CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRALE I (MAT1720 W)
EXAMEN PARTIEL 1 PRATIQUE

Nom de Famille: Solution.

Prénom: ______________________

Numéro d'étudiant: ______________________

- Aucune note n'est permise.
- Seulement les calculatrices non programmables sont permises.
- Cet examen comporte 8 questions et 9 pages.
- Les questions à choix multiples (1 à 5) valent chacune 2 points sur les 26 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.
- Les questions 6 à 8 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger vos solutions.
- Vous pouvez utiliser le verso des pages ou les deux pages additionnelles entre les questions à développement si vous manquez d'espace au recto.

VEUILLEZ INSCRIRE VOS RÉPONSES AUX QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES (QUESTIONS 1-5) DANS LES CASES SUIVANTS

1	2	3	4	5

Question 1. Laquelle des fonctions suivantes est la fonction **inverse** de

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}} + 2?$$

A. $y = \frac{(x-2)^3-2}{(x-2)^3+1}$

B. $y = \frac{(x-2)^3+2}{(x-2)^3+1}$

C. $y = \frac{(x-2)^3+2}{(x-2)^3-1}$

D. $y = \frac{(x+2)^3-2}{(x+2)^3+1}$

E. $y = \frac{(x+2)^3+2}{(x+2)^3+1}$

F. Aucne des ces réponses

Question 2. Trouver la valeur du nombre réel positif a tel que $\log_a(2) - \log_a(32) = -4$.

A. $a = \frac{1}{2}$

B. $a = \frac{1}{4}$

C. $a = 2$

D. $a = \frac{1}{16}$

E. $a = 16$

F. $a = \frac{1}{3}$

Question 1 $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}} + 2 \Rightarrow y-2 = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}} \Rightarrow (y-2)^3 = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow$

$x+2 = x(y-2)^3 - (y-2)^3 \Rightarrow x\left[(y-2)^3 - 1\right] = (y-2)^3 + 2 \Rightarrow x = \frac{(y-2)^3+2}{(y-2)^3-1}$.

Alors $f^{-1}(x) = \frac{(x-2)^3+2}{(x-2)^3-1}$

Question 2 $\log_a(2) - \log_a(32) = -4 \Rightarrow \log_a\left(\frac{2}{32}\right) = -4 \Rightarrow \log_a\left(\frac{1}{16}\right) = -4$

$\Rightarrow \frac{1}{16} = a^{-4} \Rightarrow 2^{-4} = a^{-4} \Rightarrow a = 2$

Question 3. Trouver la valeur de $\cos\left(\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$.

A. $\frac{4}{5}$

B. $-\frac{4}{5}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $-\frac{2}{3}$

E. $\frac{1}{2}$

F. Aucne des ces réponses

Question 4. La demi-vie d'une certaine substance radioactive est de 150 ans. En 2018, un certain laboratoire possède une masse de 750 grammes de la substance radioactive. Estimer la quantité Q de la substance qui reste en 2080 et l'anné T où il y aura seulement 100 g de la substance au laboratoire (arrondir vos réponses aux valeurs entières les plus proches)

A. $Q = 450$, $T = 2125$

B. $Q = 265$, $T = 2298$

C. $Q = 375$, $T = 2333$

D. $Q = 563$, $T = 2454$

E. $Q = 647$, $T = 2565$

F. Aucne des ces réponses

Question 3 Soit $\alpha = \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$, alors $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ et $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$

on doit chercher la valeur de $\cos(\alpha)$.

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow$

$\cos\alpha = \pm\frac{2}{3}$. Mais comme $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\cos\alpha > 0$ et alors

$\cos\left(\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}$

Question 4 Après t années, la quantité qui reste est $Q = Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/h}$

$Q = 750\left(\frac{1}{2}\right)^{t/150}$, En 2080, $t = 62 \Rightarrow Q = 750\left(\frac{1}{2}\right)^{62/150}$

$= 563.16$ g. Alors $Q = 563$

$100 = 750\left(\frac{1}{2}\right)^{t/150} \Rightarrow \frac{100}{750} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/150} \Rightarrow \frac{t}{150}\ln(1/2) = \ln\left(\frac{100}{750}\right) \Rightarrow t \simeq 436.03$

$\Rightarrow T = 436 + 2018 = 2454$

Question 5. Résoudre l'équation $2\log_3 x - \log_3(x+6) = 1$ pour le nombre réel x.

A. $x = -3$ et $x = 6$

B. $x = 3$ et $x = -6$

C. $x = 6$ seulement

D. $x = -3$ seulement

E. $x = 3$ seulement

F. $x = -6$ seulement

$2\log_3 x - \log_3(x+6) = 1 \Rightarrow \log_3\left(\frac{x^2}{x+6}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x+6} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0$

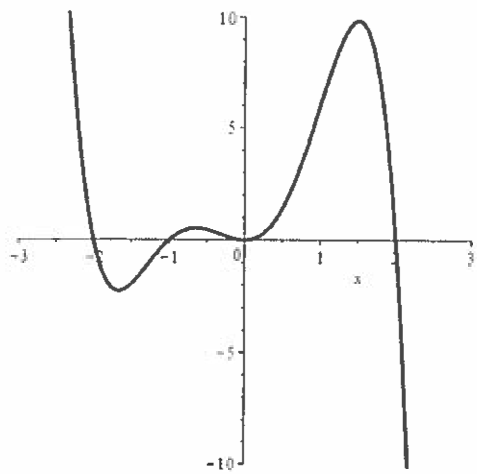
$\Rightarrow (x-6)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 6, \ x = -3.$

Mais $x = -3$ ne satisfait pas l'équation originale !

Alors $x = 6$ est la seule solution !

Question 6. [6 points] Les trois parties de cette questions sont indépendantes

(1) La courbe suivante représente le graphe de la **dérivée** g' d'une fonction g:



Déterminer les abscisses des points extremums locaux de la fonction originale g (les points sur la courbe de g qui corresponsent à un maximum ou un minimum de g). Pour chacun de ces points, déterminer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum de la fonction g.

(2) **[2 points]** Trouver toutes les valeurs de x dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ qui satisfont l'inégalité:

$$\cos^2 x \geq \frac{1}{2}.$$

(3) **[2 points]** Calculer la limite suivante:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{x+3}}{x-2}.$$

(1) Ce sont les points où la dérivée change de signe: $x=-2$, $x=-1$, $x=2$. $x=-2$ et $x=2$ correspondent à des maximums pour la fonction g car en ces points, g' change de positive à négative; $x=-1$ correspond à un minimum pour la fonction g comme g' change de négative à positive en ce point.

(2) $\cos^2 x - \frac{1}{2} \geq 0 \iff \left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq 0$

Noter que $\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow x = \pi/4$, $x = \frac{7\pi}{4}$

$\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$

x	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		$5\pi/4$		$7\pi/4$		2π
$\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\cos^2 x - \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

on conclut que $\cos^2 x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \pi/4 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$

3) $$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{5}-\sqrt{x+3}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{x+3})(\sqrt{5}+\sqrt{x+3})}{(x-2)(\sqrt{5}+\sqrt{x+3})} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{5-(x+3)}{(x-2)(\sqrt{5}+\sqrt{x+3})} = \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)(\sqrt{5}+\sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-1}{\sqrt{5}+\sqrt{x+3}} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Question 7. **[6 points]** Utiliser la **définition de la dérivée** pour trouver la dérivée de la fonction:

$$f(x) = -2x^2 + \frac{3}{x}.$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2(x+h)^2 + \frac{3}{x+h} - \left(-2x^2 + \frac{3}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{-2x^2} - 4xh - 2h^2 + \frac{3}{x+h} + \cancel{2x^2} - \frac{3}{x}}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{-4x^2h(x+h) - 2x(x+h)h^2 + 3x - 3(x+h)}{h\,x(x+h)}$$

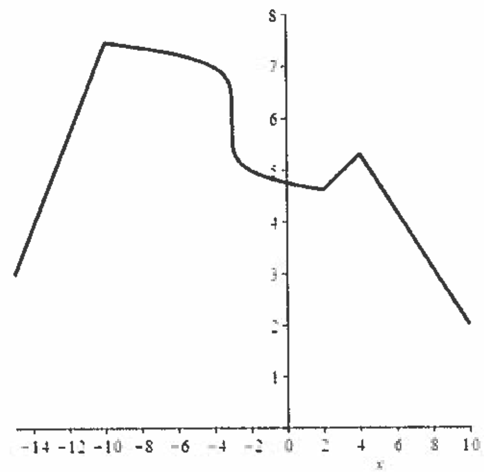
$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{-4x^2(x+h) - 2x(x+h)h - 3}{x(x+h)}\right) = \frac{-4x^3 - 3}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = -4x - \frac{3}{x^2}}$$

Question 8. [6 points] Les trois parties de cette questions sont indépendantes

(1) **[2 points]** Résoudre l'équation $2\left(3^{-2x+1}\right) = 5^{x+2}$ pour le nombre réel x.

(2) **[2 points]** La courbe suivante est le graphe d'une fonction f:



Déterminer les abscisses des points sur la courbe où la dérivée f' n'existe pas.

(3) **[2 points]** Considérer la fonction f définie par morceaux de la façon suivante:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

où a et b sont deux constantes réelles. Trouver les valeurs de a et b pour lesquelles la fonction est continue sur $]-\infty, \infty[$.

(1) $2 \cdot 3^{-2x} \cdot 3^{1} = 5^{x} \cdot 5^{2} \Rightarrow \frac{6}{25} = 5^{x} 3^{2x} = 5^{x}(3^{2})^{x} = 45^{x} \Rightarrow$

$\ln\left(\frac{6}{25}\right) = x \ln(45) \Rightarrow x = \frac{\ln(6/25)}{\ln(45)}$.

(2) $f'(-2)$ n'existe pas comme la droite tangente à la courbe en ce point est verticale.

$f'(-10)$, $f'(2)$, $f'(4)$ n'existent pas car en chacun de ces points, le graphe admet un "angle" ce qui signifie qu'il y a deux pentes différentes à gauche et à droite de chacun de ces points.

Page additionnelle

(3) Continuité au point $x = 2$: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow$

$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} (ax^2 - bx + 3) \Rightarrow \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4a - 2b + 3$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2} (x+2) = 4a - 2b + 3 \Rightarrow 4 = 4a - 2b + 3 \Rightarrow 4a - 2b = 1$ (1)

Continuité au point $x = 3$ $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) \Rightarrow$

$\lim_{x \to 3^-} (ax^2 - bx + 3) = \lim_{x \to 3^+} (2x - a + b) \Rightarrow 9a - 3b + 3 = 6 - a + b \Rightarrow$

$10a - 4b = 3$ (2)

$-2(1) + (2) \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$; $(1) \Rightarrow b = \frac{1}{2}$