

# MAT 1739 - DGD 3

Automne 2019

*Exercice 1.* Trouvez les dérivées des fonctions définies par :

(a)  $f(x) = 3x^4 - 9x$ .

(b)  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^4}$ .

(c)  $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$ .

(d)  $f(x) = (x^3 + x)^{10}$ .

(e)  $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ .

(f)  $f(x) = (2x + 5)^{\frac{1}{5}}$ .

**Correction.** (a) On utilise la formule  $(x^n)' = nx^{n-1}$  + dérivation terme à terme. On a

$$f'(x) = 3 \times 4x^3 - 9 = 12x^3 - 9.$$

(b) On utilise la formule précédente (avec  $n < 0$ ) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^4} = x^2 - x^{-2} + 5x^{-4} \\ &= 2x - (-2) \times x^{-3} + 5 \times (-4) \times x^{-5} \\ &= 2x + \frac{2}{x^3} - \frac{20}{x^5}. \end{aligned}$$

(c) On utilise la formule dérivée d'un quotient  $((\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2})$ . On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 + 0)(x^2 - 1) - (x^3 + 1)(2x - 0)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - (2x^4 + 2x)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 3x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

(d) On utilise la formule de dérivée de la composée  $(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$  avec  $u(x) = x^{10}$  et  $v(x) = x^3 + x$ . On trouve

$$f'(x) = \underbrace{(3x^2 + 1)}_{v'(x)} \times \underbrace{10(x^3 + x)^9}_{u'(v(x))} = 10(3x^2 + 1)(3x^2 + 1).$$

On laisse sous forme factorisée.

(e) Idem, formule dérivation d'une composée avec  $u(x) = \sqrt{x}$  et  $v(x) = x + 1/x$ . On trouve

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underbrace{(1 - \frac{1}{x^2})}_{v'(x)} \times \underbrace{\frac{1}{2 \times \sqrt{x + \frac{1}{x}}}}_{u'(v(x))} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 \times \sqrt{x + \frac{1}{x}}} \\ &= \frac{x^2 - 1}{2x^2 \times \sqrt{x + \frac{1}{x}}}. \end{aligned}$$

- (f) On utilise la formule pour la dérivée de la composée avec  $u(x) = x^{1/9}$  et  $v(x) = 2x + 5$ . Pour dériver  $u$ , on utilise la formule de la première question, qui est encore valable avec  $n$  rationnel. On a

$$f'(x) = \underbrace{2}_{v'(x)} \times \underbrace{\frac{1}{9}(2x+5)^{\frac{1}{9}-1}}_{u'(v(x))} = 2(2x+5)^{-\frac{8}{9}} = \frac{2}{(2x+5)^{\frac{8}{9}}}.$$

*Exercice 2.* On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ .

- (a) Déterminez le domaine de définition de  $f$ .  
 (b) Déterminez les asymptotes verticales et horizontales à la courbe de  $f$ .

**Correction.**

- (a) On résout  $x+1=0$ . Le domaine de  $f$  est  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .  
 (b) **Asymptotes horizontales.** On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

De même on trouve  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ . La droite d'équation  $y = 1$  est donc asymptote horizontale en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

**Asymptotes verticales.** On ne peut avoir une asymptote verticale qu'en un point hors du domaine de définition de  $f$  ou en un point où  $f$  n'est pas continue. Seul candidat possible :  $x = -1$ . On calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty,$$

donc la droite d'équation  $x = -1$  est asymptote verticale à la courbe. (Remarque : on a aussi  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ ).