Université d'Ottawa

Département de Mathématiques et de Statistiques

MAT 1702 C : Méthodes Mathématiques II

Examen Partiel II – Version A

03 Novembre 2015

Nom ________________________ Prénom ______________________

\# d'étudiant ______________________

Instructions:

- Écrivez votre nom et numéro d'étudiant dans l'espace précisé.
- Ne pas détacher ce livret.
- La durée de cet examen est de 80 minutes.
- Cet examen est un examen à livre fermé qui comporte **6 questions**.
- Utilisez l'espace spécifié pour répondre à chacune des questions. Si jamais l'espace ne vous suffit pas ou que vous utilisez l'endos de la page veuillez indiquer clairement où se trouve votre réponse ainsi que la suite du développement, s'il y a lieu.
- Vous devez justifier vos réponses.
- Les calculatrices ne sont pas permises.
- Vous avez une page supplémentaire à la fin que vous pouvez utiliser comme feuille de brouillon.
- Il est interdit de se servir de téléphones cellulaires, de dispositifs électroniques ou de notes de cours. Les téléphones et les gadgettes électroniques doivent être fermés et rangés dans votre sac: vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées dont le résultat pourrait être un 0 (zéro) pour lexamen.

Bonne chance!!!

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature: ____________________________

Ne rien inscrire dans la table suivante.

Question	1	2	3	4	5	6	Total
Maximum	2	3	5	5	5	5	25
Note							

1. [**2 point**] Soit A une matrice **inversible** d'ordre n. Déterminez les énoncés qui **ne sont pas vrais** pour la matrice A.
   (a) A^{-1} est inversible.
   (b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ n'admet que la solution triviale.
   (c) Si B est une matrice d'ordre n inversible alors AB est aussi inversible.
   (d) A^T est inversible.
   (e) Il existe un vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est incompatible.
   (f) Les colonnes de A n'engendrent pas $\mathbb{R}^n$.

Réponse:________.

Solution: (e) et (f).

2. [**3 points**] Considérez l'équation de matrices suivante
$$BX^TA^{-1} + CB = 0,$$
où A, B, C et X sont des matrices inversibles d'ordre n. Résolvez cette équation pour X en fonction de A, B et C.

Solution:

- Passez CB à l'autre côté:
$$BX^TA^{-1} = -CB,$$
- Multipliez à gauche par B^{-1} et à droite par A:
$$X^T = -B^{-1}CBA,$$
- Prendre la transposé des deux côtés:
$$X = (-B^{-1}CBA)^T = -A^TB^TC^T(B^{-1})^T.$$

3. [**5 points**] Considérez la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) [**3 points**] Trouvez l'inverse de A.

Solution:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 11 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 + 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -12 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to -L_3]{L_2 \to -L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -12 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Donc A est inversible et on a $A^{-1} = \begin{bmatrix} -12 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) [**2 point**] En utilisant A^{-1} résolvez $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solution: $\vec{x} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$.

4. [**5 points**] Déterminez les valeurs de h pour que les vecteurs suivants soient **linéairement indépendants**

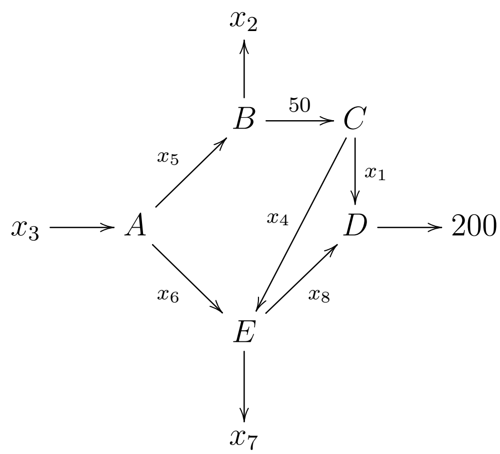
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ h \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solution: On considère la matrice suivante qu'on doit échelonner

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & h & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & h-1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 + \frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}h + \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

Donc ces vecteurs sont linéairement indépendants si et seuleument si la matrice précédente est celle d'un système homogène compatible avec solution unique (ou si le nombre de pivots est égale au nombre de vecteurs). Ceci est équivalent à $\frac{1}{2}h + \frac{1}{2} \neq 0$, ou $h \neq -1$.
Conclusion: il faut que $h \neq -1$.

5. [**5 points**] Considérer le réseau routier décrit par le diagrame suivant. Les lettres A à E dénotent les intersections, les flèches indiquent le sens du trafic routier et le nombre de voitures par minute qui circulent sur ce réseau est indiqué en *nombres ou en variables.* Notez que la circulation se fait à sens unique.



(a) [**3 points**] Donnez le systéme linéaire décrivant le trafic sur ce réseau routier. [**Ne pas résoudre** ce système.]

Solution:

$$\begin{array}{llrl}
A & & x_3 & = x_5 + x_6 \\
B & & x_5 & = x_2 + 50 \\
C & & 50 & = x_1 + x_4 \\
D & & x_1 + x_8 & = 200 \\
E & & x_4 + x_6 & = x_7 + x_8 \\
\text{Total} & & x_3 & = x_2 + x_7 + 200
\end{array}$$

(b) [**1 point**] Supposons que la matrice échelonnée réduite du système représentant ce réseau est:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Donnez la solution générale de ce système.

Solution: variables de base: x_1, x_2, x_3, x_4, x_6; variables libres: x_5, x_7, x_8.

$$\begin{cases} x_1 = -x_8 + 200 \\ x_2 = x_5 - 50 \\ x_3 = x_5 + x_7 + 150 \\ x_4 = x_8 - 150 \\ x_5 = \text{libre} \\ x_6 = x_7 + 150 \\ x_7 = \text{libre} \\ x_8 = \text{libre} \end{cases}$$

(c) [**1 point**] Supposons que, dû a des travaux, le trafic sur la route ED est limité à un maximum de 200 voitures par minute. Quel est le nombre maximal de voitures qui peut circuler sur la route CE?

Solution: Comme $x_4 = x_8 - 150$ et $x_8 \leq 200$ on a $x_4 \leq 200 - 150 = 50$, c-à-d le nombre maximal de voitures qui pourront circuler sur CE est 50 voitures par minutes.

6. [**5 points**] Une économie avec deux secteurs, Agriculture et Constructions, satisfait le modèle suivant:

- pour chaque unité de sortie, l'agriculture requiert 0.5 unité du même secteur et 0.7 unité des constructions;
- pour chaque unité de sortie, les constructions ont besoin de 0.4 unité des constructions et 0.4 unité de l'autre secteur.

(a) [**1 point**] Donnez la matrice de consommation C pour cette économie.

(b) [**2 points**] Calculez $I_2 - C$ et $(I_2 - C)^{-1}$.

(c) [**1 point**] Déterminez la demande intermédiaire si l'agriculture veut produire 100 unités.

(d) [**1 point**] Trouver le niveau de production, en utilisant l'inverse dans (b), pour satisfaire une demande finale de 100 unités de l'agriculture et 200 unités des Constructions.

Solution: (a) La matrice de consommation est:

$$C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$I_2 - C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.4 \\ -0.7 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

$$(I_2 - C)^{-1} = \frac{1}{0.5(0.6) - (-0.4)(-0.7)} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & 0.5 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.02} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 35 & 25 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$100 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \end{bmatrix}.$$

Donc pour une demande intermédiare de 100 unités de l'Agriculture il faut 50 unités du même secteur et 70 unités de l'autre secteur.

(d) Soient x_1 et x_2 les sorties de l'Agriculture et des Constructions respectivement et soit $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ le vecteur de production. Notez que la demande finale est $\overrightarrow{d} = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix}$. On a donc

$$\overrightarrow{x} = (I_2 - C)^{-1}\overrightarrow{d} = \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 35 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7000 \\ 8500 \end{bmatrix}.$$

D'où pour subvenir à une demande finale de 100 unités de l'Agriculture et 200 unités des constructions il faudra 7000 unités du premier secteur et 8500 du deuxième.

Page supplémentaire pour vos brouillons.