Université d'Ottawa · University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT 1722 3X – Test #2A

Professeur : Guy Beaulieu

27 juin, 2017

Nom :______________________________ Prénom :________________________

Il est interdit de se servir de téléphones cellulaires, de dispositifs électroniques non autorisés ou de notes de cours (à moins qu'il s'agisse d'un examen à livre ouvert). Les téléphones et les dispositifs doivent être fermés et rangés dans votre sac : vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées dont le résultat pourrait être un 0 (zéro) pour l'examen.

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature : ____

Prenez le temps de lire tout le document avant de commencer et lisez chaque question attentivement. N'oubliez pas que certaines questions vallent plus de point que d'autre. Notez les questions que vous vous sentez confiant de répondre et répondez à ceux-ci en premier : vous ne devez pas répondre les questions dans l'ordre qu'ils sont écrite.

- La durée de cet examen est d'environ **80 minutes**.
- Cet examen comprends **6** questions pour un total de **20** points.
  - Pour les questions a choix multiple: Encercler la bonne réponse. Il n'y a pas de points partiaux pour le travail de ces questions.
  - Pour les questions à dévelopment: La bonne réponse nécessite une justification écrite lisiblement et logiquement; vous devez me convaincre que vous savez pourquoi votre solution est la bonne. Dessinez des boites autours de vos réponses finales.
- Utilisez l'espace spécifié pour répondre à chacune des questions. Si jamais l'espace ne vous suffit pas ou que vous utilisez l'endos de la page, veuillez l'indiquer clairement où se trouve votre réponse ainsi que la suite du développement, s'il y a lieu.
- Cet examen est à livre fermé et vos notes de cours ne seront pas allouées. L'utilisation de téléphone cellulaire, pagette ou tout autre appareil qui peut transmettre ou stocker de l'information **ne sont pas permis.**
- Seules les calculatrices approvées par la Faculté des Sciences (TI-30X, TI-34X, Casio FX-260X et Casio FX-300X) seront permises .

Bonne Chance!

585, av. King-Edward C.P. 450, Succ. A
Ottawa (Ontario) K1N 6N5 Canada

585 King Edward Ave., P.O. Box 450, Stn. A
Ottawa, Ontario K1N 6N5 Canada

(613) 562-5864 • Téléc./Fax (613) 562-5776
Courriel/Email: uomaths@science.uottawa.ca

d'étudiant :____________________, Note finale : ___________ sur 20

Problème	1	2	3	4	5	6
Notes						

Question 1. [3 points] Supposer que la méthode d'Euler avec un pas de $h = 0,5$ est utilisé pour estimer $y(2)$, où $y(t)$ est la solution de problème de Cauchy $\dfrac{dy}{dt} = y - \ln(t)$, $y(1) = 1$. Laquelle des valeurs suivantes est la plus proche du résultat qui serait obtenue ?

(A) $2,03$; (B) $2,05$; (C) $2,11$; (D) $2,43$; (E) $2,73$.

Solution:
(B) Nous avons que $F(t, y) = y - \ln t$ et que $t_0 = 1$ et $y_0 = 1$.

n	t_n	y_n	$F(t_n, y_n)$	$h \cdot F(t_n, y_n)$
0	1	1	1	0,5
1	1,5	1,5	1,094534892	0,547267446
2	2	2,047267446		

Ainsi, $y(2) \approx 2,05$.

Question 2. [3 points] Trouver la solution du problème de Cauchy $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t^2}$, $y(1) = 2$ et déterminer laquelle des valeurs suivantes est la plus proche de la valeur de $y(2)$.

(A) $-3,1$; (B) $3,2$; (C) $-3,2$; (D) $3,3$; (E) $-3,3$.

Solution:
(D) En séparant les variables

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{y}{t^2} \\
\frac{dy}{y} &= \frac{dt}{t^2} \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dt}{t^2} \\
\ln|y| &= -\frac{1}{t} + C \\
|y| &= Ae^{-1/t} \\
y &= Ae^{-1/t}
\end{aligned}$$

Avec la condition initial $y(1) = 2$ on obtient que

$$2 = Ae^{-1/(1)} \Rightarrow A = 2e$$

Ainsi

$$y(t) = 2ee^{-1/t} = 2e^{1-1/t}$$

D'où

$$y(2) = 2e^{1/2} = 3,297442541 \approx 3,3$$

Question 3. [3 points] La somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{2n}}{5^n}$ est

(A) $\frac{2}{5}$; (B) $\frac{7}{10}$; (C) $\frac{27}{4}$; (D) $\frac{5}{2}$; (E) $\frac{13}{15}$; (F) Aucune de ces réponses.

Solution:
(D)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{2n}}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (3) \left(\frac{3}{5}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{3}{1-3/5} - \frac{1}{1-4/5} = \frac{15}{2} - 5 = \frac{5}{2}$$

Question 4. [3 points] Considérer les séries suivantes :

$$i) \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}; \qquad ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n^3+2}};$$

$$iii) \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sqrt{\frac{n+1}{n^3+2}}; \qquad iv) \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n^4+2}}.$$

Laquelle (Lesquelles) des séries ci-hautes est (sont) convergentes ?

(A) i) et iv) seulement; (B) i) et ii) seulement; (C) iii) et iv) seulement;;

(D) ii), iii) et iv) seulement; (E) ii) et iv) seulement; (F) Aucune de ces réponses.

Solution:

(C)

- Le terme général de i) ne converge pas vers 0. Ainsi, la série diverge par le test de divergence
- Posons $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n^3+2}}$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = 1$, par la forme limite du test de comparaison, nous avons que ii) diverge étant donné que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ est la série harmonique qu'on connait diverge.
- Par le test des séries alternées, iii) converge, puisque $b_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n^3+2}}$ converge vers 0 et est une suite décroissante.
- Posons $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n^4+2}}$ et $b_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = 1$, par la forme limite du test de comparaison, nous avons que iv) converge, étant donné que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann avec $p = 3/2 > 1$ qui implique qu'elle convergence.

Question 5. [4 points] Trouver la solution du problème de Cauchy,

$$\frac{dy}{dt} = y(4-y), \quad y(0) = 6.$$

Solution:

Par la séparation des variables

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= y(4-y) \\
\frac{dy}{y(4-y)} &= dt \\
\int \frac{dy}{y(4-y)} &= \int dt
\end{aligned}$$

Par fraction partielle

$$\frac{1}{y(4-y)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{4-y}\right),$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y(4-y)} &= \int dt \\
\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y}{4-y}\right| &= t + C \\
\left|\frac{y}{4-y}\right| &= Ae^{4t} \\
\frac{y}{4-y} &= Ae^{4t}
\end{aligned}$$

Puisque $y(0) = 6$, nous avons que

$$\frac{(6)}{4-(6)} = Ae^{4(0)} \Rightarrow A = -3$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{y}{4-y} &= Ae^{4t} \\
\frac{y}{4-y} &= (-3)e^{4t} \\
y &= -12e^{4t} + 3ye^{4t} \\
y(1-3e^{4t}) &= -12e^{4t} \\
y &= \frac{12e^{4t}}{3e^{4t}-1}.
\end{aligned}$$

Question 6. [4 points] Considérer la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{2n}}$.

a) Utiliser le test de l'intégral pour justifier que cette série est convergente. Indiquer les critères nécessaires pour que le test de l'intégrale soit applicable.

b) Si la somme partielle $s_4 = \displaystyle\sum_{n=1}^{4} \frac{n}{e^{2n}} \approx 0,18074$, donner une estimation de la somme de la série. (Utiliser au moins 5 chiffres après la décimale dans vos calculs)

Indice: $\displaystyle\int \frac{x}{e^{2x}}\,dx = -\frac{2x+1}{4e^{2x}} + C$

Solution:

(a) Puisque $\dfrac{x}{e^{2x}}$ est continue, positif et décroissant lorsque $x > 1$, le test de l'intégral s'applique. Puisque

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{e^{2x}}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{x}{e^{2x}}\,dx = -\lim_{t\to\infty} \left[\frac{2x+1}{4e^{2x}}\right]_1^t = -\frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2t+1}{e^{2t}} - \frac{3}{e^2}\right) = \frac{3}{4e^2} < \infty$$

cette intégrale impropre converge, et ainsi par le test de l'intégrale la série converge.

(b) Puisque

$$\int_5^{\infty} \frac{x}{e^{2x}}\,dx = -\frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\left[\frac{2x+1}{e^{2x}}\right]_5^t = \frac{11}{4e^{10}} \approx 0,00012$$

et

$$\int_4^{\infty} \frac{x}{e^{2x}}\,dx = \frac{9}{4e^8} \approx 0,00075.$$

La sum s de la série satisfait

$$0,18074 + 0,00012 = 0,18086 < s < 0,18074 + 0,00075 = 0,18149.$$

Alors, une estimation de la somme de la série est $(0,18086 + 0,18149)/2 = 0,18117$.

Page supplémentaire pour brouillon

Page supplémentaire pour brouillon