Université d'Ottawa • University of Ottawa

Faculté des sciences Mathématiques et de statistique — Faculty of Science Mathematics and Statistics

MAT1700: Méthodes Mathématiques I
Automne 2019
Examen de mi-session #1

Professor: Arian Novruzi
Department of Mathematics and Statistics
University of Ottawa
email: novruzi@uottawa.ca

+ Sol

Nom de famille________________________ **Prénom:**__________________

Numéro d'étudiant:____________________

Instructions:

- La durée de l'examen est de 80 minutes.
- **L'utilisation de manuel, notes de cours, calculatrice ou tout autre appareil électronique de calcul est interdite.**
- L'examen comporte 8 questions: 5 à choix multiple et 3 à reponse longue, pour un total de **50** points.
- Pour les questions à **choix multiple**: écrivez la reponse (lettre de 'A' à 'F') dans le tableau ci-dessous
- Pour les problèmes à **solution longue**: écrivez clairement la solution dans l'espace qui suit la question. Vous pouvez utiliser le verso des pages si nécessaire (veuillez clairement l'indiquer dans ce cas).
- Vous trouverez une feuille de brouillon à la fin du questionnaire.
- Ne détachez pas le questionnaire.
- **NB**
  Les téléphones cellulaires, les appareils électroniques non autorisés ou les notes de cours (à moins qu'il s'agisse d'un examen livre ouvert) ne sont pas autoriss pendant cet examen. Les téléphones et les appareils doivent être éteints et rangés dans votre sac. Ne les gardez pas en votre possession, par exemple dans vos poches. Si vous êtes pris avec un tel appareil ou document, des allégations de fraude scolaire seront déposes, ce qui pourrait entrainer l'obtention d'un 0 (zéro) pour l'examen.
  En apposant votre signature ci-dessous, vous reconnaissez avoir lu et vous assurer de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature:__________________

Réponses

	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Problème	à choix multiple (une lettre A-F)					à solution longue (n'écrivez rien ici)			62
Votre résultat	E	B	E	D	C				

Problèmes à choix multiple

Problème 1 (5 points) *Trouvez la solution de l'équation*

$$\ln(x+2) - \ln(x-4) = \ln 3.$$

A) $-2, 4$ **B)** $2, 4$ **C)** -7 **D)** -5 $\boxed{\textbf{E)}\ 7}$ **F)** 9

$\rightarrow x+2>0$ et $x-4>0$; donc $x>4$

$\rightarrow \ln(x+2) = \ln 3 + \ln(x-4)$

$\ln(x+2) = \ln(3(x-4))$

$x+2 = 3(x-4)$

$x+2 = 3x-12$

$2x = 14$

$x = 7$

Problème 2 (5 points) *Trouvez l'équation de la droite tangente au graphe de* $f(x) = \dfrac{16}{\sqrt{3x-2}}$ *au* $x = 2$.

A) $y = 3x + 2$ **C)** $y = -2x + 8$ **E)** $y = -3x + 11$

$\boxed{\textbf{B)}\ y = -3x + 14}$ **D)** $y = x - 11$ **F)** $y = 4x - 7$

$\rightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$\rightarrow x_0 = 2, \quad f(x_0) = \dfrac{16}{\sqrt{3\cdot 2 - 2}} = \dfrac{16}{\sqrt{4}} = 8$

$\rightarrow f'(x) = \left(16\cdot(3x-2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = 16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(3x-2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 3$

$f'(x_0) = -16\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{3/2}}\cdot 3 = -3$

$\rightarrow y = (-3)(x-2) + 8$

$y = -3x + 14$

Problème 3 (5 points) *Trouvez a et b tels que la function f donnée ci-dessou soit continue partout.*

$$f(x) = \begin{cases} -ax+2 & x < -2 \\ 6 & x = -2 \\ bx^2 - 3x & x > -2 \end{cases}$$

A) $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ **B)** $\begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$ **C)** $\begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases}$ **D)** $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$ $\boxed{\textbf{E)} \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}}$ **F)** $\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \lim_{x\to -2^-} f(x) = f(-2) \\ \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) \end{cases} \iff \begin{cases} \lim_{x\to -2^-} (-ax+2) = 6 \\ \lim_{x\to -2^+} (bx^2-3x) = 6 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2a+2 = 6 \\ 4b+6 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$$

Problème 4 (5 points) *Trouvez la limite (c'est une limite à côté ('a droite))*

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2-4}.$$

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** 0 $\boxed{\textbf{D)}\ \frac{1}{4}}$ **E)** $\frac{1}{6}$ **F)** La limite n'existe pas.

$\to \frac{0}{0}$

$$\to \lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Problème 5 (5 points) *Pour quelle(s) valeur(s) x, le graphe de la fonction f suivante a une droite tangente horizontale (i.e. $f'(x) = 0$)?*

$$f(x) = xe^{-3x+2}.$$

A) $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = 0 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{C) } x = \frac{1}{3}}$ D) $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$ E) $x = \frac{1}{2}$ F) $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 0 \end{cases}$

$\rightarrow f'(x) = 0$

$\rightarrow \left(x e^{-3x+2}\right)' = 0$

$1 \cdot e^{-3x+2} + x e^{-3x+2} \cdot (-3) = 0$

$e^{-3x+2} \cdot (1 - 3x) = 0$

$1 - 3x = 0$

$x = \frac{1}{3}$

Problèmes à solution longue

Problème 6 (14 points)[1] *Soit* $f(x) = \sqrt{x-4}$. *Calculez* $f'(x)$ *en utilisant seulement la définition de la dérivée.*

$\rightarrow x \geq 4$

$\rightarrow$ Pour $x > 4$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\sqrt{x+h-4} - \sqrt{x-4}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\sqrt{x+h-4} - \sqrt{x-4}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+h-4} + \sqrt{x-4}}{\sqrt{x+h-4} + \sqrt{x-4}}$$

[on utilise $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \frac{(\cancel{x} + \cancel{h} \cancel{-4}) - (\cancel{x} \cancel{-4})}{\sqrt{x+h-4} + \sqrt{x-4}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-4} + \sqrt{x-4}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x-4}}.$$

[1] expliquez avec les détails vos reponses

Problème 7 (14 points)[2] *Une valeur actualisée est déposée à la banque avec un intérêt annuel 3 %.*

a) Supposons que la valeur actualisée st \$2,000 et que l'intérêt est composé chaque 4 mois. Trouvez la balance du compte après 10 années (pas besoin de simplifier le résultat)

b) Supposons que l'intérêt est composé continûment. Trouvez le temps quand la valeur actualisée se double, i.e. le temps quand la balance du compte est deux fois la valeur actualisée.

a) $r = 0.03$, $A = 2000$, $n = 3$ (chaque 4 mois, donc 3 fois/an)

$$C(t) = A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = 2000\cdot\left(1+\frac{0.03}{3}\right)^{3t}$$

$$= 2000\cdot(1.01)^{3t}$$

$$C(10) = 2000\left(1+\frac{0.03}{3}\right)^{30}$$

$$= 2000\cdot(1.01)^{30}$$

b) $n = +\infty$, donc $C(t) = A\cdot e^{r\cdot t}$

$$= A\cdot e^{0.03\cdot t}$$

Trouvons t tel que

$$C(t) = 2\cdot A$$

$$\cancel{A}\cdot e^{0.03\cdot t} = 2\cancel{A}$$

$$e^{0.03\cdot t} = 2$$

$$0.03\cdot t = \ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.03}$$

[2] expliquez avec les détails vos reponses

Problème 8 (9 points) *La fonction $y = f(x)$ est définie implicitement par*

$$x^3 + xy = 2y^3 - 4.$$

i) Sâchant que $f(-1) = 1$, trouver $f'(-1)$ à l'aide de la différentation implicité.

ii) Trouvez l'équation de la droite tangente au graphe de f à $x = -1$.

i) On differentie:

$$(x^3 + x \cdot y)' = (2y^3)'$$

$$3x^2 + 1 \cdot y + x \cdot y' = 6 \cdot y^2 \cdot y'.$$

On remplace $x = -1$, $y = 1$ et on trouve $y' = y'(-1)$:

$$3 \cdot (-1)^2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot y' = 6 \cdot 1^2 \cdot y'$$

$$4 \cdot -y' = 6y'$$

$$y' = \frac{4}{7}.$$

ii). $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$\rightarrow x_0 = -1, \quad f(x_0) = 1, \quad f'(x_0) = \frac{4}{7}$

$\rightarrow y = \frac{4}{7}(x - (-1)) + 1$

$$y = \frac{4}{7}x + \frac{11}{7}.$$