11.1 Cinématique de rotation

- Une petite bille tourne en sens anti-horaire dans un cercle métallique de 30 cm de diamètre. Elle complète 2 tours en 1.20 s. Quelle est sa vitesse angulaire? Quelle est la position de la bille à 2.00 s (supposez $\theta_i = 0$).

(a) Période $T = \frac{1{,}20 \text{ sec}}{2 \text{ tours}} = \boxed{0.6 \text{ sec}}$

$\boxed{\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{T} = 10{,}5 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}}$

(b) $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \omega \Delta t = \left(10{,}5 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)(2 \text{ sec}) = \boxed{21{,}0 \text{ rad}}$

$\theta_i = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_f = 21{,}0 \text{ rad}}$

Si on veut déterminer angle $0 < \theta_f < 2\pi$

$\frac{\theta_f}{2\pi} = \frac{21{,}0 \text{ rad}}{2\pi} = 3{,}33 \Rightarrow \theta_f = 3(2\pi) + 0{,}33(2\pi)$

$= 3(2\pi) + 2{,}09 \text{ rad}$

$\boxed{\theta_f = 2{,}09 \text{ rad ou } 120^\circ}$ $\boxed{r = 15 \text{ cm}}$

11.1 Cinématique de rotation

$$\boldsymbol{S = \theta r}$$

Vitesse tangentielle

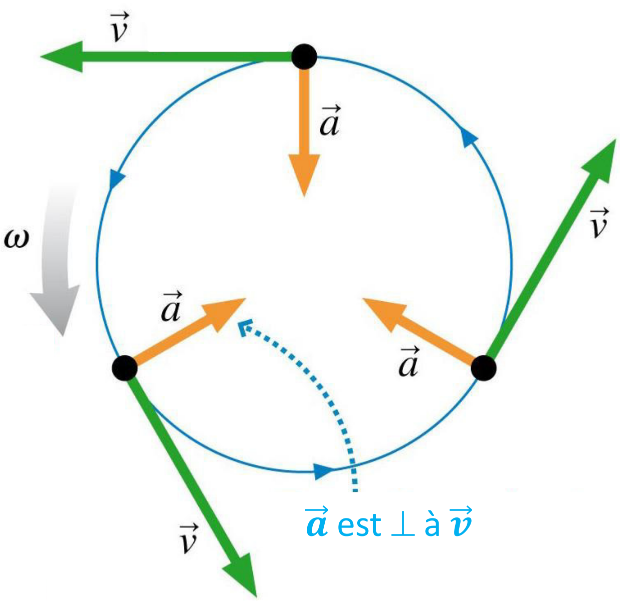
- La vitesse linéaire ou tangentielle de la particule est égale à la longueur de l'arc de cercle divisée par le temps nécessaire pour le parcourir:

$$v_t = \frac{ds}{dt} = \frac{r d\theta}{dt} = \omega r$$

Accélération centripète

- L'accélération centripète est alors:

$$a_r = a_c = \frac{{v_t}^2}{r} = \omega^2 r$$



11.1 Cinématique de rotation

Accélération angulaire

- Dans le cas où la vitesse angulaire augmente ou diminue, le mouvement circulaire est dit non-uniforme.

- On définit alors l'accélération angulaire comme:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

- En rad/s^2.

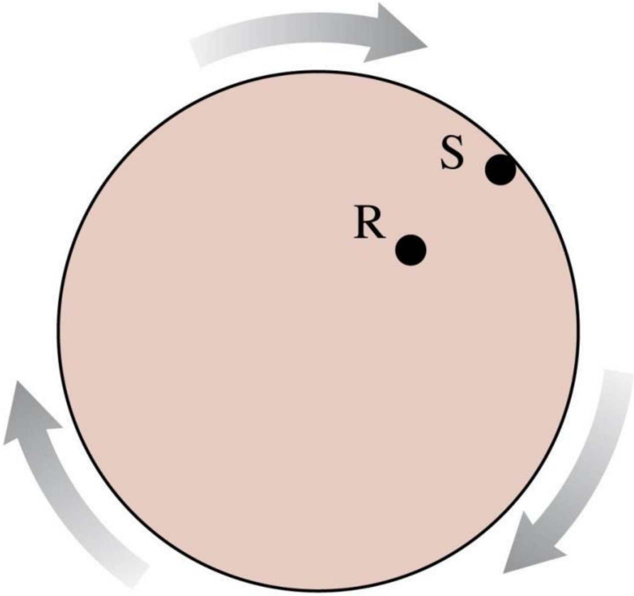
- Ce qui donne une accélération tangentielle:

$$a_t = \alpha r$$

$$\boxed{\begin{aligned} s &= \theta r \\ v_t &= \omega r \\ a_t &= \alpha r \end{aligned}}$$

Question

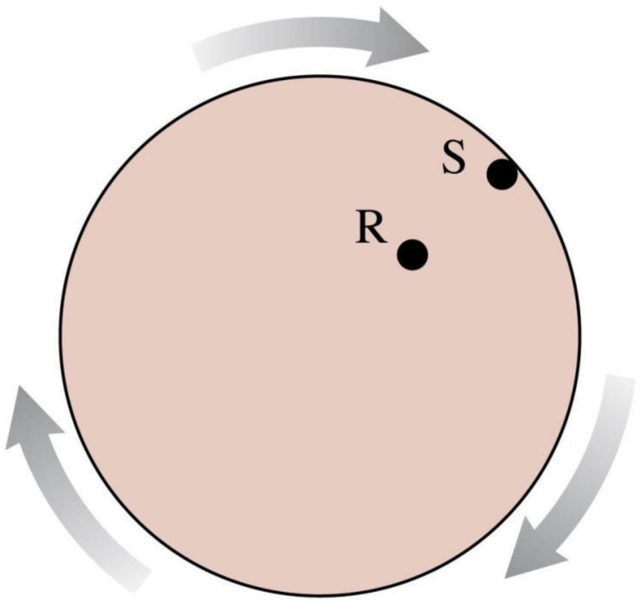
Rémi et Sophie sont sur une plateforme en rotation uniforme. Sophie est deux fois plus loin de l'axe de rotation que Rémi. La vitesse angulaire de Sophie est ___________ celle de Rémi.



A. la moitié de
B. la même que
C. deux fois
D. quatre fois
E. Impossible de répondre sans connaître les rayons.

Question

Rémi et Sophie sont sur une plateforme en rotation uniforme. Sophie est deux fois plus loin de l'axe de rotation que Rémi. La vitesse de Sophie est ___________ celle de Rémi.



A. la moitié de
B. la même que
C. deux fois
D. quatre fois
E. Impossible de répondre sans connaître les rayons.

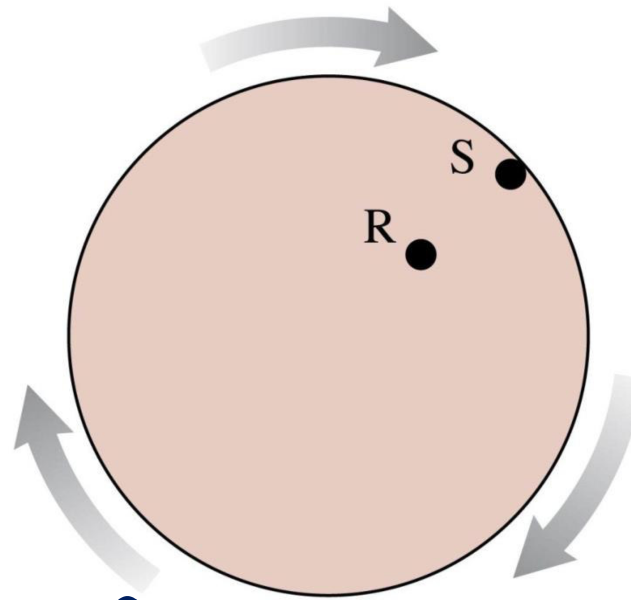
$v_T = \omega r$

$$v = \omega r$$

Question

$\alpha = 0$

Rémi et Sophie sont sur une plateforme en rotation uniforme. Sophie est deux fois plus loin de l'axe de rotation que Rémi. L'accélération de Sophie est ___________ celle de Rémi.



$a_t = 0$

A. la moitié de
B. la même que
C. deux fois
D. quatre fois
E. Impossible de répondre sans connaître les rayons.

$a_c = \omega^2 r$

$a_{Sophie} = \omega^2 R_{Sophie}$

$a_{Rémi} = \omega^2 R_{Rémi}$

Équations de la cinématique de rotation

Équations de la cinématique de rotation à accélération angulaire constante

$x \longrightarrow \theta$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (11.6)$$

$\longrightarrow v = v_0 + at$

$v \longrightarrow \omega$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (11.7)$$

$a \longrightarrow \alpha$

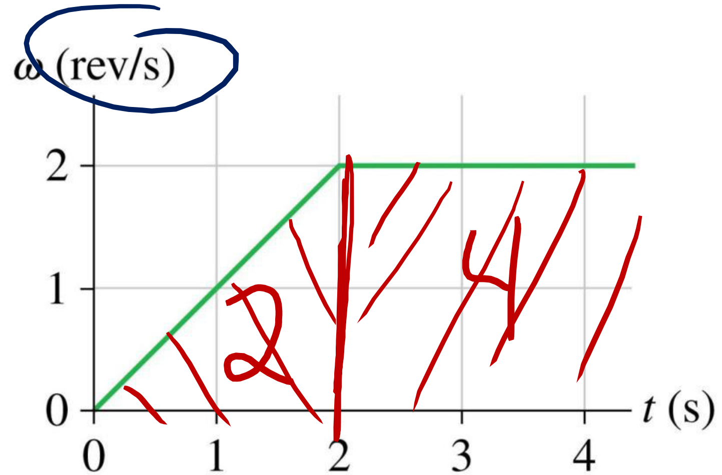
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (11.8)$$

- Les méthodes graphiques s'appliquent encore.

  $v =$ x vs. t
- $\omega =$ la pente de θ vs. t
- $\theta_f = \theta_i +$ aire sous la courbe de ω vs. t
- α = la pente de ω vs. t
- $\omega_f = \omega_i +$ aire sous la courbe de α vs. t

Question

Voici le graphique de la vitesse angulaire d'une roue en fonction du temps. Combien de révolutions sont complétées durant les premières 4 s?



A. 1

B. 2

C. 4

D. 6

E. 8

Aire → 6 révolutions

Question

$\omega_0 = 0$

$\alpha \neq 0$

Partant du repos, une roue subit une accélération angulaire constante. Elle tourne de 25 rad en un temps t. À quelle position radiale se situera-t-elle au temps $2t$?

A. 25 rad
B. 50 rad
C. 75 rad
D. 100 rad
E. 200 rad

$\Theta = \Theta_0 + \cancel{\omega_0 t} + \frac{1}{2}\alpha t^2$

0

$\Delta\Theta = \Theta - \Theta_0 = \frac{1}{2}\alpha t^2$

$25\,\text{rad} = \frac{1}{2}\alpha t^2$

$(2t)^2 = 4t^2$

Question

$\omega_0 = 0$

$\alpha \neq 0 \rightarrow$ constante

Partant du repos, une roue subit une accélération angulaire constante. Elle tourne à 25 rpm (révolution par minute) après un temps t. À quelle vitesse angulaire tournera-elle au temps $2t$?

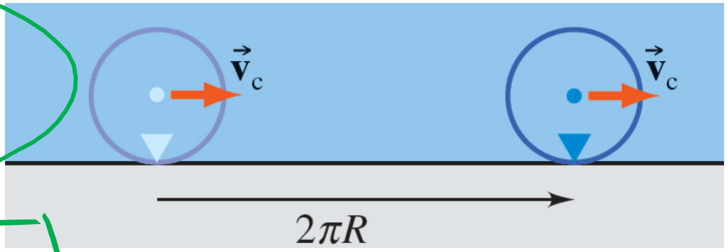
$\omega = \cancel{\omega_0}^{\rightarrow 0} + \alpha t$

A. 25 rpm
B. 50 rpm
C. 75 rpm
D. 100 rpm
E. 200 rpm

$\omega = \alpha t$

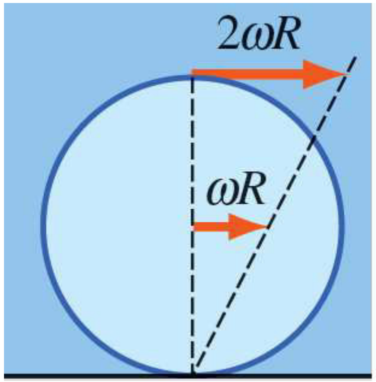
Le roulement (sans glissement!)

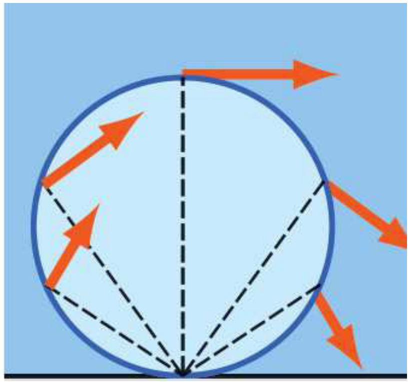
- Le roulement est une combinaison de rotation et de translation.
- En absence de glissement, la vitesse du centre de la roue correspond à la vitesse tangentielle.



$$v_c = \frac{2\pi R}{T} = \omega R = v_t$$

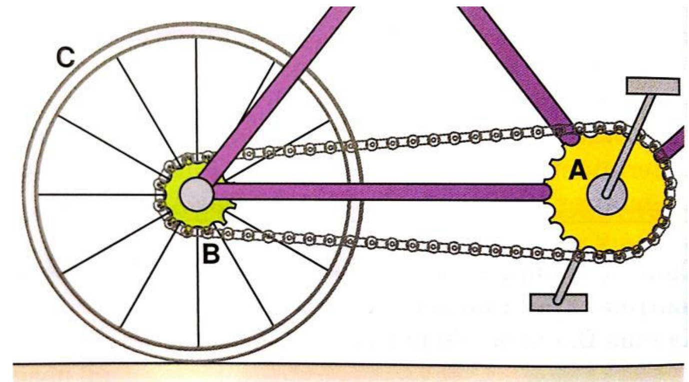
- En absence de glissement, le point le plus bas de la roue est au repos!





Transmission du mouvement

- Le pédalier **A** possède 20 dents et est relié à un engrenage **B** de 12 dents qui est solidaire à la roue **C** dont le rayon est de 40 cm. Quelle est la vitesse de la bicyclette si le pédalier tourne à 18 rad/s?



$\omega_C = \omega_B \neq \omega_A$

chaîne $\boxed{v_{tA} = v_{tB}} \Rightarrow \omega_A R_A = \omega_B R_B \Rightarrow \boxed{\omega_B = \omega_A \frac{R_A}{R_B}}$

$\frac{\text{circonférence } A}{\text{circonférence } B} = \frac{N_A}{N_B} = \frac{20 \text{ dents}}{12 \text{ dents}} = \frac{2\pi R_A}{2\pi R_B} = \frac{R_A}{R_B} = 1{,}667$

$\Rightarrow \omega_B = \omega_A (1{,}667) = (18 \text{ Rad/s})(1.667) = 30 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} = \omega_C$

Vitesse Bicyclette $= \omega_C R_C = \left(30 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)(0{,}4\text{m}) = \boxed{12 \text{ m/sec}}$

Pareil Que Vitesse tangentielle du Pneu

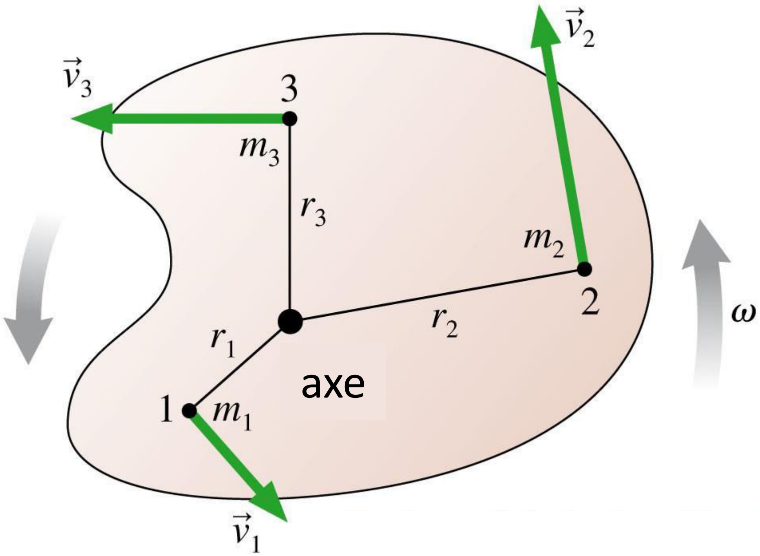
11.2 Énergie de rotation

- Un objet en rotation a une énergie cinétique parce que toutes particules de l'objet sont en mouvement.
- C'est l'**énergie cinétique de rotation**.
- En sommant les énergies cinétiques individuelles et utilisant $v_i = r_i\ \omega$:

$$K_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} m_1 {r_1}^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 {r_2}^2 \omega^2 + \cdots$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} \left(\sum m_i {r_i}^2\right) \omega^2}$$



11.2 Énergie de rotation et moment d'inertie

- On définit le **moment d'inertie** d'un objet:

$$I = m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2 + \cdots = \sum m_i {r_i}^2$$

- Donc, l'énergie cinétique de rotation est simplement:

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Analogue à $K_{lineaire} = \frac{1}{2} M v^2$

- Unités pour le moment d'inertie: kg m^2.
- Le moment d'inertie **dépend de l'axe de rotation**.
- La masse loin de l'axe de rotation contribue davantage au moment d'inertie que la masse près de l'axe.
- *Ceci n'est pas une nouvelle forme d'énergie; il s'agit simplement de l'énergie cinétique du mouvement écrite d'une nouvelle manière.*

11.3 Moment d’inertie d’un corps rigide

- Comme on l'a fait pour le centre de masse, on divise un objet solide au petites cellules de masse Δm et laisse $\Delta m \rightarrow 0$. La somme devient

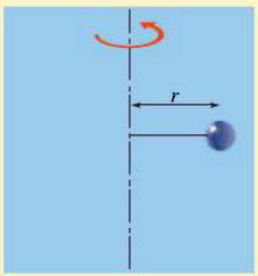
$$I = \sum \Delta m_i {r_i}^2 \quad \xrightarrow{\Delta m \rightarrow 0} \quad I = \int r^2 dm$$

- La procédure ressemble beaucoup le calcul du centre de masse.
- Il est rare d’avoir à calculer l'intégrale soi-même car les moments d'inertie d'objets uniformes de forme simple sont tabulés.

11.3 Moment d'inertie d'un corps rigide

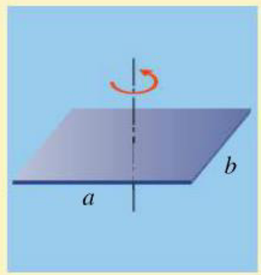
Élément de masse ponctuel (morceau d'un objet) tournant sur un cercle de rayon r

$I = Mr^2$
(par définition)



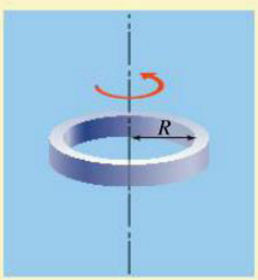
Plaque rectangulaire mince et homogène de côtés a et b tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan de la plaque et passant par son centre

$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$



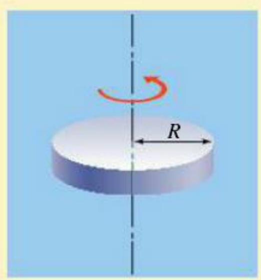
Anneau (ou cylindre creux) de rayon R tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan de l'anneau et passant par son centre

$I = MR^2$



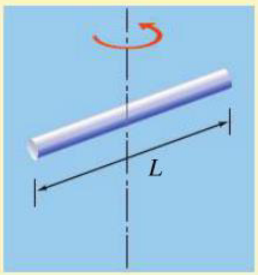
Disque (ou cylindre) plein de rayon R tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan du disque et passant par son centre

$I = \frac{1}{2}MR^2$



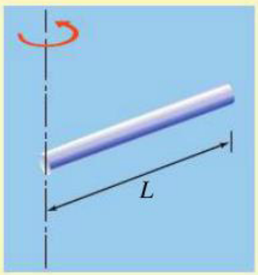
Tige de longueur L tournant autour d'un axe perpendiculaire à la tige et passant par son centre

$I = \frac{1}{12}ML^2$



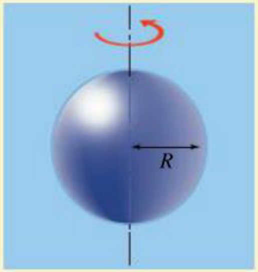
Tige de longueur L tournant autour d'un axe perpendiculaire à la tige et passant par une de ses extrémités

$I = \frac{1}{3}ML^2$



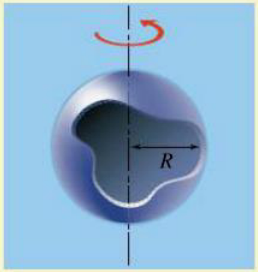
Sphère pleine de rayon R tournant autour de son centre

$I = \frac{2}{5}MR^2$



Sphère creuse (coquille) de rayon R tournant autour de son centre

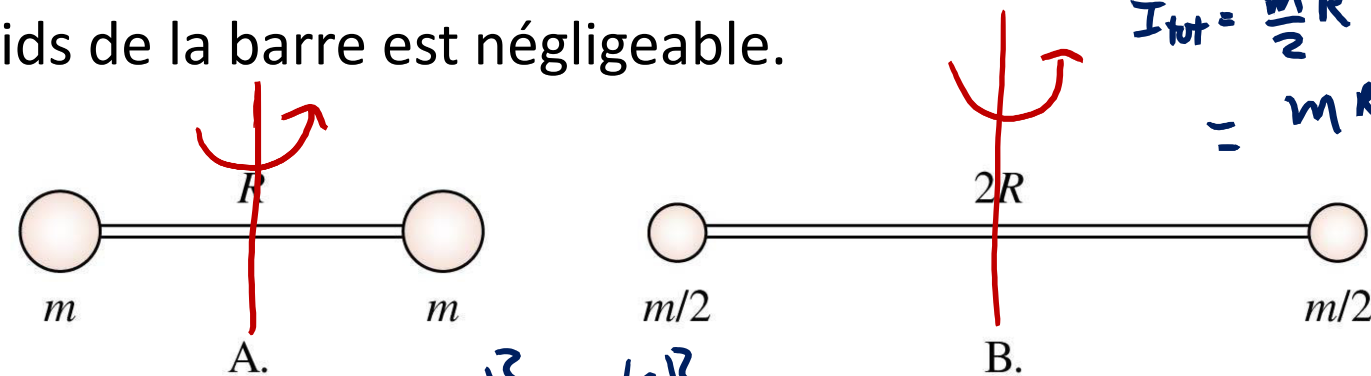
$I = \frac{2}{3}MR^2$



Question

Quel haltère a la plus grand moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire à la barre et passant par son centre? Le poids de la barre est négligeable.

$$I_{tot} = \frac{m}{2}R^2 + \frac{m}{2}R^2 = mR^2$$



$$I_{tot} = m\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{mR^2}{4} + \frac{mR^2}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

$$\boxed{I \propto Mr^2}$$

A. Haltère A.

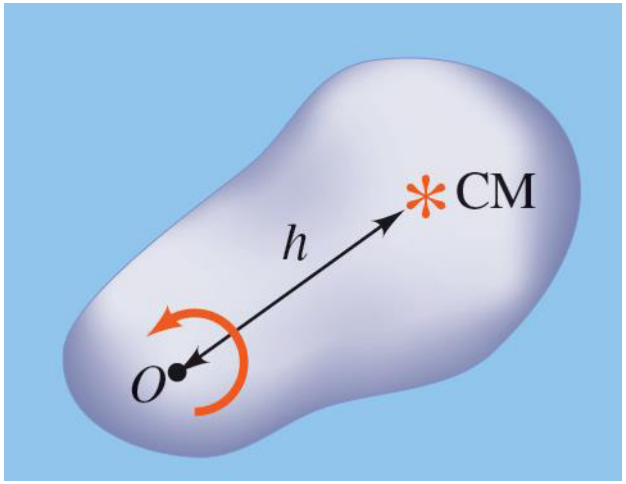
B. Haltère B.

C. Les moments d'inertie sont les mêmes.

Théorème des axes parallèles

- Parfois on doit connaître le moment d'inertie par rapport a un axe de position inhabituelle.

- On peut le trouver si on connaît le moment d'inertie par rapport à un *axe parallèle* passant par le centre de masse.

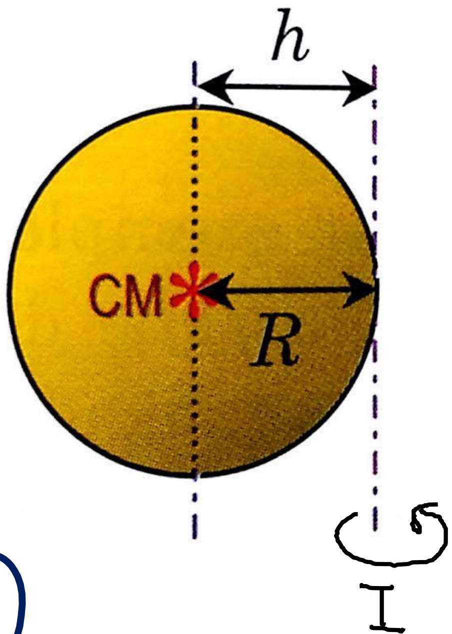


$$K_{tot} = K_{CM} + K_{rel}$$
$$= \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$
$$= \frac{1}{2}M(h\omega)^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

$$\boxed{I = I_{\text{CM}} + Mh^2}$$

Théorème des axes parallèles

- Calculez le moment d'inertie d'une sphère pleine de masse M et de rayon R par rapport à un axe tangent à sa surface.



Par Rapport au Centre

$$I_{cm} = \frac{2}{5} MR^2$$

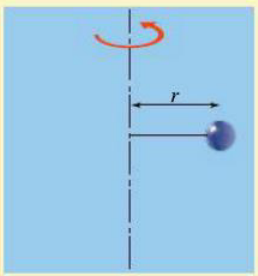
$$I = I_{cm} + Mh^2$$

$$= \frac{2}{5} MR^2 + MR^2 = \boxed{\frac{7}{5} MR^2}$$

11.3 Moment d’inertie d’un corps rigide

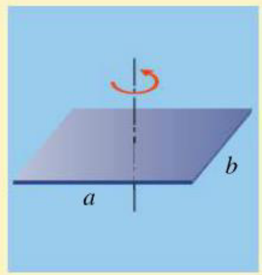
Élément de masse ponctuel (morceau d’un objet) tournant sur un cercle de rayon r

$I = Mr^2$
(par définition)



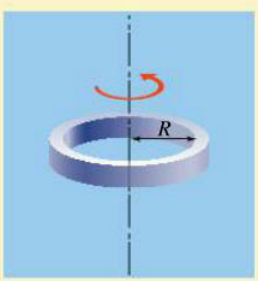
Plaque rectangulaire mince et homogène de côtés a et b tournant autour d’un axe perpendiculaire au plan de la plaque et passant par son centre

$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$



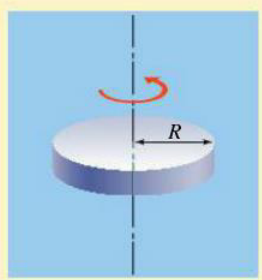
Anneau (ou cylindre creux) de rayon R tournant autour d’un axe perpendiculaire au plan de l’anneau et passant par son centre

$I = MR^2$



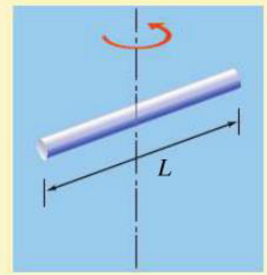
Disque (ou cylindre) plein de rayon R tournant autour d’un axe perpendiculaire au plan du disque et passant par son centre

$I = \frac{1}{2}MR^2$



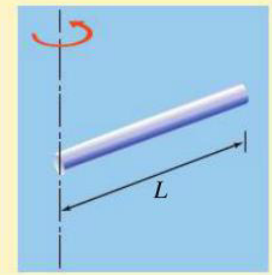
Tige de longueur L tournant autour d’un axe perpendiculaire à la tige et passant par son centre

$I = \frac{1}{12}ML^2$



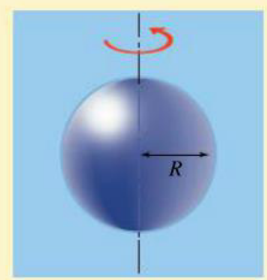
Tige de longueur L tournant autour d’un axe perpendiculaire à la tige et passant par une de ses extrémités

$I = \frac{1}{3}ML^2$



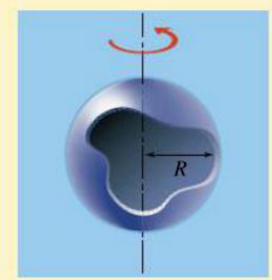
Sphère pleine de rayon R tournant autour de son centre

$I = \frac{2}{5}MR^2$



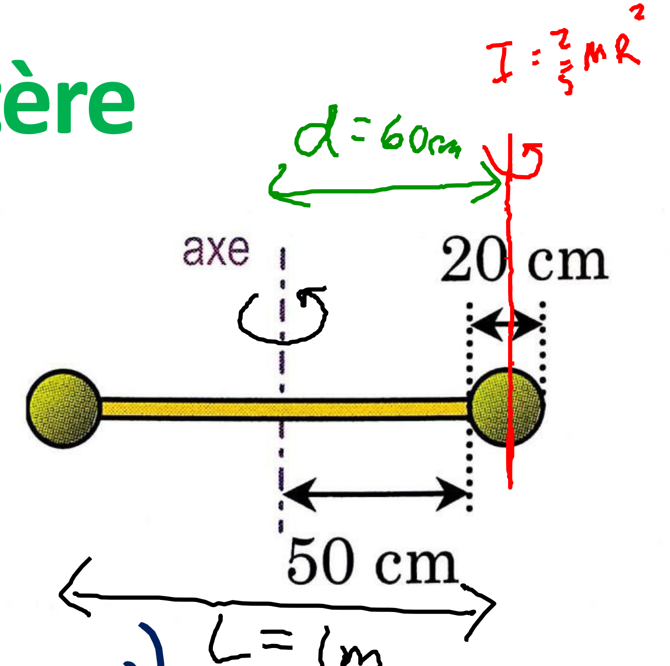
Sphère creuse (coquille) de rayon R tournant autour de son centre

$I = \frac{2}{3}MR^2$



Moment d’inertie d’un haltère

- Une tige de 6 kg et deux sphères de 9 kg chacune forment un haltère tel qu’illustré. Quel est le moment d’inertie par rapport au centre de la tige?



$$I = I_{Tige} + 2\, I_{Sphère}$$

$$= \frac{1}{12} M_{Tige}\, L^2 + 2\left(\frac{2}{5} M_{Sph} R^2 + M_{Sph}\, d^2\right)$$

$$= \frac{1}{12}(6\,Kg)(1\,m)^2 + 2\left(\frac{2}{5}(9\,Kg)(0{,}1\,m)^2 + (9\,Kg)(0{,}6\,m)^2\right)$$

$$\boxed{I_{tot} = 7{,}052\ Kg\,m^2}$$