Probabilités et Statistique

Clémonell Bilayi-Biakana
Département de Mathématiques et Statistique
Université d'Ottawa

9 Janvier 2020.

Outline

Modèle probabiliste

Exemples

- *On lance une pièce de monnaie.*
- *On lance un dé à six faces.*
- *On tire une boule dans une urne contenant une boule noire, deux blanches et cinq rouges.*
- *On observe la durée de vie d'une lampe.*

Il ressort de ces exemples deux points saillants:

- *Les* **issues possibles** *de chacune de ces expériences aléatoires* **sont connues**.
- *En revanche, leurs* **résultats sont aléatoires**.
- *Enfin, l'ensemble des valeurs est soit* **dénombrable** *soit* **non dénombrable**.

Modèle probabiliste

L'objet de ce chapitre est de **donner la description complète et les propriétés du cadre mathématique propice à l'étude d'une expérience aléatoire**. À cet effet,

- nous étudierons la notion d'événements inhérents à un phénomène aléatoire,
- nous introduirons les propriétés algébriques auxquelles obéissent ces événements,
- enfin, nous quantifierons les chances de réalisation de ces événements via la notion de probabilité.

Modèle probabiliste

Définitions

- *Une* **expérience aléatoire** *est une épreuve dont les issues possibles sont connues sans pouvoir en prédire le résultat final.*
- *Le résultat d'une expérience aléatoire s'appelle* **éventualité**. *On le note* ω.
- *L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle* **ensemble fondamental, univers, ensemble des éventualités possibles**. *On le note* Ω.
- *Tout sous-ensemble* A *de* Ω *s'appelle* **événement**. *En particulier, si* A *est un singleton, alors* A *s'appelle* **événement élémentaire**.

Modèle probabiliste

Terminologie

Soit $A, B \subset \Omega$ *et* $\omega \in A$.

- ω: *élément de* A - *Éventualité, réalisation, observation.*
- Ω: *Univers, référentiel - Événement certain.*
- $\emptyset$: *Ensemble vide - Événement impossible.*
- A: *sous-ensemble ou partie de* Ω - *Événement.*
- $A \subset B$: A *est inclus dans* B - *Implication d'événements.*
- $A = B$: A *est égal à* B - *Événements identiques.*
- $A^c = \Omega - A$: *Complémentaire de* A
  L'événement A *ne s'est pas réalisé.*
- $A \cap B$: *Intersection de* A *et* B.
  Les événements A *et* B *se sont réalisés.*

Modèle probabiliste

Terminologie

- $A \cap B = \emptyset$: *A et B sont disjoints.*
  Les événements A et B sont incompatibles c'est-à-dire qu'ils ne peuvent se produire simultanément.
- $A - B = A \cap B^c$: *Différence de A et B.*
  L'événement A s'est réalisé mais pas l'événement B.
- $A \cup B$: *Réunion de A et B.*
  Un au mois des deux événements s'est réalisé c'est-à-dire A ou B s'est réalisé ou les deux.
- $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$: *Différence symétrique de A et B.*
  L'événement A ou B s'est réalisé mais pas les deux conjointement.

Modèle probabiliste

Théorème (Lois de Morgan)

Si A et B sont deuxévénements, alors

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

La portée probabiliste des lois de Morgan est la suivante:

- $(A \cap B)^c$: les événements A et B ne se sont pas réalisés conjointement.
- $(A \cup B)^c$: ni l'événement A ni l'événement B ne sont réalisés.

Modèle probabiliste

Propriétés

Si A, B et C sont des événements, alors

$$\begin{array}{rcl}
\varnothing & \subset & A \\
A & \subset & A \\
A \subset B \text{ et } B \subset C & \Rightarrow & A \subset C \\
A \subset B \text{ et } B \subset A & \Leftrightarrow & A = B \\
A \subset C \text{ et } B \subset C & \Rightarrow & A \cup B \subset C \\
A \subset C \text{ et } B \subset C & \Rightarrow & A \cap B \subset C \\
C \subset A \text{ et } C \subset B & \Rightarrow & C \subset A \cap B.
\end{array}$$

Modèle probabiliste

Propriétés

Si A, B et C sont des événements, alors

$$
\begin{gathered}
A \cap A = A, \quad A \cup A = A \\
A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cup \varnothing = A \\
A \cap \Omega = A, \quad A \cup \Omega = \Omega \\
A \cap A^c = \varnothing, \quad A \cup A^c = \Omega \\
(A^c)^c = A, \quad \varnothing^c = \Omega, \quad \Omega^c = \varnothing.
\end{gathered}
$$

Modèle probabiliste

Théorème

Si A, B, et C sont des événements, alors

- *Commutativité:*

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

- *Associativité:*

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

- *Distributivité:*

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Modèle probabiliste

Définitions

- *Les événements* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont dits* **mutuellement exclusifs** *si* $A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \forall\, i \neq j$.
- *Une suite d'événements* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *forme une* **partition** *de* Ω *si elle satisfait aux propriétés suivantes:*

$$\begin{aligned} A_i \cap A_j &= \varnothing, \quad \forall\, i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= \Omega. \end{aligned}$$

Modèle probabiliste

Exemples

Soit A et B des événements. On a:

- *A et A^c forment une partion de Ω.*
- *$A \cap B^c$, $A \cap B$ et $B \cap A^c$ forment une partition de $A \cup B$.*
- *$A \Delta B$ et $A \cap B$ forment une partition de $A \cup B$.*
- *$A \cap B$ et $A \cap B^c$ forment une partition de A.*

Dans ce qui suit nous traduirons par un nombre réel compris entre 0 et 1, les **chances de réalisation** des événements associés à une expérience aléatoire.

Modèle probabiliste

Il existe plusieurs manières de définir une probabilité parmi lesquelles:

- la probabilité subjective
- la probabilité fréquentielle
- la probabilité classique ou théorique.

C'est la probabilité classique qui fera l'objet de ce cours.

Définition (Probabilité subjective)

C'est un résultat obtenu selon le jugement ou la perception d'une personne ou d'un organisme qui possède quelques renseignements sur le sujet.

Modèle probabiliste

Exemples

- *La probabilité d'averse cet après-midi est de* $0,70$.
- *Les chances pour que mon équipe gagne sont de* 30%.

Définition (Probabilité fréquentielle)

C'est un résultat obtenu à force de répéter dans les mêmes conditions une expérience aléatoire.

Exemples

- *On lance un dé équilibré et on observe les faces obtenues.*
- *Combien y a-t-il de voitures grises qui franchissent l'intersection?*

Modèle probabiliste

Remarques

- *Il est quasiment impossible de calculer la probabilité dans le dernier exemple. En effet, il nous revient de compter non seulement le nombre de voitures grises mais aussi le nombre total de voitures ayant franchi l'intersection.*
- *L'inconvénient de cette méthode c'est l'obligation de répéter indéfiniment la même expérience aléatoire dans les mêmes conditions.*

Définition (Probabilité théorique)

C'est un résultat obtenu grâce à une démarche scientifique c'est-à-dire sans faire d'essais.

Modèle probabiliste

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

On appelle probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une fonction $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ telle que:

1. $$P(\Omega) = 1.$$
2. *Pour tout événement A,*
$$0 \leq P(A) \leq 1.$$
3. *Pour toute suite d'événements mutuellement exclusifs $A_1, A_2, \ldots, A_n$, i.e $A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \forall\ i \neq j$:*
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Modèle probabiliste

Remarques

- *Une probabilité est donc une fonction qui à un événement associe un réel compris entre 0 et 1 .* **Toutefois, on peut convertir ce nombre en pourcentage de chances**.
- *Le doublet* $(\Omega, \mathcal{A})$ *s'appelle:* **espace probabilisable**.
- *Le triplet* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *s'appelle:* **espace probabilisé**.
- *Ces trois axiomes de Kolmogorov sont aussi connus sous le vocable:* **axiomes des probabilités**. *Il en résulte les propriétés suivantes:*

Modèle probabiliste

Propriétés

Soit A et B des événements.

- *La probabilité de l'événement complémentaire de A est*

$$P\left(A^c\right) = 1 - P(A).$$

- *L'événement impossible est toujours de probabilité nulle*

$$P(\emptyset) = 0.$$

- *La probabilité de la différence de deux événements est:*

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

En particulier, si $B \subset A$, alors

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

Modèle probabiliste

Propriétés (Suite)

Soit A et B des événements.

- *Si un événement en implique un autre, sa probabilité est plus petite:*

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$$

- *La probabilité de l'union de deux événements s'obtient par la formule de Poincaré:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Modèle probabiliste

Exemple

Un étudiant estime à 65% ses chances de réussir son cours de Statistique, à 80% ses chances de réussir son cours de Finance et à 50% ses chances de réussir les deux matières.

- *Quelle est la probabilité que l'étudiant réussisse en Statistique mais non en Finance?*
- *Quelle est la probabilité qu'il réussisse en Finance mais non en Statistique?*
- *Quelle est la probabilité qu'il réussisse en Finance ou en Statistique?*
- *Quelle est la probabilité qu'il ne réussisse ni en Finance, ni en Statistique? le cours de Finance?*

Modèle probabiliste

Probabilité conditionnelle

Exemple

Un étudiant estime à 65% ses chances de réussir son cours de Statistique, à 80% ses chances de réussir son cours de Finance et à 50% ses chances de réussir les deux matières.

1. *Quelle est la probabilité qu'il réussisse en Statistique?*
2. *Quelle est la probabilité qu'il réussisse en Statistique sachant qu'il a réussi le cours de Finance?*

Modèle probabiliste
Probabilité conditionnelle

- **À quel point l'usage de cette information a-t-elle un reflet sur la valeur de la probabilité de cet événement?** Autrement dit la réalisation de cet événement modifie-t-elle substantiellement la probabilité antérieure?
- L'outil mathématique permettant cette mise à jour est la **probabilité conditionnelle**. Ce concept fait surface dès qu'on s'intéresse à la probabilité qu'un événement A se produise sachant qu'un autre événement B s'est réalisé.

Modèle probabiliste
Probabilité conditionnelle

Définition
Soit A et B deux événements tels que $P(B) > 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B est:

$$P(A \| B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Corollaire
Soit A et B deux événements tels que $P(A), P(B) > 0$.

$$P(A \cap B) = \begin{cases} P(A \| B) P(B) \\ \quad\quad ou \\ P(B \| A) P(A). \end{cases}$$

Modèle probabiliste

Probabilité conditionnelle

Propriétés

Soit A et B deux événements tels que $P(B) > 0$. On a:

$$0 \leq P(A \| B) \leq 1$$
$$P(A^c \| B) = 1 - P(A \| B).$$

Définition

On dit qu'une suite d'événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est un **système complet** *si elle satisfait aux propriétés suivantes:*

$$\begin{cases} A_i \cap A_j = \varnothing, & i \neq j \\ P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1. \end{cases}$$

Modèle probabiliste
Probabilité conditionnelle

Un système complet est tout simplement une suite d'événements deux à deux incompatibles telle que presque sûrement l'un des événements se réalise.

Théorème (Formule de la probabilité totale)

Soit un système complet d'événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$. La probabilité d'un événement B décomposé sur ce système est:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \| A_i) P(A_i).$$