MAT1730 – Calcul Différentiel et Intégral pour les sciences de la vie I
Examen Partiel – 2 octobre 2019

Professeur: Benoit Dionne

Questions à choix multiples

Question 1 (**1 point**)

Quelle est le domaine de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(9-x^2)}{\sqrt{x+2}}$?

A: Pour tout x	**B**: $-2 < x < 3$	**C**: $-2 < x < 2$
D: $-3 < x < 3$	**E**: $-2 < x < 1$	**F**: $x \geq -2$

Solution:

Puisque ln est seulement définie pour les nombres positifs, on doit avoir $9 - x^2 > 0$. Donc,

$$x^2 < 9 \Rightarrow -3 < x < 3 \ .$$

De même, puisque la racine carrée est définie seulement pour les nombres plus grand ou égaux à zéro, on doit avoir $2 + x \geq 0$. Donc, $x \geq -2$. Finalement, on doit avoir $\sqrt{2+x} \neq 0$ pour éviter une division par zéro. Donc, $x \neq -2$.

Les trois conditions doivent être satisfaites. Donc, $-2 < x < 3$.

Réponse : B

Question 2 (**1 point**)

Laquelle des fonctions suivantes est la fonction inverse (ou réciproque) de $f(x) = \dfrac{x+2}{x-5}$?

A: $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+1}{2-x}$	**B**: $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$	**C**: $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+2}{x-2}$
D: $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+2}{x-1}$	**E**: $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2-5x}$	**F**: Aucun des choix

Solution:

On a

$$y = f(x) = \frac{x+2}{x-5} \Rightarrow (x-5)y = x+2 \Rightarrow xy - 5y = x + 2$$
$$\Rightarrow xy - x = 5y + 2 \Rightarrow x(y-1) = 5y+2 \Rightarrow x = \frac{5y+2}{y-1}$$

Donc, $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+2}{x-1}$

Réponse : D

Question 3 (**1 point**)

Laquelle des expressions suivantes est égale à $\ln(\sqrt{x^8+7x^4}) - \ln(x^2)$ sur son domaine ?

A: $-\sqrt{\ln(x^6+7x^2)}$ **B**: $-\ln(\sqrt{x^6+7x^2})$ **C**: $\ln(x^4+7)$

D: $\ln(x^3)-\ln(7x)$ **E**: $\ln(x^2+7)$ **F**: $\ln(\sqrt{x^4+7})$

Solution:

$$\ln(\sqrt{x^8+7x^4})-\ln(x^2)=\frac{1}{2}\ln(x^8+7x^4)-\frac{1}{2}\ln(x^4)-=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^8+7x^4}{x^4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^4+7)=\ln(\sqrt{x^4+7})$$

Réponse : F

Question 4 (**1 point**)

Laquelle des expressions suivantes est égale à $\dfrac{(x^{12}+3)^{1/4}}{x^2}$ pour $x\neq 0$?

A: $\left(x^4+\frac{3}{x^2}\right)^{1/4}$ **B**: $x+\frac{3^{1/4}}{x^2}$ **C**: $\left(x+\frac{3}{x^3}\right)^{1/4}$

D: $\left(x^3+\frac{3}{x^2}\right)^{1/4}$ **E**: $\left(x^4+\frac{3}{x^8}\right)^{1/4}$ **F**: $\left(x^{10}+\frac{3}{x^2}\right)^{1/4}$

Solution:

$$\frac{(x^{12}+3)^{1/4}}{x^2}=\left(\frac{x^{12}+3}{x^8}\right)^{1/4}=\left(x^4+\frac{3}{x^8}\right)^{1/4}$$

Réponse : E

Question 5 (**1 point**)

Quelle est la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{x\to 3a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3a}}{x^2-9a^2}$?

A: $\frac{1}{12a\sqrt{3a}}$ **B**: ∞ **C**: $\frac{1}{12a\sqrt{a}}$

D: $\frac{1}{12a^2\sqrt{3a}}$ **E**: $\frac{1}{a\sqrt{3a}}$ **F**: 0

Solution:
Puisque

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3a}}{x^2-9a^2}=\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3a}}{x^2-9a^2}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3a}}{\sqrt{x}+\sqrt{3a}}\right)=\frac{x-3a}{(x-3a)(x+3a)(\sqrt{x}+\sqrt{2a})}=\frac{1}{(x+3a)(\sqrt{x}+\sqrt{3a})}.$$

On a que

$$\lim_{x\to 3a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3a}}{x^2-9a^2}=\lim_{x\to 3a}\frac{1}{(x+3a)(\sqrt{x}+\sqrt{3a})}=\frac{1}{(3a+3a)(\sqrt{3a}+\sqrt{3a})}=\frac{1}{12a\sqrt{3a}}$$

Réponse : A

Question 6 (**1 point**)
Une étude démontre que la surface d'une forêt diminue de 4% à tout les 10 ans. Si 20 km^2 de la forêt est replantée à chaque 10 ans, lequel des systèmes dynamiques discrets suivants décrit la superficie de la forêt S_t à toutes les périodes de 10 ans.

A: $S_{t+1} = 0.96S_t - 10$ **B**: $S_{t+1} = 0.96S_t + 20$ **C**: $S_{t+1} = 1.04S_t - 20$
D: $S_{t+1} = 0.04S_t + 20$ **E**: $S_{t+1} = 1.04S_t + 20$ **F**: $S_{t+1} = 0.96S_t - 20$

Solution:
Le SDD est de la forme $S_{t+1} = rS_t + b$ où le taux de croissance est $r = 0.96$ et $b = 20$.

Réponse : B

Questions à développement

Question 7 (**2 point**)
Est-ce que la limite suivante existe ? Si oui, donnez cette limite.

$$\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x^2+4x-21}$$

Vous devez utiliser la méthode algébrique pour répondre à cette question.
Réponse : $\boxed{\text{n'existe pas}}$
Solution:
On a

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x^2+4x-21} = \lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{(x+7)(x-3)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-(x-3)}{(x+7)(x-3)} = -\lim_{x\to 3^-} -(x+7) = -10$$

et

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{x^2+4x-21} = \lim_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{(x+7)(x-3)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{(x+7)(x-3)} = \lim_{x\to 3^+} (x+7) = 10$$

Puisque

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x^2+4x-21} \neq \lim_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{x^2+4x-21} ,$$

la limite n'existe pas.

Question 8 (**2 points**)
Trouvez toutes les solutions de l'inégalité $\dfrac{x+4}{x+2} > \dfrac{x}{x-3}$. Donnez votre raisonnement au complet.
Réponse : $\boxed{x < -12 \text{ et } -2 < x < 3}$
Solution:

$$\frac{x+4}{x+2} > \frac{x}{x-3} \Rightarrow 0 > \frac{x}{x-3} - \frac{x+4}{x+2} = \frac{(x+2)x-(x-3)(x+4)}{(x+2)(x-3)} = \frac{x+12}{(x+2)(x-3)}$$

Il y a trois points où $\dfrac{x+12}{(x+2)(x-3)}$ peut changer de signe : -12, -2 et 3.

x	$x<$	-12	$<x<$	-2	$<x<$	3	$<x$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+12$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x+12}{((x+2)(x-3)}$	$-$	0	$+$	ND	$-$	ND	$+$

Donc $\dfrac{x+12}{(x+2)(x-3)} < 0$ pour $x < -12$ et $-2 < x < 3$.

Question 9 (**5 points**)
La densité d'une population est décrite par le SDD $x_{t+1} = 0.9x_t + 6$ où x_t est le nombre d'individus par km^2 après t années. Dans ce modèle, une politique de repopulation a été implémentée pour augmenter la densité de $c = 6$ individus par km^2 à chaque année. Le taux de croissance de 0.9 a été déterminé à la suite de plusieurs années d'études.

a) Trouver le point d'équilibre x^* de ce SDD.
Réponse : $x^* = \boxed{60}$

b) Donnez la solution générale du SDD étant donné la condition initiale $x_0 = 5$ individus par km^2.
Réponse : $\boxed{x_t} = \boxed{60 - 55 \times 0.9^t}$

c) Quel est le nombre minimal d'années (un entier) nécessaires pour obtenir une densité d'au moins 23 individus par km^2 ?
Réponse : $\boxed{4}$

d) Quel politique de repopulation (valeur de c) devrait-on adopter si l'on veut que le point d'équilibre soit $x^* = 40$ individus par km^2 ?
Réponse : $\boxed{4}$

Solution:
a) Le point d'équilibre x^* est la solution de $x^* = f(x^*) = 0.9x^* + 6$. Donc

$$x^* = 0.9x^* + 6 \Rightarrow 0.1x^* = 6 \Rightarrow x^* = 60$$

b) La solution générale pour $x_0 = 10$ est donc $x_t = (0.9)^t(5-60) + 60 = 60 - 55 \times 0.9^t$.

c) Pour répondre à la question, on cherche la plus petite valeur entière de t tel que $x_t \geq 23$.

$$\begin{aligned} 60 - 55 \times 0.9^t \geq 23 &\Rightarrow 37 \geq 55(0.9)^t \Rightarrow 37/55 \geq (0.9)^t \\ &\Rightarrow \ln(37/55) \geq \ln(0.9^t) = t\ln(0.9) \\ &\Rightarrow t \geq \frac{\ln(37) - \ln(55)}{\ln(0.9)} \approx 3.762 \end{aligned}$$

Donc $t = 11$ années.

d) On a que $x^* = 0.9x^* + c$ avec $x^* = 40$. Donc $40 = 36 + c$ et ainsi $c = 4$ individus par km^2.

Question 10 (**5 points**)

On considère le SDD nonlinéaire $x_{t+1} = \dfrac{3x_t^2}{1+x_t}$.

a) Quelle est la fonction génératrice (itérative) f de ce SDD ?
Réponse : $f(x) = \boxed{3x^2/(1+x)}$

b) Trouver les points d'équilibre x^* de ce SDD.
Réponse : $x^* = \boxed{0 \text{ et } 0.5}$

c) Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour la condition initiale $x_0 = 0.4$ (au moins quatre itérations). Le graphe de la fonction itérative vous est donné. Vous devez bien identifier les axes, les points d'équilibre, la condition initiale, etc.
Réponse :

d) Lequel des points d'équilibre est stable ? N'oubliez pas de justifier votre réponse.
Réponse : $\boxed{0}$

Solution:

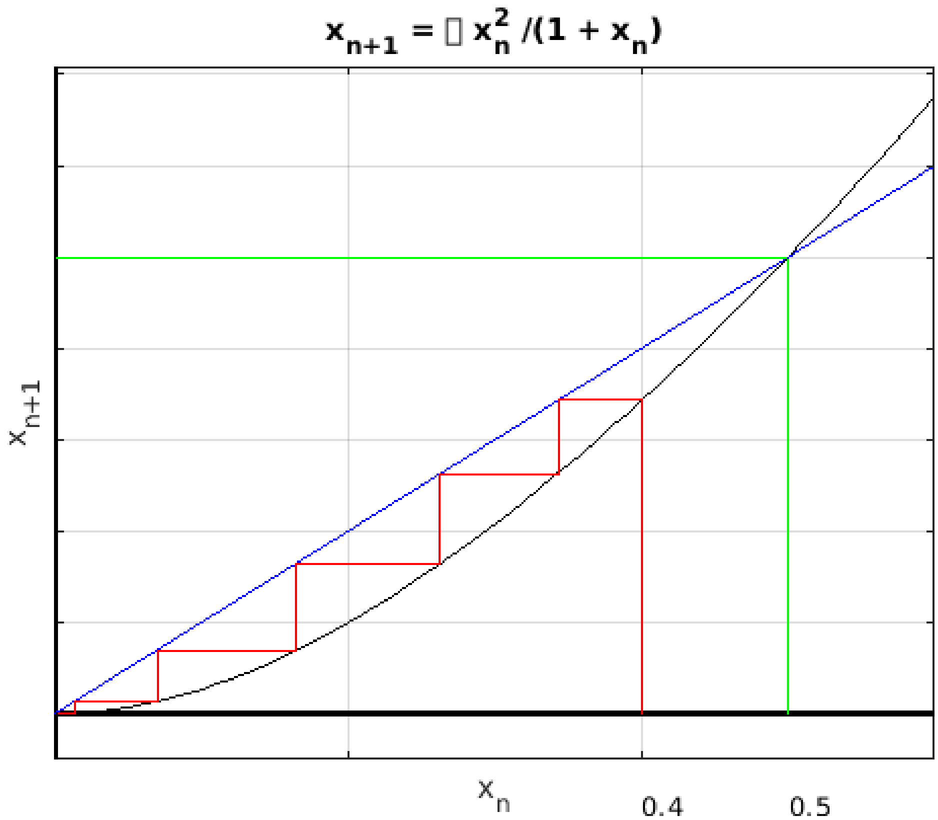
a) La fonction génératrice est $f(x) = \dfrac{3x^2}{1+x}$.

b) On cherche les points x^* tels que $x^* = f(x^*) = \dfrac{3(x^*)^2}{1+x^*}$. Donc,

$$x^* = f(x^*) = \frac{3(x^*)^2}{1+x^*} \Rightarrow x^* + (x^*)^2 = 3(x^*)^2 \Rightarrow x^*(1-2x^*) = 0$$

On obtient $x^* = 0$ et $x^* = 1/2$.

c) Le graphe en forme de toile d'araignée pour $x_0 = 0.4$ est donné ci-dessous.



d) On peut conclure en analysant les orbites pour différentes conditions initiales que le point d'équilibre $x^* = 0$ est stable alors que le point d'équilibre $x^* = 1/2$ est instable.