Université d'Ottawa · University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

# MAT 1720 A – Partiel 2
## 11 Novembre 2019
## Professeure: Yasmine Samia

NOM Solutions – V1

# D'ETUDIANT

Encerclez votre DGD:

DGD 1 (10h00 - 11h30) DGD 2 (11h30 - 13h00) DGD 3 (13h00 - 14h30)

**Instructions:**

- La durée de l'examen est 80 minutes.
- AUCUNE calculatrice n'est permise.
- L'utilisation de manuels, notes de cours ou de tout appareil électronique est interdite.
- Les questions 1 à 6 sont des questions à choix multiples. Ces questions ont une valeur de 2 points chacune, et on n'accorde pas de points partiels. Veuillez écrire vos réponses dans la case correspondante de la grille ci-bas.
- Les questions 7 et 8 exigent une solution complète, donc organisez votre temps en conséquence. La réponse correcte exige une justification écrite de manière lisible et logique.
- Vous pouvez utiliser le verso des pages comme brouillon, ou feuilles de réponses en l'indiquant clairement.

**Inscrivez vos réponses aux questions à choix multiples:**

| Q1 | Q2 | Q3 | Q4 | Q5 | Q6 |
|---|---|---|---|---|---|
| B | A | D | B | C | E |

**N'inscrivez rien dans le tableau suivant:**

| QCM | Q7 | Q8 | Total |
|---|---|---|---|
| /12 | /4 | /4 | /20 |

585, av. King-Edward
Ottawa (Ontario) K1N 6N5 Canada

585 King Edward Avenue
Ottawa, Ontario K1N 6N5 Canada

(613) 562-5864 • Téléc./Fax (613) 562-5776
Courriel/Email: uomaths@science.uottawa.ca

## Partie 1: Questions à choix multiples

1. (2 points) Soit $y = f(x)$ une fonction dont quelques valeurs sont données dans le tableau suivant:

| $x$ | 3 | 3.5 | 4 | 4.5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 3 | 5 | 8 | 12 |

Trouvez la somme de Riemann de $f(x)$ sur l'intervalle $[3, 5]$ avec $n = 4$ rectangles de même largeur en utilisant les extrêmités gauches des sous-intervalles correspondants.

$3, 3.5, 4, 4.5$

A. 8 B. 9 C. 14 D. 15 E. 18 F. 20

$$S = 0.5\left[f(3) + f(3.5) + f(4) + f(4.5)\right]$$
$$= 0.5\left[2 + 3 + 5 + 8\right]$$
$$= 0.5\left[18\right] = 9$$

$$\Delta x = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$$

2. (2 points) La dérivée de $f(x) = (\sin x)^x$ en $x = \frac{\pi}{2}$ est:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4 F. 5

Dérivation logarithmique :

$$\ln f(x) = \ln (\sin x)^{\sin x} = \sin x . \ln(\sin x)$$
$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x . \ln(\sin x) + \cancel{\sin x} . \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}}$$
$$\Rightarrow f'(x) = f(x)\left[\cos x \ln(\sin x) + \cos x\right]$$
$$= (\sin x)^x . \left[\cos x \ln(\sin x) + \cos x\right]$$
$$\Rightarrow f'(\pi/2) = \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\pi/2} . \left[\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) . \ln\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)} + \cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right]$$
$$= (1)(0) = 0$$

3. (2 points) La dérivée de la fonction $F(x) = \int_1^{x^2} t^2\,dt$ est:

A. $2x^4$ B. $x^5$ C. $2x^3$ D. $2x^5$ E. $x^4$ F. $x^3$

Soit $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$.

$\Rightarrow F(u) = \int_1^u t^2 dt \Rightarrow F'(u) = u^2$ (par TFC1).

Par TFC1 et la dérivée en chaîne $\Rightarrow F'(x) = F'(u) \cdot u'(x)$
$= u^2 \cdot (2x)$
$= x^4 \cdot 2x = 2x^5$.

4. (2 points) Si $f''(x) = \dfrac{2 - 3\sqrt{x}}{x^3}$, $f'(1) = 1$, $f(1) = -1$, alors $f(4) =$

A. 0 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{2}{3}$ F. 1

- $f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3x^{1/2}}{x^3}\right)dx = \int \left(2x^{-3} - 3x^{-5/2}\right)dx$

$= 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} - 3 \cdot \frac{x^{-3/2}}{-3/2} + C = -\frac{1}{x^2} + 2x^{-3/2} + C$.

$f'(1) = -1 + 2 + C = 1 \Rightarrow C + 1 = 1 \Rightarrow C = 0$.

$\Rightarrow \boxed{f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2x^{-3/2}}$

- $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(-x^{-2} + 2x^{-3/2}\right)dx$

$= -\frac{x^{-1}}{-1} + 2\frac{x^{-1/2}}{-1/2} + K$

$= \frac{1}{x} - 4x^{-1/2} + K$

$f(1) = 1 - 4 + K = -1 \Rightarrow -3 + K = -1 \Rightarrow K = 2$.

Ans: $\boxed{f(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 2}$

$$f(4) = \frac{1}{4} - \frac{4}{\sqrt{4}} + 2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{4}{2} + 2$$

$$= \frac{1}{4} - \cancel{2} + \cancel{2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

5. (2 points) L'approximation de $\sqrt{15}$, obtenue en utilisant la linéarisation de $f(x) = \sqrt{5x+1}$ en $a = 3$, est

A. $\frac{35}{9}$ B. $\frac{34}{9}$ C. $\frac{31}{8}$ D. $\frac{27}{7}$ E. $\frac{23}{6}$ F. $\frac{19}{5}$

• $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}} \Rightarrow f'(3) = \frac{5}{2\sqrt{16}} = \frac{5}{8}$ et $f(3) = \sqrt{16} = 4$.

$\Rightarrow$ la Linéarisation de $f(x)$ en $a=3$ : $L(x) = \frac{5}{8}(x-3)+4$.

• $\sqrt{15} = \sqrt{5x+1} \Leftrightarrow 15 = 5x+1 \Leftrightarrow 14 = 5x \Leftrightarrow x = 14/5$

Donc $\sqrt{15} = f\left(\frac{14}{5}\right) \approx \frac{5}{8}\left(\frac{14}{5}-3\right)+4 = \frac{5}{8}\cdot\frac{-1}{5}+4 = \frac{-1+32}{8} = \frac{31}{8}$.

6. (2 points) Evaluez $\int_0^1 \arctan x \, dx$:

A. $\frac{1}{4}(\pi + \ln 2)$

B. $\frac{1}{4}\pi + \ln 2$

C. $\frac{1}{2}(\pi - 2\ln 2)$

D. $\frac{1}{2}(\pi - \ln 2)$

E. $\frac{1}{4}(\pi - 2\ln 2)$

F. $\frac{1}{2}\pi - \ln 2$

* Par parties :

$$\begin{cases} u = \arctan x & dv = dx \\ du = \frac{1}{1+x^2}dx & v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \arctan x \, dx = \left[x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx\right]_0^1$$

$\rightarrow$ Changement de variable :

$$\begin{cases} u = 1+x^2 \\ du = 2x\,dx \\ dx = \frac{du}{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \arctan x \, dx = \left[x \arctan x - \int \frac{\cancel{x}}{u}\cdot\frac{du}{2\cancel{x}}\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\ln|u|\right]_{x=0}^{x=1}$$

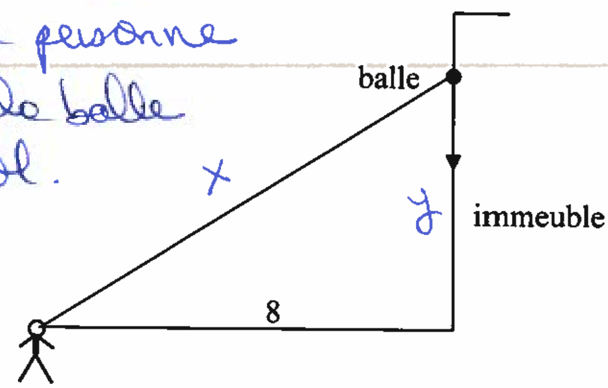
$$= \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right]_0^1$$

$$= \left(1.\arctan(1) - \frac{1}{2}\ln(1+1)\right) - \left(0 - \cancel{\frac{1}{2}\ln(1)}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{4}(\pi - 2\ln 2)$$

**Partie 2: Questions à développement**

7. (4 points) On laisse tomber une balle du haut d'un immeuble. Une personne se trouve à une distance de 8 mètres de cet immeuble. Au moment où la distance entre la balle et les yeux de la personne est de 10 mètres, cette distance diminue à un taux de de 1.6 m/sec. Quel est le taux de variation de la distance entre la balle et le sol à ce moment?




① Soit: $x$ = la distance entre la balle et les yeux de la personne

$y$ = la hauteur de la balle par rapport au sol.

② Données:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=10m} = -1{,}6 \text{ m/s}.$$

On cherche: $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=10m} = ?$

③ On a que: $x^2 = y^2 + 8^2$

• Dérivée implicite par rapport au temps $t$:

$$\cancel{2}x\frac{dx}{dt} = \cancel{2}y \cdot \frac{dy}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \text{Au moment où } x = 10\text{ m}: \\ y = \sqrt{10^2 - 8^2} \\ \quad = \sqrt{100-64} = \sqrt{36} = 6\text{ m} \end{cases}$$

Ainsi: $10 \cdot (-1{,}6) = 6 \cdot \frac{dy}{dt}$

$\Leftrightarrow \quad -16 = 6\frac{dy}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} = -\frac{16}{6}\text{ m/s} = -\frac{8}{3}\text{ m/s}}$$

8. (4 points) Evaluez $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$

Changement de variable :

$$\begin{cases} u = \sqrt{x}+1 \Rightarrow \sqrt{x} = u-1 \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}.du \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx = \left[\int \frac{1}{u}\cdot 2\sqrt{x}\,du\right]_{x=1}^{x=4}$$

$$= \left[2\int \frac{u-1}{u}.du\right]_{x=1}^{x=4}$$

$$= \left[2\int\left(1-\frac{1}{u}\right)du\right]_{x=1}^{x=4}$$

$$= 2\left[u - \ln|u|\right]_{x=1}^{x=4}$$

$$= 2\left[\sqrt{x}+1 - \ln|\sqrt{x}+1|\right]_{x=1}^{x=4}$$

$$= 2\left[\left(\sqrt{4}+1-\ln|\sqrt{4}+1|\right)-\left(\sqrt{1}+1-\ln|\sqrt{1}+1|\right)\right]$$

$$= 2\left[2+1-\ln(3)-2+\ln(2)\right]$$

$$= 2\left[1-\ln(3)+\ln(2)\right]$$