CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRALE I (MAT1720 W)

EXAMEN PARTIEL PRATIQUE I (Automne 2017)

Professeur: Joseph Khoury **Durée: 80 minutes**

Nom de famille: Solutions

Prénom: _____

Numéro d'étudiant: _____

Aucune note n'est permise.

Les calculatrices sont permises.

Cet examen comporte 8 questions et 9 pages. Les questions à choix multiples (1 à 5) valent chacune 2 points sur les 22 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

1	2	3	4	5

Les questions 6 à 9 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution. Vous pouvez utiliser le verso des pages ou les deux pages additionnelles (8 et 9) à la fin si vous manquez d'espace au recto.

1. Considérer la fonction f définie par morceaux:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si} \quad x < -2 \\ -3ax + 2b & \text{si} \quad -2 \leq x < -1 \\ ax^3 + bx^2 + c & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ -x + a + b + c + 5 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

où a, b et c sont trois constantes réelles. Trouver les valeurs de a, b et c pour lesquelles la fonction est continue sur $]-\infty, \infty[$.

A. $a = -3$, $b = -2$ et $c = -14$
B. $a = 3$, $b = 2$ et $c = -14$
C. Aucune de ces réponses
D. $a = -3$, $b = -2$ et $c = 14$
E. $a = -3$, $b = 2$ et $c = -14$
F. $a = 3$, $b = -2$ et $c = 14$

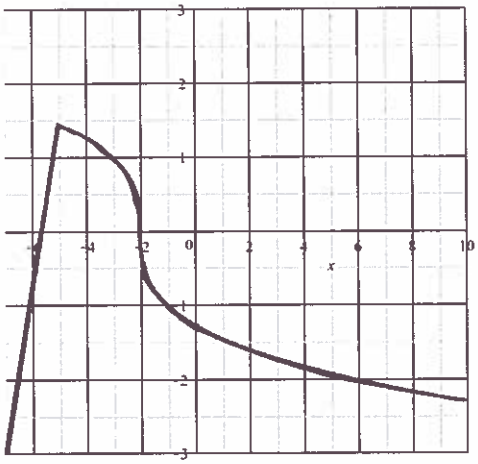
$x = -2$
$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x)$
$\Rightarrow 4a - 2b + c = 6a + 2b$

$x = -1$
$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) \Rightarrow$
$3a + 2b = -a + b + c$

$x = 0$
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$
$\Rightarrow c = a + b + c + 5$

$\left.\begin{array}{l} 2a + 4b - c = 0 \\ 4a + b - c = 0 \\ a + b = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow$
$a = -3,\ b = -2,\ c = -14$

2. La courbe suivante est le graphe d'une fonction f :



Lesquels des énoncés suivants sont **vrais**?

(1) $f'(-2)$ n'existe pas
(2) $f'(-2) = 0$
(3) $f'(-5) = 0$
(4) $f'(-5)$ n'existe pas
(5) La dérivée f' de f est une fonction positive dans l'intervalle $]-5, -2[$
(6) La dérivée f' de f est une fonction décroissante dans l'intervalle $]-5, -2[$

A. (2), (3) et (5)
B. (1), (4) et (6)
C. Aucune des autres réponses
D. (2) et (5)
E. (1) seulement
F. (3) et (4) et (6)

(1) VRAI La fonction admet une tangente verticale en ce point
2) Faux $f'(2)$ n'existe pas
(3) Faux $f'(5)$ n'existe pas

(4) VRAI $x = -5$ est un point anguleux sur le graphe
(5) Faux $f' < 0$ dans $]-5, -2[$ car la fonction est décroissante dans cet intervalle.

(6) VRAI car f est concave vers le bas dans $]-5, -2[$

3. Trouver toutes les valeurs de x dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ qui satisfont l'inégalité

$$\cos^2 x \leq \frac{3}{4}.$$

A. $[0, \pi/6] \cup [5\pi/6, 2\pi]$
B. Aucune des autres réponses
C. $[\pi/6, 5\pi/6] \cup [11\pi/6, 2\pi]$
D. $[0, \pi/6] \cup [11\pi/6, 2\pi]$
E. $[5\pi/6, 11\pi/6]$
F. $[\pi/6, 5\pi/6] \cup [7\pi/6, 11\pi/6]$

$\cos^2 x \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{3}{4} \leq 0 \Rightarrow (\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2})(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}) \leq 0.$

$\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pi/6,\ x = \frac{11\pi}{6}$

$\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6},\ x = \frac{7\pi}{6}$

x	0		$\pi/6$		$5\pi/6$		$7\pi/6$		$11\pi/6$		2π
$\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\cos^2 x - \frac{3}{4}$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Alors $\cos^2 x - 3/4 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [\pi/6, \frac{5\pi}{6}] \cup [\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$

4. Laquelle des fonctions suivantes est la fonction **inverse** de $f(x) = \frac{5x}{2+\frac{x}{3}}$?

A. Aucune des autres réponses
B. $y = \frac{15x}{6+x}$
C. $y = \frac{6+x}{15x}$
D. $y = \frac{x}{x+1}$
E. $y = \frac{6x}{15-x}$
F. $y = \frac{15-x}{6x}$

$y = \frac{5x}{2+\frac{x}{3}} = \frac{15x}{6+x} \Rightarrow 15x = 6y + xy \Rightarrow (15-y)x = 6y \Rightarrow$

$x = \frac{6y}{15-y}$. Alors $f^{-1}(x) = \frac{6x}{15-x}$

5. La courbe suivante représente le graphe de la **dérivée** f' d'une fonction f:

Lesquels des énoncés suivants sont **vrais**?

(1) La fonction f est croissante sur l'intervalle $]-2,0[$.
(2) La fonction f est concave vers le bas sur l'intervalle $]-2,0[$
(3) La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0,3[$
(4) La fonction f est concave vers le bas sur l'intervalle $]2,3[$
(5) La fonction f est concave vers le haut sur l'intervalle $]2,3[$

A. Aucune de ces réponses
B. (3) seulement
C. (2) et (4)
D. (3) et (5)
E. (5) seulement
F. (1) et (3)

(1) Faux $f' < 0$ dans $]-2,0[$, alors f est décroissante dans $]-2,0[$
(2) Faux f' est croissante dans $]-2,0[$, alors f est concave vers le haut
(3) VRAI car $f' < 0$ dans $]0,3[$
(4) Faux car f' est croissante dans $]2,3[$
(5) VRAI " " " " " " .

6. [6 points] Les trois parties de cette questions sont indépendantes et valent chacune 2 points

(1) Déterminer si la limite suivante existe. Si elle existe, calculer la et si elle n'existe pas expliquer pourquoi.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}}{x}.$$

(2) Déterminer si la limite suivante existe. Si elle existe, calculer la et si elle n'existe pas expliquer pourquoi.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{|x-1|}.$$

(3) Résoudre l'équation: $\log_2 x + \log_2(x+1) = 1$ pour x.

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1})}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1})}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)-(2x+1)}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1})} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1})} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1}} = -1/2$

(2) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+2}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{-(x-1)}$ (car $x-1<0$ dans ce cas)

$= \lim_{x\to 1} -(x-2) = 1$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-3x+2}{|x-1|} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)}$ (car $x-1>0$ dans ce cas)

$= \lim_{x\to 1} x-2 = -1$

comme $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{|(x-1)|}$ n'existe pas.

(3) $\log_2 x + \log_2(x+1) = 1 = \log_2 2 \Rightarrow \log_2(x(x+1)) = \log_2 2 \Rightarrow$

$x^2+x = 2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x=-2, x=1.$

Mais $x=-2<0$ ne satisfait pas l'équation originale.

Alors, la seule racine est $x=1$.

7. **[4 points]** Utiliser la **définition de la dérivée** pour trouver la dérivée de la fonction:

$$f(x) = \sqrt{2x+3} + x.$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)+3} + \cancel{x} + h - \sqrt{2x+3} - \cancel{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{2x+2h+3} - \sqrt{2x+3}}{h} \right) + 1 = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{2x+2h+3} - \sqrt{2x+3})(\sqrt{2x+2h+3} + \sqrt{2x+3})}{h(\sqrt{2x+2h+3} + \sqrt{2x+3})} + 1$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2x} + 2h + \cancel{3} - \cancel{2x} - \cancel{3}}{h(\sqrt{2x+2h+3} + \sqrt{2x+3})} + 1 = \lim_{h \to 0} \frac{2}{(\sqrt{2x+2h+3} + \sqrt{2x+3})} + 1$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} + 1.$$

8. **[4 points]** La demi-vie du Césium (substance radioactive) est de h ans. En 1990, une quantité de m_0 grammes de cette substance a été découverte.

(1) Donner une expression de la masse $m(t)$ du Césium qui reste après t années à partir de 1990 (votre réponse doit contenir m_0 et h).

(2) En 2000, on remarque qu'il reste 79% de m_0. Déterminer la demi-vie h.

(3) En 2015, on remarque qu'il ne reste que 250 grammes du Césium. Déterminer la quantité initiale m_0 de Césium.

(4) Estimer en quelle année, il y aura seulement 5% de la quantité découverte en 1990.

(1) $m(t) = m_0 (1/2)^{t/h}$

(2) En 2000, $t = 10$, $m = 0.79 m_0 \Rightarrow 0.79 \cancel{m_0} = \cancel{m_0} (1/2)^{10/h} \Rightarrow$

$0.79 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{h}} \Rightarrow \ln(0.79) = \frac{10}{h} \ln(1/2) \Rightarrow h = \frac{10 \ln(1/2)}{\ln(0.79)} \simeq 29.4$

(3) En 2015, $t = 25 \Rightarrow 250 = m_0 (1/2)^{\frac{25}{29.4}} \Rightarrow$

$m_0 = \frac{250}{(1/2)^{25/29.4}} \simeq 450.7\,g$

(4) on cherche t tel que $0.05 m_0 = m_0 (1/2)^{t/29.4} \Rightarrow$

$\ln(0.05) = \frac{t}{29.4} \ln(0.5) \Rightarrow t = \frac{29.4 \ln(0.05)}{\ln(0.5)} \simeq 127$

Alors, il reste seulement 5% de la quantité originale en 2117