Université d'Ottawa · University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT 1741 A – Test 3 – V.1

Professeur : Abdelkrim El basraoui

09 Novembre 2017

Nom :____________________________ **Prénom** :____________________________

Numéro d'étudiant :____________________

Intructions:

- La durée de cet examen est de **80 minutes**.
- Cet examen est un examen à livre fermé.
- Les questions 1 et 2 sont à choix multiples et valent 1 point chacune. Il n'y a pas de points partiels. Inscrivez vos réponses dans le tableau fourni à la deuxième page.
- Les questions 3 à 5 valent 6 points chacune. **Pour obtenir tous les points pour ces questions vos réponses doivent être justifiées et écrites de façon claire, logique et lisible.**
- La question 6 est une question bonus qui vaut 1 point. Pour obtenir des points pour la question bonus numéro 6, votre solution doit être totalement correcte.
- Il est interdit de se servir de vos appareils électroniques. Vous devez les étteindre et les ranger dans votre sac: vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées dont le résultat pourrait être un 0 (zéro) pour l'examen.
- Bonne chance!!!

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature: ____________________________

Inscrivez vos réponses pour les questions à choix multiples dans ce tabeau.

Question 1	Question 2

Ne rien inscrire dans le tableau suivant.

Total QCM	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Total sur 20

1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?
$U = \{(x^4,\ 2x+y,\ x-2y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$
$V = \{(x,\ y,\ 3x-y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$
$W = \{(x,\ y,\ xy-1) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$
$X = \{(x,y,z) \mid 2x-\pi y+z=0\}$

A. Seulement U et V
B. Seulement U et W
C. Seulement V et X
D. Seulement U, W et X
E. Seulement U, V et X
F. Seulement V et W

2. Parmi les énnoncés suivants le ou lesquel(s) est/sont vrais?

I. L'ensemble des vecteurs $\{(1,2),\ (2,1),\ (0,1)\}$ engendre $\mathbb{R}^2$.

II. L'ensemble $\{(x,y,z) \mid\ x-y+2z=-1\}$ est une sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

III. Si dans un espace vectoriel V il existe un vecteur qui est combinaison linéaire de $u-v$ et $u+w$ alors les vecteurs $\{u,v,w\}$ de V engendrent V.

IV. L'ensemble $\{p(x) \in \mathbb{P}_2 \mid p(-1)=0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{P}_2$, où $\mathbb{P}_2$ l'espace des polynômes de degré au plus 2.

V. L'ensemble $\{\cos^2(3x),\ \sin^2(3x),\ 2\}$ est linéairement dépendant dans $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$, où $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

A. Seulement I, II et III
B. Seulement II, III et IV
C. Seulement I, IV et V
D. Seulement II, III et V
E. Seulement I, II, IV, et V
F. Tous les énnoncés.

3. Soit le sous-ensemble de $\mathbb{M}_{2,2}$, l'espace des matrices 2×2, suivant $W = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a+b-c = 0\}$.

a) Montrez que W est un sous-espace de $\mathbb{M}_{2,2}$.

b) Donnez un ensemble de vecteurs qui engendre W.

c) En déduire une base pour W et donnez sa dimension.

4. Dans $\mathbb{P}_2$, l'espace des polynômes de degré au plus 2 et à coéfficients réels, soit

$$U = \{p(x) \in \mathbb{P}_2 \mid p(1) = 0\}.$$

a) <u>Vérifiez</u> que U est fermé pour la multiplication scalaire, <u>ou bien</u> exprimez U sous une forme qui montre que U est un sous-espace.

(Pour les parties (b) et (c) vous pouvez supposer que U est un sous-espace de $\mathbb{P}_2$.)

b) Trouvez une base de U et donnez sa dimension $\dim U$.

c) Donnez une base de U différente de celle donnée dans (b).

(Justifiez vos réponses.)

5. Indiquez si chacun des énoncés suivants est (toujours) vrai ou est (possiblement) faux, dans la case spécifiée.

- Si vous indiquez qu'un énoncé est (possiblement) faux, vous devez **donner un contre-exemple explicite qui le montre.** Vous pouvez utiliser un exemple soit numérique soit avec des matrices soit des fonctions!
- Si vous indiquez que l'énoncé est (toujours) vrai, vous devez expliquer clairement votre raisonnement.

a) $X = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f(1)f(2) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace de l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{F}(\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

RÉPONSE: $\boxed{}$

b) Soit V est un espace vectoriel. Si $\{v_1, v_2\}$ est linéairement indépendant dans V, alors pour tout vecteur $v_3 \notin \text{Vect}\{\text{v}_1, \text{v}_2\}$ l'ensemble $\{v_1, v_2, v_3\}$ est linéairement dépendant dans V.

RÉPONSE: $\boxed{}$

5 (suite).

c) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\,2} \mid ad = 0 \right\}$ est un sous-espace de $\mathbb{M}_{2\,2}$.

RÉPONSE: $\boxed{}$

d) Soient u_1, u_2 et u_3 des vecteurs d'un espace vectoriel U. Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ est linéairement indépendant, alors $\{u_1 + u_2, u_2 - u_3, u_3\}$ est aussi linéairement indépendant.

RÉPONSE: $\boxed{}$

6. [Bonus] Sachant que $V = \mathbb{R}^2$ muni des opérations non-standards suivantes:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 2, y_1 + y_2)$$

$$k \boxdot (x, y) = (kx - 2k + 2, ky)$$

est un espace vectoriel, trouvez l'inverse additive du vecteur (0,0) de $\mathbb{R}^2$ par rapport à ces opérations.

(Page supplémentaire. V.1)