

MAT 1739 - DGD 2

Automne 2019

Exercice 1. On rappelle que la valeur absolue $|x|$ d'un nombre x est définie par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

En particulier, $|x|$ est toujours positif. Par exemple $|5| = 5$ et $|-2| = 2$. Résolvez les équations suivantes en utilisant le fait que pour tout $a \geq 0$, $|x| = a$ si et seulement si $x = \pm a$:

- (a) $|2x - 3| = 7$.
- (b) $|x + 1| = -2$.

Correction.

- (a) $|2x - 3| = 7$ si et seulement si $2x - 3 = 7$ ou $2x - 3 = -7$. On résout ces deux équations et on trouve $x = 5$ ou $x = -2$.
- (b) L'équation $|x + 1| = -2$ n'a pas de solution car $|x + 1| \geq 0$ pour tout x .

Exercice 2. Calculez les limites suivantes :

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 4x^4}{1 - 5x^3 + 2x^4}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{3x^2 - 7x + 1}$

Correction.

- (a) On procède comme dans le cours en faisant le quotient des termes dominants :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 4x^4}{1 - 5x^3 + 2x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^4}{2x^4} = 2.$$

- (b) On a une forme indéterminé $\frac{\infty}{\infty}$. On met en facteur le terme dominant à l'intérieur de la racine et au dénominateur. Pour $x > 0$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{3x^2 - 7x + 1} &= \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{2}{x})}}{x^2(3 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{x\sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{x^2(3 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2})} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{x(3 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2})}. \end{aligned}$$

Pour le calcul de la limite, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{3x^2 - 7x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{x(3 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{\sqrt{1}}{(+\infty) \times 3} = 0.$$

Exercice 3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x^2 + 2x}{x + 1}$.

- (a) Déterminez le domaine de définition de f .
- (b) Déterminez les asymptotes à la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f .

Correction.

- (a) Le dénominateur $x \mapsto x + 1$ de f s'annule uniquement pour $x = -1$. Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- (b) On va chercher successivement si f a des asymptotes verticales, horizontales et obliques.

Asymptotes verticales : Si elles existent, elles ne peuvent être qu'aux points x où f n'est pas continue. Or, f est continue partout sauf en $x = -1$. En ce point on a

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^2 + 2x}{x + 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

De manière similaire, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2 + 2x}{x + 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale.

Asymptotes horizontales : on regarde si f a une limite en $+\infty$ ou en $-\infty$. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x} = +\infty.$$

De même, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Il n'y a donc pas d'asymptote horizontales.

Asymptotes obliques : Cf semaine prochaine.

Exercice 4. A l'aide de la définition de la dérivée calculez $f'(x)$ pour $x > 0$, où on a posé $f(x) = \sqrt{x}$.

Correction. Cf semaine prochaine.