MAT 1720C, Hiver 2017

Examen de Pratique – Final

Professeur: Abdelkrim El basraoui

N.B.: N'oubliez pas les sujets couverts dans les misessions. Aussi prevoir 20 à 22 questions reparties en deux categories, les questions a choix multiples et les questions a developpement. Aussi, voir régulièrement s'il y a des mises à jour ou corrections sur le fichier.
Heures de consultation: du lundi 3 avril au mercredi 5 avril au centre d'aide (TBT C115) de 10h a 12h. Lundi 10 avril de 9h30 à 11h a mon bureau.

1. Trouvez l'équation de la tangente à la courbe $e^x \ln(y) - e^y \ln(x) = 0$ au point $(1, 1)$.

Solution: On dérive implicitement pour obtenir

$$y' = \frac{\frac{e^y}{x} - e^x \ln(y)}{\frac{e^x}{y} - e^y \ln(x)}.$$

Donc en (1,1) on a $y'(1) = 1$ et l'équation de la tangente est donc

$$y = (1)(x - 1) + 1 = x.$$

Exercice: Soit la courbe d'équation $y^2 - x^3 + 24xy = 0$. Pour quelles valeurs de x cette courbe admet une tangente horizontale?
(**Solution:** 0, -128.)

2. Calculez $f''(\sqrt{3})$ si $f(t) = \arcsin(t/2)$.

Solution:

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1 - (t/2)^2}}; \quad f''(t) = \frac{t}{8(1 - (t/2)^2)^{3/2}}$$

$\Longrightarrow f''(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

3. Évaluez les limites suivantes. Vous pouvez utilisez la regle de l'Hopital.

   a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{\ln(x)} = 0$ (On a pas besoin de la R.H.)

   b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{e^x + 2x + 1} =^{R.H.\, 2\, fois} 0$

   c) $\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2 - 1}$

Solution: Exercice.

4. La hauteur d'un projectile suit l'équation $s(t) = 500t - 25t^2$ mètre après t secondes. Quelle est la hateur maximale qu'atteindra ce projectile?

Solution: Exercice.

5. Si $f(x) = (\arctan(x))^x$, quelle est $f'(x)$?

Solution: Dérivée logarithmique.
Exercice.

6. Considérez la fonction $f(x) = x^2e^{-x}$. Trouvez l'aire comprise entre le graphe de $f(x)$ et l'axe des x pour $x \in [0, 1]$.

Solution: Une double I.P.P. donne

$$Aire = \int_0^1 f(x)\,dx = [-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}]_0^1 = 2 - 5e^{-1}\,.$$

7. Taux lies. (voir exemples vu en classe, DGD et ceux du devoir.)

8. (Pour votre interêt...) Soit $f(x) = x^3 - 2$. Utilisez la méthode de Newton pour donner une approxiamtion de la racine de $f(x) = 0$ à 3 décimales près en calculant x_4. Prennez $x_0 = 1.5$.

Solution: Appliquez la formule jusqu'à ce que les 3 premières décimales ne changent pas. On s'arrête a $x_4 = 1.259$.

9. Quelle est $\tan(\arcsin(x))$, pour $x \in]0, 1[$?

Solution: Utilisez $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ et l'identité $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ pour obtenir

$$\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,.$$

10. Trouvez le(s) point(s) d'inflexion de la fonction suivante $f(x) = x\ln(x)$.

Exercice: Traçez le graphe de f en fournissant tous les détails.

Solution: On a $f'(x) = \ln(x) + 1$ et $f''(x) = 1/x$. Donc $f''(x) \neq 0$ sur $D_f =]0, \infty[$ et d'ou aucun point d'inflexion.

11. Considérez la fonction suivante

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x}, & x \neq 0 \\ \ln(a) + 1, & x = 0. \end{cases}$$

Trouvez la valeur de a pour que f soit continue en $x = 0$.

Solution: Exercice.

12. Quelle est l'approximation lineaire (ou affine) de $f(x) = \ln(1 + x)$ au point $(0, 1)$? En déduire une valeur approximative de $\ln(1.001)$.

Solution: la dérivée de f is $f'(x) = 1/(1 + x)$. donc l'équation de la tangente en (0,1) est

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = (1)(x - 0) \Rightarrow y = x.$$

Donc $\ln(1.001) = f(0.001) \simeq 0.001$.

13. Trouvez les valeurs maximale et minimale absolues de $f(x) = x\ln(x)$ sur l'intervalle [1,e].

Solution: Maximum absolu en $x = e$ de valeur e et minimum absolu en $x = 1$ de valeur 0.

14. On veut construire une boite rectangulaire en carton sans le haut avec base carrée dont le volume est 4cm^3. Quelles sont les dimensions qui minimiseront la quantité du carton à utiliser?

Solution: Soit x le côté de la base et soit h la hauteur de la boite. On a le volume $V = x^2h = 4 \to h = 4/x^2$. La fonction a minimiser est l'aire

$$A = A(x) = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{16}{x} \to A'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}\,.$$

Donc $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 2\,.$
Notez que c'est un minimum de A car $A''(2) > 0$.
D'où les dimensions sont $x = 2,\ h = 4/2^2 = 1$.

15. Trouvez la dérivée de la fonction $y = x^{\sin(x)}\sin^x(x)$ en utilisant **la dérivée logarithmique**.

Solution:

$$\ln(y) = \ln(x^{\sin x}) + \ln(\sin^x(x)) = \sin(x)\ln(x) + x\ln(\sin(x))$$

et donc

$$\frac{y'}{y} = \cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x} + \ln(\sin(x)) + \frac{x\cos(x)}{\sin(x)}$$

d'ou le resultat

$$y' = x^{\sin(x)}\sin^x(x)(\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x} + \ln(\sin(x)) + \frac{x\cos(x)}{\sin(x)}).$$

16. Évaluez l'intégrale suivante

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx.$$

Solution: Exercice.

17. Évaluez l'intégrale suivante

$$\int \frac{2x+3}{x^2-9}\,dx.$$

Solution: On décompose en fractions partielles $\dfrac{2x+3}{(x+3)(x-3)}$
$= \left(\dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x-3}\right)$ et donc
$A(x-3)+B(x+3) = 2x+3$; Pour $x = -3$: $A(-6) + B(0) = -3 \longrightarrow A = \dfrac{1}{2}$; et pour $x = 3$: $A(0) + B(6) = 9 \longrightarrow B = \dfrac{3}{2}$
.
Donc $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2-9}\,dx = \int \left(\frac{1/2}{x+3} + \frac{3/2}{x-3}\right)dx$
$= \displaystyle\int \left((1/2)\frac{1}{x+3} + (3/2)\frac{1}{x-3}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\ln|x+3| + \frac{3}{2}\ln|x-3| + C$.

18. Évaluez les intégrales suivantes

$$\text{(a)} \quad \int \cos^3(t)\sin^3(t)dt$$

$$((b)) \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Solution:

$$\text{(a)} \quad \int \cos^3(t)\sin^3(t)dt = \frac{1}{4}\,\sin^4(t) - \frac{1}{6}\,\sin^6(t) + C$$

$$((b)) \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \sin^3(t)dt = \int \sin(t)(1-\cos^2(t))\,dt = -\frac{1}{3}\,\left(2+x^2\right)\sqrt{1-x^2} + C$$

Utilisez la substitution trigonometrique $x = \sin(t) \;\Leftrightarrow\; t = \arcsin(x)$.

19. Utilisez la méthode des points médiants avec $n = 4$ pour approcher la valeur de

$$\int_0^2 (x^2-1)\,dx\,.$$

Solution: Ici $f(x) = x^2 - 1,\;\; x = 4 \rightarrow\;\; \Delta x = 0.5$ et donc

$$\int_0^2 e^x dx \simeq \Delta x(f(1/4) + f(3/4) + f(5/4) + f(7/4)) = 0.666667\,.$$

Exercice: Pour la même fonction et le même $n = 4$ utilisez la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson pour approcher cette intérgale.

20. Calculez la dérivée, par rapport à x, de la fonction

$$f(x) = \int_{\ln(x)}^{x^2} \sin(1-e^t)\,dt.$$

Solution:

$$f'(x) = (x^2)'\sin(1-e^{x^2}) - (\ln(x))'\sin(1-e^{\ln(x)}) = 2x\sin(1-e^{x^2}) - (1/x)\sin(1-x)$$

.