Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie I ; MAT1730
Examen Partiel – 4 octobre 2017

Professor: Benoit Dionne

Questions à choix multiple

Question 1 (**1 point**)
Un patient reçoit une dose de 50 mg/l d'un médicament à chaque jour. On sait que 45% du médicament est éliminé de l'organisme à chaque jour. Si on trouve 42 mg/l du médicament dans l'organisme peu après que le patient eu reçu sa dose du lundi matin, lequel des systèmes dynamiques discrets suivants décrit la concentration x_t du médicament t jours après lundi.

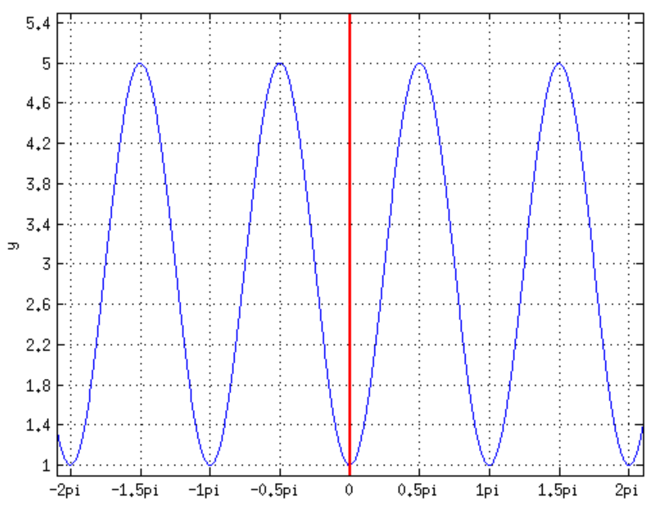
A: $x_{t+1} = 0.45x_t + 42$ et $x_0 = 50$ **B**: $x_{t+1} = 0.55x_t + 42$ et $x_0 = 50$
C: $x_{t+1} = 0.50x_t + 45$ et $x_0 = 52$ **D**: $x_{t+1} = 0.42x_t + 45$ et $x_0 = 42$
E: $x_{t+1} = 0.55x_t + 50$ et $x_0 = 42$ **F**: $x_{t+1} = 0.42x_t + 50$ et $x_0 = 45$

Solution:
Si 45% du médicament est éliminé em un jour, alors, après un jour, on a 55% de la quantité du médicament que l'on avait au début de la journée. On ajoute 50 mg/l à chaque jour. La condition initiale est 42 mg/l. Donc $x_{t+1} = 0.55x_t + 50$ et $x_0 = 42$.

Réponse : E

Question 2 (**1 point**)
Voici le graphe de la fonction f

$2\pi/P$



Laquelle des formules suivantes est celle de f ?

A: $f(x) = 3 + 2\cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$ **B**: $f(x) = 3 + 3\cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

C: $f(x) = 1 + 3\cos\left(4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$ **D**: $f(x) = 3 + 2\cos\left(4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

E: $f(x) = 3 + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **F**: $f(x) = 3 + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Solution:
La moyenne est $M = 3$, l'amplitude est $A = 2$, la periode est $P = \pi$ et la phase est $\phi = \pi/2$. Donc

$$f(x) = M + A\cos\left(\frac{2\pi}{P}(x-\phi)\right) = 3 + 2\cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Réponse : A

Question 3 (**1 point**)
Trouver l'ensemble de toutes les solutions de l'inégalité $5 - \dfrac{6}{x} < 4$.

A: $]-\infty, 0[$ **B**: $]0, 6[$ **C**: $]6, \infty[$
D: $]0, \infty[$ **E**: $]-\infty, 0[\cup]6, \infty[$ **F**: $]-\infty, 6[$

Solution:

$$5 - \frac{6}{x} < 4 \Rightarrow 1 < \frac{6}{x}$$

Si $x > 0$, on a que

$$1 < \frac{6}{x} \Rightarrow x < 6$$

Donc $0 < x < 6$.

Si $x < 0$, on a que

$$1 < \frac{6}{x} \Rightarrow x > 6$$

Puisque l'on doit aussi avoir $x < 0$, il n'y a pas de solution dans ce cas.

Réponse : B

Question 4 (**1 point**)
Trouvez toutes les valeurs de x qui satisfont l'égalité $|8 - 3x^2| = 4$.

A: $x = \pm 2\sqrt{2}$ **B**: $x = 2/\sqrt{3}$ **C**: $x = \pm 2/\sqrt{3}$
D: $x = \pm 2$ ou $x = \pm 2/\sqrt{3}$ **E**: $x = \pm\sqrt{8/3}$ **F**: $x = 2 \pm \sqrt{8/3}$

Solution:
On a

$$|8 - 3x^2| = 4 \Rightarrow 8 - 3x^2 = 4 \text{ ou } 8 - 3x^2 = -4$$

Or

$$8 - 3x^2 = 4 \Rightarrow 3x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

et

$$8 - 3x^2 = -4 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Réponse : D

Questions avec une courte réponse

Question 5 (**2 points**)
Trouvez toutes les solutions de l'équation $\ln(x-3)+\ln(x+1) = \ln(2x+9)$. Donnez votre raisonnement au complet.
Réponse : $\boxed{6}$

Solution:
Pour que $\ln(x-3)+\ln(x+1) = \ln(2x+9)$ soit possible, on doit avoir $x > 3$ car le logarithme de 0 ou d'un nombre négatif n'est pas défini.

On a

$$\ln(x-3)+\ln(x+1) = \ln(2x+9) \Rightarrow \ln\big((x-3)(x+1)\big) = \ln(2x+9) \ .$$

Puisque la fonction ln est injective, on a que $(x-3)(x+1) = 2x+9$. Donc

$$(x-3)(x+1) = 2x+9 \Rightarrow x^2-2x-3 = 2x+9 \Rightarrow x^2-4x-12 = (x-6)(x+2) = 0$$

Donc $x = 6$ car on doit avoir $x > 3$.

Question 6 (**2 points**)
Quelle valeur doit-on donner au paramètre a pour que la fonction suivante soit continue en $x = 3$? Justifier votre réponse et indiquer les conditions que l'on doit satisfaire pour avoir continuité en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} a\sin(\pi x/2) & \text{si} \quad x < 3 \\ \frac{x^2}{2} - 4 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Réponse : $a = \boxed{-1/2}$

Solution:
Pour que f soit continue en $x = 3$, on doit avoir

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$$

C'est-à-dire,

$$a\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3^2}{2} - 4 \Rightarrow -a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Questions à développement

Question 7 (**7 points**)
La population de poissons dans un lac croit régulièrement à chaque année. Cependant, comme la pêche sur ce lac est très populaire, on se doit d'ensemencer à chaque printemps pour éviter la disparition des poissons. Basé sur les données accumulées, on a montré que x_t, le nombre de poissons par mètre carré à l'année t, est décrit par le SDD $x_{t+1} = 0.9x_t + 4.5$

a) (1 pt) Quelle est la fonction génératrice (itérative) f de ce SDD ?
Réponse : $f(x) = \boxed{0.9x + 4.5}$

b) (1 pt) Trouver le point d'équilibre x^* de ce SDD.
Réponse : $x^* = \boxed{45}$

Solution:
Le point d'équilibre x^* est la solution de $x^* = f(x^*) = 0.9x^* + 4.5$. Donc

$$x^* = 0.9x^* + 4.5 \Rightarrow 0.1x^* = 4.5 \Rightarrow x^* = 45$$

c) (1 pt) Si initialement on estime qu'il y avait 15 poissons par mètre carré, donnez la solution de ce SDD.
Réponse : $x_t = \boxed{0.9^t(15 - 45) + 45}$

Solution:
La solution générale du système dynamique discret $x_{t+1} = rx_t + b$ est de la forme $x_t = r^t(x_0 - x^*) + x^*$ où x^* est le point d'équilibre et x_0 est la condition initiale.

Dans notre cas, $r = 0.9$, $x^* = 45$ and $x_0 = 15$.

d) (1 pt) Combien y aura-t-il de poissons par mètre carré après 2 ans ?
Réponse : $\boxed{20.7}$

Solution:
Puisque $x_t = 0.9^t(15 - 45) + 45$, on trouve que $x_2 = 0.9^2(15 - 45) + 45 = 20.7$.

e) (3 pt) Combien d'années (un nombre entier) faut-il pour que la différence entre le nombre de poissons par mètre carré et le point d'équilibre soit au plus 0.2 (i.e. $|x_t - x^*| < 0.2$? Vous devez donner un raisonnement complet et clair pour obtenir tous les points.
Réponse : $t = \boxed{48}$

Solution:
On cherche un entier t tel que

$$\begin{aligned}
|x_t - x^*| = \left|\left(0.9^t(15 - 45) + 45\right) - 45\right| &= 30 \times 0.9^t < 0.2 \\
&\Rightarrow 0.9^t < \frac{0.2}{30} = \frac{1}{150} \Rightarrow \ln(0.9^t) < \ln(1/150) = -\ln(150) \\
&\Rightarrow t\ln(0.9) < -\ln(150) \Rightarrow t > \frac{ln(150)}{\ln(0.9)} = 47.5570\ldots
\end{aligned}$$

On prend $t = 48$.

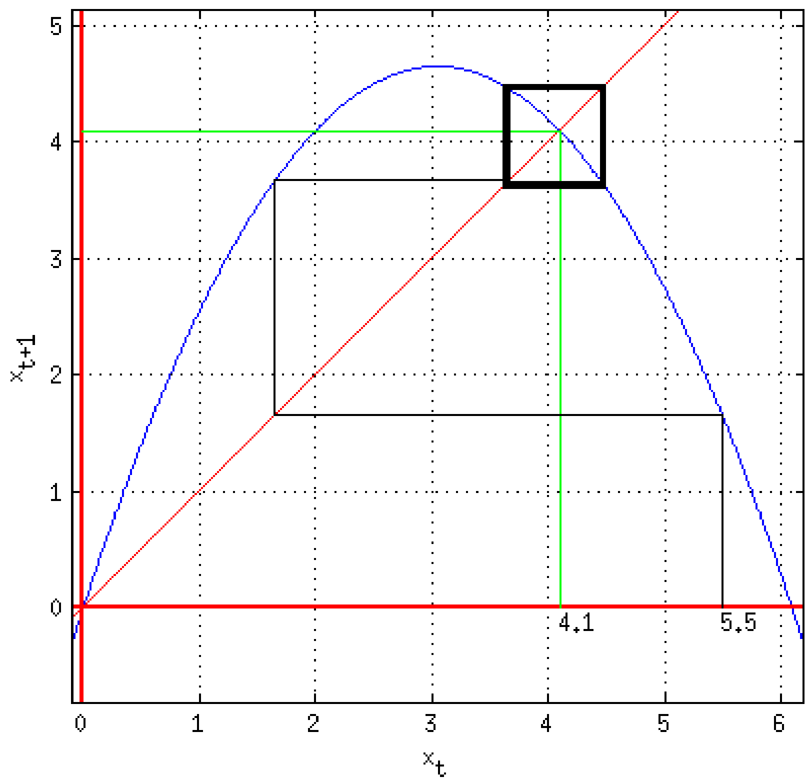
Question 8 (5 points)
Supposons que le modèle logistique $x_{t+1} = 0.5x_t(6.1 - x_t)$ décrit la croissance d'une population.
a) (2 pts) Trouvez tous les points d'équilibre de ce SDD.
Réponse : $\boxed{0 \text{ et } 4.1}$

Solution:
On cherche les points p tels que $p = 0.5p(6.1 - p)$. Donc,

$$p = 0.5p(6.1 - p) = 3.05p - 0.5p^2 \Rightarrow 0.5p^2 - 2.05p = 0.5p(p - 4.1) = 0 \ .$$

On obtient $p = 0$ et $p = 4.1$.

b) (2 pts) Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour la condition initiale $x_0 = 5.5$ (au moins quatre itérations). Le graphe de la fonction itérative vous est donné. Vous devez bien identifier les axes, les points d'équilibre, la condition initiale, etc.
Solution:



c) (1 pt) Déterminez la stabilité de chacun des points d'équilibre.

Solution:
On peut conclure en analysant les orbits pour différentes conditions initiales que le point $p = 4.1$ est satble alors que le point $p = 0$ est instable.

Question 9 (**4 points**)
Pour chacune des limites suivantes, déterminer si elle existe. Si elle existe, calculez cette limite de manière algébrique. Si la limite n'existe pas, justifiez-le avec un raisonnement mathématique.

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{\sqrt{4x^6+3x}} = \boxed{\frac{3}{2}}$

Solution:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{\sqrt{4x^6+3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{4+3/x^5}} == \frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

On a divisé le numérateur et dénominateur par x^3 et utilisé le fait que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$ pour $r > 0$.

b) $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{3-\sqrt{25-x^2}} = \boxed{\frac{3}{4}}$

Solution:
Puisque

$$\frac{x-4}{3-\sqrt{25-x^2}} = \frac{x-4}{3-\sqrt{25-x^2}}\left(\frac{3+\sqrt{25-x^2}}{3+\sqrt{25-x^2}}\right) = \frac{(x-4)(3+\sqrt{25-x^2})}{9-(25-x^2)}$$
$$= \frac{(x-4)(3+\sqrt{25-x^2})}{x^2-16} = \frac{(x-4)(3+\sqrt{25-x^2})}{(x-4)(x+4)} = \frac{3+\sqrt{25-x^2}}{x+4} \ ,$$

on a

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{3-\sqrt{25-x^2}} = \lim_{x\to 4} \frac{3+\sqrt{25-x^2}}{x+4} = \frac{3+\sqrt{25-4^2}}{4+4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \ .$$