



MAT1700: Méthodes Mathématiques I

Automne 2019

Examen de mi-session #1

Professor: Arian Novruzi

Department of Mathematics and Statistics

University of Ottawa

email: novruzi@uottawa.ca

+ sol

Nom de famille _____ Prénom: _____

Numéro d'étudiant: _____

Instructions:

- La durée de l'examen est de 80 minutes.
- L'utilisation de manuel, notes de cours, calculatrice ou tout autre appareil électronique de calcul est interdite.
- L'examen comporte 8 questions: 5 à choix multiple et 3 à réponse longue, pour un total de 50 points.
- Pour les questions à **choix multiple**: écrivez la réponse (lettre de 'A' à 'F') dans le tableau ci-dessous
- Pour les problèmes à **solution longue**: écrivez clairement la solution dans l'espace qui suit la question. Vous pouvez utiliser le verso des pages si nécessaire (veuillez clairement l'indiquer dans ce cas).
- Vous trouverez une feuille de brouillon à la fin du questionnaire.
- Ne détachez pas le questionnaire.
- **NB**

Les téléphones cellulaires, les appareils électroniques non autorisés ou les notes de cours (à moins qu'il s'agisse d'un examen livre ouvert) ne sont pas autorisés pendant cet examen. Les téléphones et les appareils doivent être éteints et rangés dans votre sac. Ne les gardez pas en votre possession, par exemple dans vos poches. Si vous êtes pris avec un tel appareil ou document, des allégations de fraude scolaire seront déposées, ce qui pourrait entraîner l'obtention d'un 0 (zéro) pour l'examen.

En apposant votre signature ci-dessous, vous reconnaissez avoir lu et vous assurer de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature: _____

Réponses

	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Problème	à choix multiple (une lettre A-F)					à solution longue (n'écrivez rien ici)			82
Votre résultat	F	E	F	E	E				

Problèmes à choix multiple

Problème 1 (5 points) Trouvez la solution de l'équation

$$\ln(x+3) - \ln(x-5) = \ln 3.$$

- A) -2, 4 B) 2, 4 C) -7 D) -5 E) 7 **F) 9**

$\rightarrow x+3 > 0$ et $x-5 > 0$; donc $x > 5$

$\rightarrow \ln(x+3) = \ln 3 + \ln(x-5)$

$$\ln(x+3) = \ln(3 \cdot (x-5))$$

$$x+3 = 3(x-5)$$

$$x+3 = 3x-15$$

$$2x = 18$$

$$x = 9$$

Problème 2 (5 points) Trouvez l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x) = \frac{16}{\sqrt{3x+1}}$ au $x = 1$.

- A) $y = 3x + 2$ C) $y = -2x + 8$ **E) $y = -3x + 11$**
B) $y = -3x + 14$ D) $y = x - 11$ F) $y = 4x - 7$

$\rightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$\rightarrow x_0 = 1, \quad f(x_0) = \frac{16}{\sqrt{3 \cdot 1 + 1}} = \frac{16}{\sqrt{4}} = 8$$

$$\rightarrow f'(x) = \left(16 \cdot (3x+1)^{-\frac{1}{2}} \right)' = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (3x+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 3$$

$$f'(x_0) = -16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{3/2}} \cdot 3 = -3$$

$$\rightarrow y = (-3)(x-1) + 8$$

$$y = -3x + 11$$

Problème 3 (5 points) Trouvez a et b tels que la fonction f donnée ci-dessous soit continue partout.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3x & x < -2 \\ 6 & x = -2 \\ -bx + 2 & x > -2 \end{cases}$$

- A) $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ B) $\begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases}$ C) $\begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases}$ D) $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$ E) $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$ F) $\begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = f(-2) \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} (ax^2 - 3x) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (-bx + 2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4a + 6 = 6 \\ 2b + 2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

Problème 4 (5 points) Trouvez la limite (c'est une limite à côté (à droite))

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x^2-9}$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 0 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$ F) La limite n'existe pas.

$$\rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{\cancel{(x-3)}(x+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x+3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

Problème 5 (5 points) Pour quelle(s) valeur(s) x , le graphe de la fonction f suivante a une droite tangente horizontale (i.e. $f'(x) = 0$)?

$$f(x) = xe^{-2x+3}.$$

A) $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = 0 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases}$ C) $x = \frac{1}{3}$ D) $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$ **E) $x = \frac{1}{2}$** F) $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 0 \end{cases}$

$$\rightarrow f'(x) = 0$$

$$\rightarrow (xe^{-2x+3})' = 0$$

$$1 \cdot e^{-2x+3} + x e^{-2x+3} \cdot (-2) = 0$$

$$e^{-2x+3} \cdot (1-2x) = 0$$

$$1-2x = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Problèmes à solution longue

Problème 6 (14 points)¹ Soit $f(x) = \sqrt{x-3}$. Calculez $f'(x)$ en utilisant seulement la définition de la dérivée.

$$\rightarrow x > 3$$

\rightarrow pour $x > 3$ on a:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\sqrt{x+h-3} - \sqrt{x-3})$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\sqrt{x+h-3} - \sqrt{x-3}) \cdot \frac{\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3}}$$

[on utilise
(a-b)(a+b)
"a²-b²"]

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{(x+h-3) - (x-3)}{\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

¹expliquez avec les détails vos réponses

Problème 7 (14 points)² Une valeur actualisée est déposée à la banque avec un intérêt annuel 4 %.

a) Supposons que la valeur actualisée est \$2,000 et que l'intérêt est composé chaque 3 mois. Trouvez la balance du compte après 10 années (pas besoin de simplifier le résultat)

b) Supposons que l'intérêt est composé continûment. Trouvez le temps quand la valeur actualisée se double, i.e. le temps quand la balance du compte est deux fois la valeur actualisée.

a) $r = 0.04$, $A = 2000$, $m = 4$ (chaque 4 mois, donc 3 fois/an)

$$C(t) = A \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = 2000 \cdot \left(1 + \frac{0.04}{4}\right)^{4t}$$

$$= 2000 \cdot (1.01)^{4t}$$

$$C(10) = 2000 \cdot \left(1 + \frac{0.04}{4}\right)^{40}$$

$$= 2000 \cdot (1.01)^{40}$$

b) $m = +\infty$, donc $C(t) = A \cdot e^{rt}$
 $= A \cdot e^{0.04 \cdot t}$

Trouvons t tel que

$$C(t) = 2A,$$

~~$$A \cdot e^{0.04 \cdot t} = 2A$$~~

$$e^{0.04t} = 2$$

$$0.04 \cdot t = \ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.04}$$

²expliquez avec les détails vos réponses

Problème 8 (9 points) La fonction $y = f(x)$ est définie implicitement par

$$y^3 + xy = 2x^3 - 4.$$

i) Sachant que $f(1) = -1$, trouver $f'(1)$ à l'aide de la différentiation implicite.

ii) Trouvez l'équation de la droite tangente au graphe de f à $x = 1$.

i) On différentie

$$(y^3 + xy)' = (2x^3 - 4)'$$

$$3y^2 \cdot y' + 1 \cdot y + x \cdot y' = 6x^2.$$

On remplace $x=1$, $y=-1$ et on trouve $y' = y'(1)$:

$$3 \cdot (-1)^2 \cdot y' + (-1) + 1 \cdot y' = 6 \cdot 1^2$$

$$3y' - 1 + y' = 6$$

$$y' = \frac{7}{4}.$$

ii) $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$\rightarrow x_0 = 1, f(x_0) = -1, f'(x_0) = \frac{7}{4}$$

$$\rightarrow y = \frac{7}{4}(x-1) + (-1)$$

$$y = \frac{7}{4}x - \frac{11}{4}.$$