MAT 1739 - Cours 12 - Les fonctions exponentielles et logarithmiques

Automne 2019

Table des matières

1 Définitions et propriétés de base

1.1 Fonctions exponentielles

Pour la culture : la fonction exponentielle de base e, noté exp, est l'unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable et telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On a donc

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On note aussi $\exp(x) = e^x$. La fonction *logarithme népérien* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est la fonction réciproque de la fonction exp, c'est-à-dire que

$$\exp(\ln(x)) = x \text{ (pour tout } x \in]0, +\infty[) \quad \text{et} \quad \ln(\exp(x)) = x \text{ (pour tout } x \in \mathbb{R}).$$

Définition 1. Soit $b > 0$, $b \neq 1$ une constante fixée. La fonction exponentielle de base b est la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = b^x = e^{x \ln(b)}$.

La fonction exponentielle exp est la fonction exponentielle de base $e \approx 2.718\ldots$.

Pour la culture. On a

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Proposition 2. *Soit $a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :*

- $b^x > 0$.
- *Si $b \neq 1$, on a $b^x = b^y$ si et seulement si $x = y$.*
- $b^{x+y} = b^x b^y$ *et* $b^{x-y} = \frac{b^x}{b^y}$.
- $b^{xy} = (b^x)^y$.
- $(ab)^x = a^x b^x$ *et* $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

1.2 Fonctions logarithmiques

Définition 3. Soit $b > 0$, $b \neq 1$ une constante fixée. La fonction logarithmique de base b est la fonction $\log_b :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$. On a $y = \log_b(x)$ si et seulement si $x = b^y$.

Notation. On note ln le *logarithme népérien* : c'est le logarithme en base e. On a $y = \ln(x)$ si et seulement si $x = \exp(y)$.

Proposition 4. *Soit $b > 0$, $b \neq 1$ et $x, y > 0$. On a les propriétés suivantes :*
- *on a $\log_b(x) = \log_b(y)$ si et seulement si $x = y$.*
- $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$ *et* $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$.
- $\log_b(x^p) = p\log(x)$ *pour tout* $p \in \mathbb{R}$.
- $b^{\log_b(x)} = x$ *et* $\log_b(b^x) = x$.
- $\log_b(1) = 0$ *et* $\log_b(b) = 1$.

On a donc $\boxed{e^{\ln(x)} = x \text{ et } \ln(e^x) = x}$. En particulier, $\boxed{\ln(e) = 1}$.

2 Liens avec les dérivées

2.1 Fonctions exponentielles et dérivées

D'une manière générale, si u est une fonction dérivable, on a

$$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}.}$$

Proposition 5. *Soit $b > 0$ et $f : x \mapsto b^x$. Alors la dérivée de la fonction f est*

$$f'(x) = \ln(b) \times b^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Justification : On a $f(x) = b^x = e^{x\ln(b)} = u(v(x))$, où on a posé $u(x) = \exp(x)$ et $v(x) = x\ln(b)$. D'après la formule de la dérivée d'une composée, on a

$$f'(x) = \underbrace{\ln(b)}_{v'(x)} \times \underbrace{\exp'(x\ln(b))}_{u'(v(x))} = \ln(b) \times e^{x\ln(b)} = \ln(b) \times b^x.$$

Exemple. Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto 2^x$
(b) $f : x \mapsto xe^x$
(c) $f : x \mapsto e^{2x+1}$
(d) $f : x \mapsto e^x - e^{-x}$
(e) $f : x \mapsto x^2 10^x$

Solutions :

(a) $f : x \mapsto 2^x$. Le cours donne directement $f'(x) = 2^x\ln(2)$. On peut aussi retrouver ce résultat en écrivant $2^x = e^{x\ln(2)}$ et en dérivant une composée.

(b) $f : x \mapsto xe^x$ On dérive un produit :

$$f'(x) = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x.$$

(c) $f : x \mapsto e^{2x+1}$. On dérive une composée :

$$f'(x) = (2x+1)'e^{2x+1} = 2e^{2x+1}.$$

(d) $f : x \mapsto e^x - e^{-x}$. On a

$$f'(x) = e^x - (-x)'e^{-x} = e^x + e^{-x}.$$

(e) $f : x \mapsto x^2 10^x$. On dérive un produit de fonctions

$$f'(x) = 2x10^x + x^2 \times (10^x\ln(10)) = x\big(2 + x\ln(10)\big)10^x.$$

2.2 Fonctions logarithmiques et dérivées

La dérivée du logarithme népérien ln est

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

D'une manière générale, si $f : I \to]0, +\infty[$ est une fonction dérivable, on retiendra que la dérivée de la fonction composée $g : x \mapsto \ln(f(x))$ est

$$\boxed{g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.}$$

On a la propriété suivante :

Proposition 6. *Soit $b > 0$, $b \neq 1$. Alors*

$$\log_b'(x) = \frac{1}{x \ln(b)}.$$

Exemple. Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$.

(b) $f : x \mapsto \log_{10}(x)$.

(c) $f : x \mapsto x \ln(x) - x$.

Solutions.

(a) $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$. On utilise la formule donnée précédemment, et on trouve

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

(b) $f : x \mapsto \log_{10}(x)$. On a

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln(10)}.$$

(c) $f : x \mapsto x \ln(x) - x$. On a

$$f'(x) = (x)' \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x).$$

2.3 Variations de $\exp$ et $\log$

On a vu que la fonction exp vérifie $\exp' = \exp$ et $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $\exp'(x)$	$+$	
variations de exp	$0 \nearrow$	$+\infty$

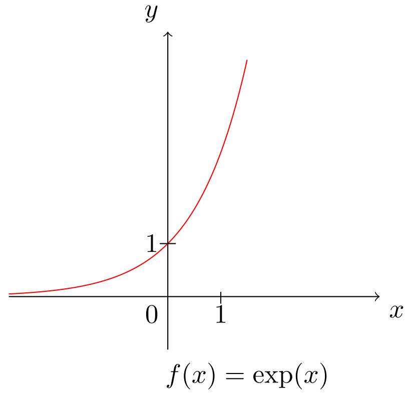
et le graphe de exp a une concavité vers le haut sur $\mathbb{R}$ puis que $\exp''(x) = \exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Notez bien en particulier qu'on a

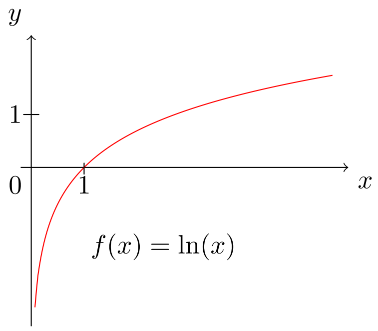
$$\boxed{\exp(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

On a vu que la fonction ln vérifie $\ln'(x) = 1/x$ pour tout $x > 0$. On a le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
signe de $\frac{1}{x}$		$+$	
variations de ln	$-\infty$		$+\infty$

et le graphe de ln a une concavité vers le bas sur $]0, \infty[$ puis que $\ln''(x) = -1/x^2 < 0$ pour tout $x > 0$.





2.4 Croissance de exp et log

Proposition 7. *On a les limites suivantes :*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0.$$

Plus généralement, si p est une fonction polynomiale de coefficient dominant a, alors on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{p(x)} = \mathit{signe}(a) \times (+\infty) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} p(x)e^x = \lim_{x \to -\infty} p(x)e^x = 0.$$

Autrement dit, la fonction exp croît asymptotiquement plus vite que n'importe quelle fonction polynomiale.

Exemple. On a

(a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{-5x^3 + 3x^2 + 12} = -\infty.$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{1000}}{e^x} = 0.$

(c) $\lim_{x \to -\infty} (30x^4 - 5x^3 - 1)e^x = 0.$

Proposition 8. *On a les limites suivantes*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0.$$

Plus généralement, si p est une fonction polynomiale de degré ≥ 1 et de coefficient dominant a, alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{\ln(x)} = \textit{signe}(a) \times (+\infty).$$

Exemple. On a

(a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{-2x^2 + 3x + 5} = 0$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2 + 3x + 5}{\ln(x)} = -\infty$