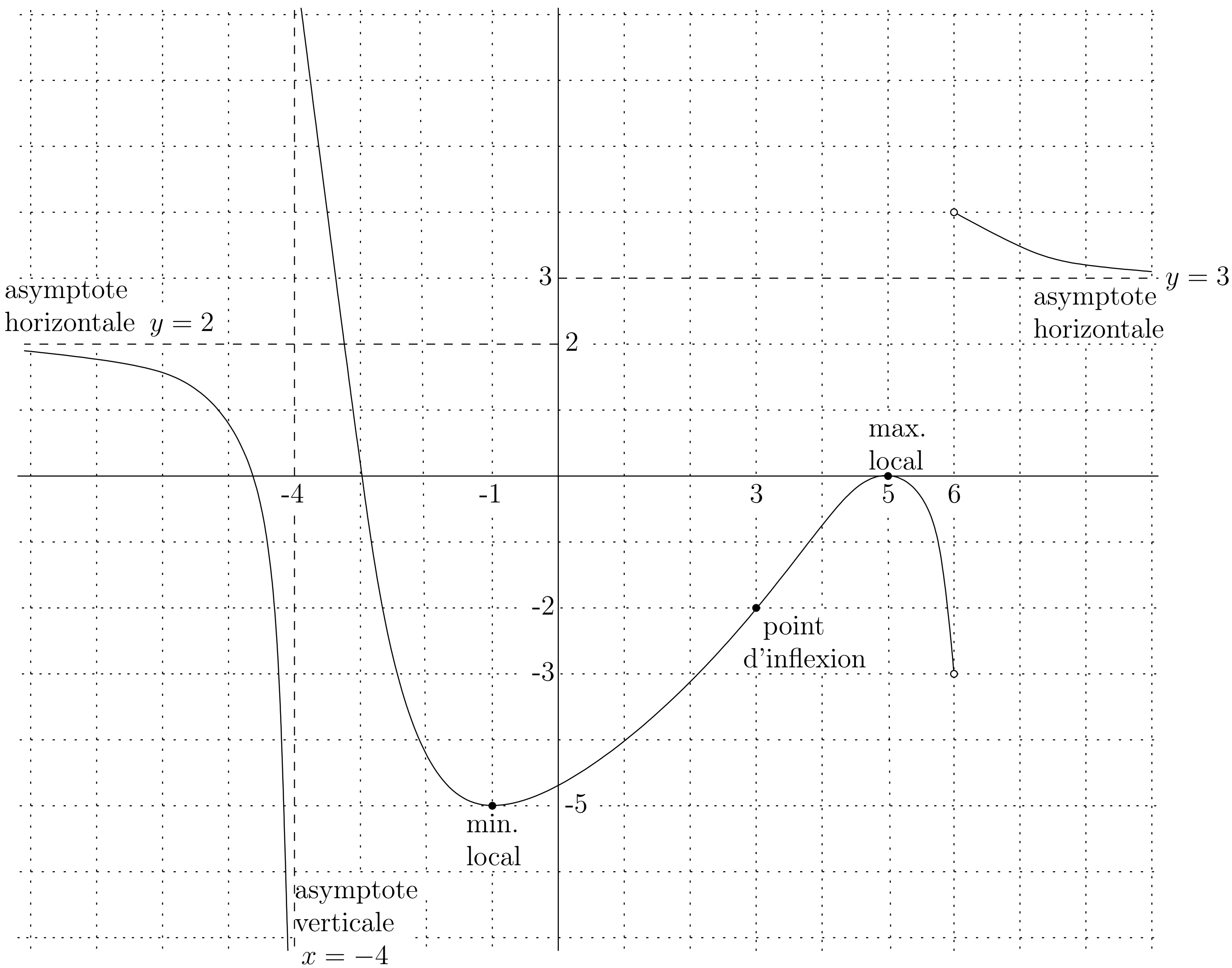
On vous demande de tracer le graphe d'une fonction f. Après avoir fait les calculs nécessaires, vous obtenez l'information suivante :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to-4^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 6^-} f(x) = -3$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to-4^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to 6^+} f(x) = 4$$

x	$x <$	-4	$< x <$	-1	$< x <$	3	$< x <$	5	$< x <$	6	$< x$
$f(x)$		N.D.		-5		-2		0		N.D.	
$f'(x)$	$-$	N.D.	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	N.D.	$-$
$f''(x)$	$-$	N.D.	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	N.D.	$+$

a) Tracer le graphe de la fonction f dans le système de coordonnées ci-dessous. Prenez bien soin d'identifier les maximums et minimums locaux, les points d'inflexion, les asymptotes horizontales et verticales.



b) Pour les deux questions suivantes, utilisez le choix de réponses ci-dessous.

A) $]-1,3[\cup]3,5[$ **B**) $]-1,5[$ **C**) $]-\infty,-1[\cup]5,\infty[$

D) $]-4,3[\cup]6,\infty[$ **E**) $]-\infty,-4[\cup]3,6[$ **F**) $]-4,-1[\cup]-1,3[\cup]6,\infty[$

f est croissante sur $\boxed{\text{B}}$. f est convexe sur $\boxed{\text{D}}$.

(Écrire la lettre dans la case.)

Solution:

x	$x <$	-4	$< x <$	-1	$< x <$	5	$< x <$	6	$< x$
$f'(x)$	$-$	N.D.	$-$	0	$+$	0	$-$	N.D.	$-$
	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$

x	$x <$	-4	$< x <$	3	$< x <$	6	$< x$
$f''(x)$	$-$	N.D.	$+$	0	$-$	N.D.	$+$
	$\frown$		$\smile$	infl	$\frown$		$\smile$

Il y a deux asymptotes horizontales $y = 2$ lorsque $x \to -\infty$ et $y = 3$ lorsque $x \to \infty$. Il y a une asymptote verticale $x = -4$.

x	$x <$	-4	$< x <$	-1	$< x <$	3	$< x <$	5	$< x <$	6	$< x$
$f'(x)$	$-$	N.D.	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	N.D.	$-$
$f'(x)$	$-$	N.D.	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	N.D.	$+$
	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$
	$\frown$		$\smile$	$\smile$	$\smile$	infl	$\frown$	$\frown$	$\frown$		$\smile$

Question 10 (4 point)
Deux étudiants à la maîtrise en biologie étudie la croissance d'une colonie de levure. Leurs données pour une période de trois jours s'accorde avec le modèle suivant.

$$r(t) = \frac{20}{1 + 50e^{-t}} \quad , \quad t \geq 0$$

où $r(t)$ est la masse en mg après t jours.
a) Ils veulent savoir si la colonie de levure atteindra la masse de 10 mg. Pour ce faire, ils se rappellent que le Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) peut être utilisé pour répondre à cette question. Faite comme eux, utilisez le TVI pour justifier que $r(t) = 10$ dans l'intervalle $[3, 5]$. Ne pas oublier d'énoncer les hypothèses du théorème.

b) Malheureusement, nos deux étudiants ont oublié leur algèbre de base mais ils se rappellent comment utiliser la Méthode de Newton pour estimer la valeur de la racine de $g(t) = r(t) - 10$ entre 3 et 5. Sachant que

$$g(t) = \frac{10 - 500e^{-t}}{1 + 50e^{-t}} \quad \text{et} \quad g'(t) = \frac{1000e^{-t}}{(1 + 50e^{-t/})^2} \ ,$$

faites comme nos deux étudiants et utilisez la Méthode de Newton avec $t_0 = 3$ pour calculer t_1 et t_2. Donnez vos réponse avec une précision de deux chiffres décimaux.

Formule générale : $\boxed{t_{n+1} = t_n - \dfrac{g(t_n)}{g'(t_n)}}$

$t_1 = \boxed{4.04382}$
$t_2 = \boxed{3.91164}$

c) Vous vous joignez aux deux étudiants et, comme vous connaissez votre algèbre, vous résolvez la solution de l'équation $r(t) = 10$ pour trouver la réponse exacte.
Valeur exacte : $t = \boxed{\ln(50)}$

Solution:
a) Puisque r est une fonction continue sur l'intervalle $[3, 5]$ et $r(3) = 5.731720924 < 10 < 14.96001170 = r(5)$, on peut conclure à l'aide du Théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe c entre 3 et 5 où $r(c) = 10$.

b) On utilise la formule $t_{n+1} = t_n - \dfrac{g(t_n)}{g'(t_n)}$ avec $t_0 = 3$.

$$t_1 = t_0 - \frac{g(t_0)}{g'(t_0)} = 3 - \frac{g(3)}{g'(3)} = 4.043821340\ldots$$

$$t_2 = t_1 - \frac{g(t_1)}{g'(t_1)} == 3.911641100\ldots$$

c) On doit résoudre $r(t) = 10$. Donc

$$\frac{20}{1+50e^{-t}} = 10 \Leftrightarrow 20 = 10 + 500e^{-t} \Leftrightarrow \frac{1}{50} = e^{-t} \Leftrightarrow -\ln(50) = -t$$
$$\Leftrightarrow t = \ln(50) = 3.912023005\ldots$$

Question 11 (**9 points + 1 point boni**)
La quantité d'une certaine hormone d'un patient est modélisée par le système dynamique discret (SDD) suivant.

$$x_{t+1} = \frac{x_t^2 - 4x_t}{1+x_t} + d$$

où x_t est la quantité d'hormone en mg au temps t en jours. Le paramètre $d \geq 0$ représente la dose qui est donnée au patient à la fin de chaque jour.
a) Donnez la fonction génératrice du SDD.

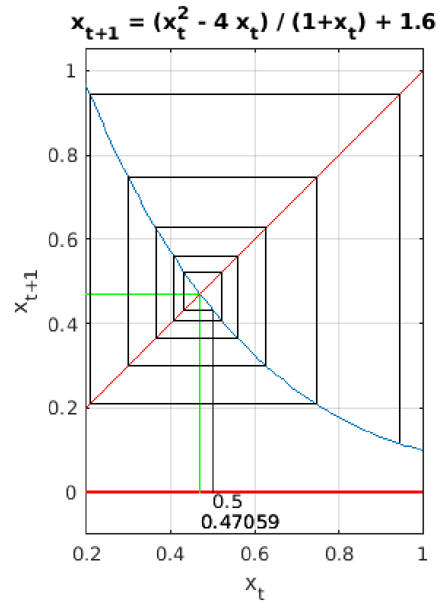
Réponse : $\boxed{f(x) = \dfrac{x^2-4x}{1+x} + d}$

b) Trouvez le point d'équilibre du SDD. Ce point devrait dépendre de d.

Réponse : $\boxed{p = \dfrac{d}{5-d}}$

c) Pour quelles valeurs de d a-t-on un point d'équilibre positif ?
Réponse : $0 < d < \boxed{5}$

d) Si la dose est $d = 1.6$ mg, tracer un graphe en forme de toile d'araignée pour déterminer la stabilité du point d'équilibre. Débutez avec $x_0 = 0.5$ mg. Faite quatre itérations. On vous donne le graphe de la fonction génératrice ci-dessous. Bien identifier les axes et les points que vous avez tracés.



e) Si on considère $d = 1.6$ comme en (d), quelle conclusion pouvons nous tirer du diagramme en forme de toile d'araignée lorsque $x_0 = 0.5$ mg ? À long terme, la quantité d'hormone va (encerclez la lettre de votre réponse)

A) diminuer pour devenir nul.

B) devenir négative indiquant que le patient n'a plus d'hormone.

C) osciller pour converger vers un point d'équilibre stable.

D) osciller pour atteindre un niveau dangereux (on espère que les médecins vont arrêter le traitement avant d'atteindre ce niveau).

E) osciller pour converger vers 1.5 mg qui est la dose administrée à tous les jours.

F) osciller pour converger vers un point d'équilibre instable.

f) Les médecins constatent que le patient ne va pas très bien et décide d'augmenter la dose à $d = 4$ mg. On a donc le SDD

$$x_{t+1} = \frac{x_t^2 - 4x_t}{1 + x_t} + 4$$

Donnez la fonction génératrice et calculer sa dérivée.

La fonction génératrice : $\boxed{f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{1 + x} + 4}$

et sa dérivée : $\boxed{f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 4}{(1 + x)^2}}$

g) Énoncez le théorème de stabilité pour les SDD nonlinéaires et utilisez le pour déterminer la stabilité du point d'équilibre $p = 4$ lorsque $d = 4$.

h) Donnez les valeurs de d pour que le SDD en (a) est un point d'équilibre positif et stable. Ceci est la question boni. Gardez comme dessert.

Solution:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{1+x} + d$

b) On cherche les valeurs de p telles que $f(p) = p$. Donc,

$$\frac{p^2-4p}{1+p} + d = p \Leftrightarrow (p^2-4p) + d(1+p) = p(1+p) \Leftrightarrow (d-5)p = -d \Leftrightarrow p = \frac{d}{5-d}$$

c) Le point d'équilibre p que l'on a obtenu en (b) est positif si $0 < d < 5$.

d)

e) La réponse est D.

f) La fonction génératrice est $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{1+x} + 4$ et sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{x^2+2x-4}{(1+x)^2}$.

g) Si p est un point d'équilibre du SDD $x_{n_1} = f(x_n)$ et $|f'(p)| < 1$, alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable. Si $|f'(p)| > 1$, alors le point d'équilibre est instable. On ne peut rien conclure si $|f'(p)| = 0$.

Puisque $|f'(4)| = 4/5 < 1$, le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

h) On a trouvé en (b) que le point d'équilibre est $p = \dfrac{d}{5-d}$ et on peut conclure de (f) que

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-4}{(1+x)^2} = 1 - \frac{5}{(1+x)^2}$$

Or

$$f'(p) = 1 - \frac{5}{(1+d/(5-d))} = 1 - \frac{5}{(5/(5-d))^2} = 1 - \frac{(5-d)^2}{5}$$

Pour avoir stabilité, il faut $|f'(p)| < 1$. Donc, il faut que

$$0 < \frac{(5-d)^2}{5} < 2 \Leftrightarrow 0 < (5-d)^2 < 100 < 5-d < \sqrt{10} \Leftrightarrow -\sqrt{10} < d-5 < 0 \Leftrightarrow 5-\sqrt{10} < d < 5\,.$$

Puisque $0 < d < 5$, on a bien un point d'équilibre positif.

Question 12 (**2 points**)

La fonction $g(x)$ est donnée par l'équation différentielle

$$g''(x) = 2\cos(x) + 3\sin(x)$$

avec les conditions (initiales) $g'(0) = 5$ et $g(0) = 3$. Quelle est la fonction $g(x)$?

$g(x) = \boxed{-2\cos(x) - 3\sin(x) + 8x + 5}$

Solution:

On a que

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int g''(x)\,\mathrm{d}x = \int (2\cos(x) + 3\sin(x))\,\mathrm{d}x \\ &= 2\sin(x) - 3\cos(x) + C \end{aligned}$$

La condition $g'(0) = 5$ donne $5 = -3 + C$. Donc $C = 8$. On obtient

$$g'(x) = -2\sin(x) + 3\cos(x) + 8\ .$$

Finalement,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int g'(x)\,\mathrm{d}x = \int (2\sin(x) - 3\cos(x) + 8)\ \mathrm{d}x \\ &= -2\cos(x) - 3\sin(x) + 8x + D \end{aligned}$$

La condition $g(0) = 3$ donne $3 = -2 + D$. Donc $D = 5$. On obtient

$$g(x) = -2\cos(x) - 3\sin(x) + 8x + 5\ .$$

Question 13 (**2 points**)
Évaluez l'intégrale définie suivante

$$\int_1^2 4x^3\,\mathrm{d}x = \boxed{\ 15\ }$$

Solution:
Puisque $F(x) = x^4$ est une primitive de $f(x) = 4x^3$, le Théorème fondamental du calcul nous donne $\displaystyle\int_1^2 4x^3\,\mathrm{d}x = x^4\Big|_{x=1}^{x=2} = 2^4 - 1^4 = 15$.

Question 14 (**8 points**)
Évaluez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int \frac{x^{1/3} + 2x^{-1/3}}{x^{2/3}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{3}{2}x^{2/3} + 2\ln(x) + C}$

b) $\displaystyle\int x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{x^3\ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + C}$

c) $\displaystyle\int \frac{(e^x + 2)e^x}{\sqrt{e^x + 1}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{2}{3}(e^x + 1)^{3/2} - 2(e^x + 1)^{1/2} + C}$

Solution:
a) On a

$$\int \frac{x^{1/3} + 2x^{-1/3}}{x^{2/3}}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^{-1/3} + \frac{2}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^{2/3} + 2\ln(x) + C$$

b) Cette dernière intégrale se calcul à l'aide de la méthode d'intégration par parties. Posons $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = x^2$. On obtient $f'(x) = 1/x$, $g(x) = x^3/3$ et

$$\int x^2\ln(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3\ln(x)}{3} - \int \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3\ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

c) Si on pose $u = e^x + 1$, on a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = e^x$. Donc $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$ et on obtient

$$\int \frac{(e^x + 2)e^x}{\sqrt{e^x + 1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u + 1}{u^{1/2}}\,\mathrm{d}u = \int \left(u^{1/2} + u^{-1/2}\right)\,\mathrm{d}u$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2} + C \\
&= \frac{2}{3}(e^x + 1)^{3/2} + 2(e^x + 1)^{1/2} + C
\end{aligned}
$$