Changeerthen Voratharasan
40107115
Comp-232
section DD
Adam Krzyzak
Assignment #1.

Due: 29/09/19

1. a) $((p \vee r) \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee r)$

p	q	r	$(p \vee r)$	$\wedge$	$(q \vee r)$	$\leftrightarrow$	$(p \wedge q)$	$\vee\ r$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T	T	F	T
F	T	F	F	F	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T	F	T
F	F	F	F	F	F	T	F	F

Tautology

b) $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$

p	q	$(p \oplus q)$	$\wedge$	$(p \oplus$	$\neg q)$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T

Contradiction

c) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \vee r))$

p	q	r	$(p \rightarrow$	$(q \rightarrow r))$	$\leftrightarrow$	$(p \rightarrow$	$(q \wedge r))$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F
T	F	T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T	T	F
F	F	F	T	T	T	T	F

Contingency

d) $(p \wedge (\neg q \to \neg p)) \to q$

p	q	$(p \wedge$	$(\neg q \to \neg p))$	$\to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

Tautology

2. a) $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$ Invalid

p	q	r	$(p \to r)$	$\wedge$	$(q \to r)$	$\equiv$	$(p \wedge q)$	$\to r$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	T	T	F	T
T	F	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T	F	T

Counter example: $p = T$ $q = F$ $r = F$

$$(T \to F) \wedge (F \to F) \equiv (T \wedge F) \to F$$
$$(\neg T \vee F) \wedge (\neg F \vee F) \equiv (T \wedge F) \to F$$
$$F \wedge T \equiv F \to F$$
$$F \equiv (\neg F \vee F)$$
$$F \not\equiv T$$

b) $(p \to q) \vee (p \to r) \equiv (p \vee q) \to r$ Invalid

p	q	r	$(p \to q)$	$\vee$	$(p \to r)$	$\equiv$	$(p \vee q)$	$\to r$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	F	T	F
T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T	F	T

Counter example: $p = T$ $q = T$ $r = F$

$$(T \to T) \vee (T \to F) \equiv (T \vee T) \to F$$
$$(\neg T \vee T) \vee (\neg T \vee F) \equiv (T \to F)$$
$$T \vee F \equiv (\neg T \vee F)$$
$$T \not\equiv F$$

c) $(((p \lor q) \land (p \to r) \land (q \to r)) \to r \equiv T$

$((p \lor q) \land (p \to r) \land (q \to r)) \to r) \equiv T$ Valid

p	q	r						
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	T	F	T	T

$\equiv T$

$\iff (((p \lor q) \land (p \to r) \land (q \to r)) \to r)$
$\iff ((p \lor q) \land (\neg p \lor r) \land (\neg q \lor r)) \to r)$
$\iff r \lor \neg((p \lor q) \land (\neg p \lor r) \land (\neg q \lor r))$
$\iff \neg(\neg r \land ((p \lor q) \land (\neg p \lor r) \land (\neg q \lor r))$
$\iff \neg((\neg r \land \neg r) \land (p \lor q) \land (\neg p \lor r) \land (\neg q \lor r))$
$\iff \neg((p \lor q) \land (\neg p \lor r) \land \neg r \land (\neg q \lor r) \land \neg r))$
$\iff \neg((p \lor q) \land (\neg p \lor \neg r) \land (\neg q \lor \neg r))$
$\iff \neg((p \lor q) \land \neg r \land (\neg p \lor \neg q))$
$\iff \neg(\neg r \land F)$
$\iff (r \lor T)$
$\iff T$

d) $(((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)) \equiv T$

$(((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)) \equiv T$

p	q	r					
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	F
T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

Valid

$\equiv T$

2. d) Proof.

$$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$$
$$\Leftrightarrow \neg((p \to q) \land (q \to r)) \lor (p \to r)$$
$$\Leftrightarrow \neg((\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r)) \lor (\neg p \lor r)$$
$$\Leftrightarrow ((p \land \neg q) \lor (q \land \neg r)) \quad \lor (\neg p \lor r)$$
$$\Leftrightarrow ((p \land \neg q) \lor (\neg p \lor r)) \quad \lor (q \land \neg r)$$
$$\Leftrightarrow (((p \lor \neg p) \lor r) \land (\neg q \lor \neg p \lor r)) \lor (q \land \neg r)$$
$$\Leftrightarrow ((T \lor r) \land (\neg q \lor \neg p \lor r)) \lor (q \land \neg r)$$
$$\Leftrightarrow (\neg q \lor \neg p \lor r) \lor (q \land \neg r)$$
$$\Leftrightarrow ((\neg q \lor q) \lor \neg p \lor r) \land (\neg q \lor \neg p \lor (r \lor \neg r))$$
$$\Leftrightarrow (T \lor \neg p \lor r) \land (\neg q \lor \neg p \lor T)$$
$$\Leftrightarrow T \land T$$
$$\Leftrightarrow T$$

3. Necessary: If "n is divisible by 6" then "condition"

a) e) f)

Sufficient: If condition is true then n is divisible by 6.

c) d) f)

4. Define: A = File system locked

B = New messages queued

P = System functioning normally

Q = New messages sent to message buffer

a) $\neg A \to B$

b) $\neg A \to P$

c) $\neg B \to Q$

d) $\neg A \to Q$

e) $\neg Q$

5. Let $P: S \times S \longrightarrow \{T, F\}$ where $S = \{1, 2, 3\}$

a) $\exists x\, P(x,3) \longleftrightarrow P(1,3) \vee P(2,3) \vee P(3,3)$

b) $\forall y\, \neg P(2,y) \longleftrightarrow \neg P(2,1) \wedge \neg P(2,2) \wedge \neg(P3,3)$

Let $P, Q: S \times S \Rightarrow \{T, F\}$ where $S = \{1, 2, 3\}$

c)
$$\begin{aligned}\forall x\, \exists y\, (P(x) \vee Q(y)) \longleftrightarrow\ & (P(1) \vee Q(1)) \wedge (P(1) \vee Q(2)) \wedge (P(1) \vee Q(3)) \wedge \\ & (P(2) \vee Q(1)) \wedge (P(2) \vee Q(2)) \wedge (P(2) \vee Q(3)) \wedge \\ & (P(3) \vee Q(1)) \wedge (P(3) \vee Q(2)) \wedge (P(3) \vee Q(3))\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\exists x\, \forall y\, \neg(P(x) \wedge P(y)) \longleftrightarrow\ & \neg(P(1) \wedge Q(1)) \vee \neg(P(1) \wedge Q(2)) \vee \neg(P(1) \wedge Q(3)) \wedge \\ & \neg(P(2) \wedge Q(1)) \vee \neg(P(2) \wedge Q(2)) \vee \neg(P(2) \wedge Q(3)) \wedge \\ & \neg(P(3) \wedge Q(1)) \vee \neg(P(3) \wedge Q(2)) \vee \neg(P(3) \wedge Q(3))\end{aligned}$$

6. a) $P(\text{carlos}, \text{Bulgaria})$
b) $\forall x\, P(x, US)$
c) $\forall x\, \exists y\, P(x,y)$
d) $\forall y\, \exists x\, \neg P(x,y)$
e)
f) $\neg[\exists x\, \exists y\, (P(x,y) \wedge \neg Q(x,y))]$

7. a) $\neg P(\text{carlos}, \text{Bulgaria})$
b) $\neg(\forall x\, P(x, US))$
c) $\neg(\forall x\, \exists y\, P(x,y))$
d) $\neg[\forall y\, \exists x\, \neg P(x,y)]$
e)
f) $[\exists x\, \exists y\, (P(x,y) \wedge \neg Q(x,y))]$

8. a) $\exists x\, \exists y\, (P(x,y)) \vee \forall x\, \forall y\, (Q(x,y))$
$\Leftrightarrow \neg[\exists x\, \exists y\, (P(x,y)) \vee \forall x\, \forall y\, (Q(x,y))]$
$\Leftrightarrow \neg[\exists x\, \exists y\, (P(x,y)) \wedge \neg[\forall x\, \forall y\, (Q(x,y))]$
$\Leftrightarrow \forall x\, \forall y\, (\neg P(x,y)) \wedge \exists x\, \exists y\, (\neg Q(x,y))$

8. b) $\forall x \forall y (Q(x,y) \Leftrightarrow Q(y,x))$

$\Leftrightarrow \neg [\forall x \forall y (Q(x,y) \Leftrightarrow Q(y,x))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y [\neg (Q(x,y) \Leftrightarrow Q(y,x)]$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y [\neg [(Q(x,y) \rightarrow Q(y,x)) \wedge (Q(y,x) \rightarrow Q(x,y))]]$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y [\neg (Q(x,y) \rightarrow Q(y,x)) \vee \neg (Q(y,x) \rightarrow Q(x,y))]$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y [\neg (\neg Q(x,y) \vee Q(y,x)) \vee \neg (\neg Q(y,x) \vee Q(x,y))]$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y [(Q(x,y) \wedge \neg Q(y,x)) \vee (Q(y,x) \wedge \neg Q(x,y))]$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y [Q(x,y) \oplus Q(y,x)]$

c) $\forall y \exists x \exists z (T(x,y,z) \wedge Q(x,y))$

$\neg [\forall y \exists x \exists z (T(x,y,z) \wedge Q(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists y \forall x \forall z \neg (T(x,y,z) \wedge Q(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists y \forall x \forall z (\neg T(x,y,z) \vee \neg Q(x,y))$