

# MAT 1739 - DGD 1

Automne 2018

*Exercice 1.* Factorisez les expressions suivantes quand c'est possible :

- (a)  $4 - x^2$
- (b)  $2x^2 - 8x + 8$
- (c)  $x^2 + x - 2$
- (d)  $x^3 + x$
- (e)  $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$  (indication : 1 est racine de ce polynôme)

**Correction.**

- (a) On reconnaît l'identité remarquable  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  (inutile de calculer le discriminant ici !), on a donc  $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$ .
- (b) On a  $2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x - 2)^2$  (identité remarquable  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ , pas de calcul du discriminant).
- (c) Le discriminant vaut  $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$ . On a deux racines réelles

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 - 3}{2} = -2,$$

et le polynôme se factorise en  $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ .

- (d)  $x^3 + x = x(x^2 + 1)$ . On calcule le discriminant de  $x^2 + 1$  :  $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$ . On ne peut pas factoriser davantage.
- (e)  $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$ . On vérifie que  $P(1) = 0$ . Le polynôme se factorise donc par  $(x - 1)$ . On résout l'équation  $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$  en développant l'expression de droite et en identifiant terme à terme :

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 2x + 2 &= (x - 1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c, \end{aligned}$$

d'où on tire les équations

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -1 \\ c - b = -2 \\ -c = 2. \end{cases}$$

Finalement on trouve  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = -2$ . D'où  $x^3 - x^2 - 2x + 2 = (x - 1)(x^2 - 2)$ . On peut factoriser l'expression  $x^2 - 2$  en  $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$  (identité remarquable), d'où finalement :

$$x^3 - x^2 - 2x + 2 = (x - 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

*Exercice 2.*

- (a) Déterminez (par le calcul) l'équation de la droite passant par les points  $(-3, 4)$  et  $(2, 1)$ .

- (b) Tracez son graphe.  
 (c) Déterminez le tableau de signe de la fonction affine associée.

**Correction.**

- (a) On note  $y = ax + b$  l'équation de la droite passant par  $(-3, 4)$  et  $(2, 1)$ . Le coefficient directeur  $a$  est donné par la formule

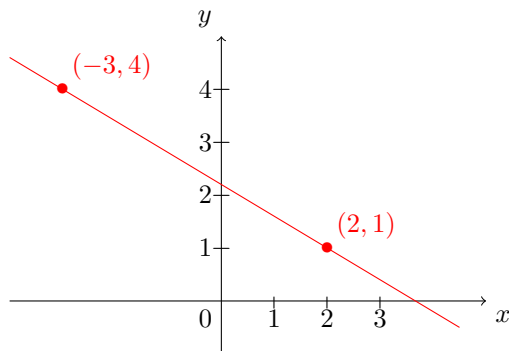
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 4}{2 - (-3)} = -\frac{3}{5}.$$

Pour trouver l'ordonnée à l'origine  $b$ , on utilise l'équation de la droite pour le point  $(2, 1)$  :  $1 = a \times 2 + b$ . En remplaçant  $a$  par la valeur précédemment trouvée on obtient  $1 = -\frac{3}{5} \times 2 + b$ , d'où  $b = 1 + \frac{6}{5} = \frac{11}{5}$ . Finalement, l'équation de la droite est

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{11}{5}.$$

Déterminez (par le calcul) l'équation de la droite passant par les points  $(-3, 4)$  et  $(2, 1)$ .

- (b) Le graphe est représentée ci-dessous



- (c) On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} -\frac{3}{5}x + \frac{11}{5} &\leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{5}x \leq -\frac{11}{5} \\ &\Leftrightarrow x \geq \left(-\frac{11}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{11}{3}, \end{aligned}$$

d'où le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$\frac{11}{3}$	$+\infty$
signe de $-\frac{3}{5}x + \frac{11}{5}$	+	0	-

*Exercice 3.* Pour chacune des fonctions suivantes

- Déterminez le domaine  $\text{dom}(f)$  de  $f$  ;
- Trouvez les zéros de  $f$  (trouvez les valeurs de  $x$  pour lesquelles on a  $f(x) = 0$ ) ;

- Déterminez le signe de  $f(x)$  pour tout  $x$  dans  $\text{dom}(f)$ .

(a)  $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$  (tracez le graphe)

(b)  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$

(c)  $f(x) = \frac{1}{6 - x - x^2}$

(d)  $f(x) = \frac{x - 1}{2x - x^2 - 2}$

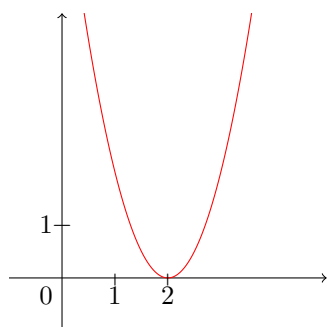
(e)  $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 3x - 4}$

(f)  $f(x) = \frac{4}{x^2 + 3} - \frac{1}{x}$

(g)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

**Correction.** (de (a), (b), (c) et (e) uniquement)

- (a)  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$  (une fonction polynomiale est toujours définie sur  $\mathbb{R}$ ). On a vu dans l'Exercice 1 que  $f(x) = 2x^2 - 8x + 8 = 2(x - 2)^2$ . Le seul zéro de  $f$  est donc  $x = 2$ .



La fonction  $f$  est toujours  $\geq 0$  (même signe que 2).

- (b) On a  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x = x(x^2 - 4x + 5)$ . La fonction  $f$  est une fonction polynomiale, donc  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ . Le discriminant de  $x^2 - 4x + 5$  est  $\Delta = 4^2 - 4 \times 5 = -4 < 0$ , il n'y a donc pas de racines réelles et  $x^2 - 4x + 5$  est strictement positif pour tout  $x$ , donc  $f(x)$  est du signe de  $x$ .

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $x$	-	0	+
signe de $x^2 - 4x + 5$		+	
signe de $f(x)$	-	0	+

- (c) La quantité  $f(x)$  est du même signe que  $6 - x - x^2$ , les racines de ce polynôme sont les valeurs interdites pour  $f$ . Le discriminant de ce polynôme est  $(-1)^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25 > 0$ . Les deux racines sont  $-3$  et  $2$ . Le domaine de  $f$  est donc  $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$ .  $6 - x - x^2$  est du signe de  $a = -1$  à l'extérieur des racines et du signe de  $-a = 1$  entre les racines. D'où le tableau de signe :

$x$	$-\infty$	$-3$	$2$	$+\infty$	
signe de $6 - x - x^2$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
signe de $f(x)$	$-$		$+$		$-$

(d)  $f(x) = \frac{x-1}{2x-x^2-2}$

- (e) Travail préliminaire : on calcule les racines du polynôme  $x^2 - 3x - 4$  : on trouve que le discriminant vaut 25 et qu'il y a deux racines 4 et  $-1$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$4$	$+\infty$
signe de $x - 3$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$
signe de $x^2 - 3x - 4$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
signe de $f(x)$	$-$	$+$	$0$	$-$	$+$

(f)  $f(x) = \frac{4}{x^2+3} - \frac{1}{x}$

(g)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

*Exercice 4.* Soit  $f$  la fonction définie par l'expression  $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$ .

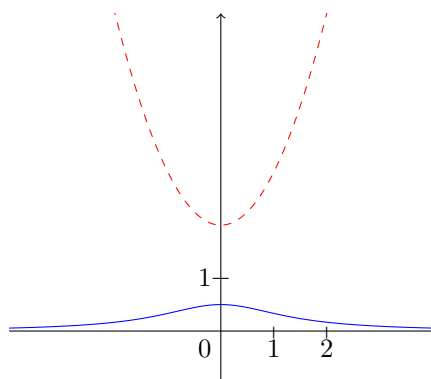
- Trouvez  $\text{dom}(f)$ , les zéros de  $f$ , et le signe de  $f(x)$  pour tout  $x$ .
- Montrez que  $0 < f(x) \leq 1/2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Trouvez les  $x$  qui satisfont  $f(x) = 1/2$ .
- Dessinez le graphe de  $y = x^2 + 2$  en pointillés. Dessinez le graphe de  $f$  en tenant compte du fait que quand le dénominateur de  $f$  grandit,  $f$  diminue.
- Dessinez la droite  $y = 1/5$  et trouvez tous les  $x$  qui satisfont  $f(x) = 1/5$ .
- Trouvez tous les  $x$  qui satisfont  $f(x) = \frac{1}{3x}$ . Esquissez le graphe de  $y = \frac{1}{3x}$  et montrez les points d'intersection des deux graphes.
- Déterminez le signe de  $f(x) - \frac{1}{3x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Vérifiez que votre dessin en (e) respecte l'information que vous venez de trouver.

**Correction.**

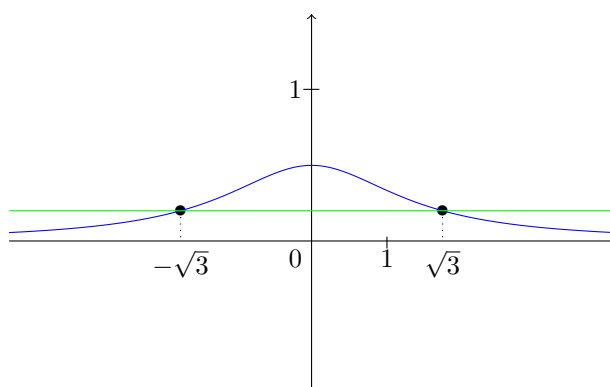
- On a  $x^2 + 2 \geq 2$  pour tout  $x$ , donc ne s'annule jamais, le domaine de  $f$  est donc  $\mathbb{R}$  et  $f(x) > 0$  pour tout  $x$  (en particulier ne s'annule pas).
- On a vu que  $f(x) > 0$  pour tout  $x$ . Pour la deuxième inégalité, on résout l'inéquation

$$\begin{aligned}
 f(x) \leq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+2} \leq \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 2 \geq 2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

qui est vraie pour tout  $x$  avec égalité si et seulement si  $x = 0$ , donc on a bien  $0 < f(x) \leq 1/2$  pour tout  $x$ .



(c)



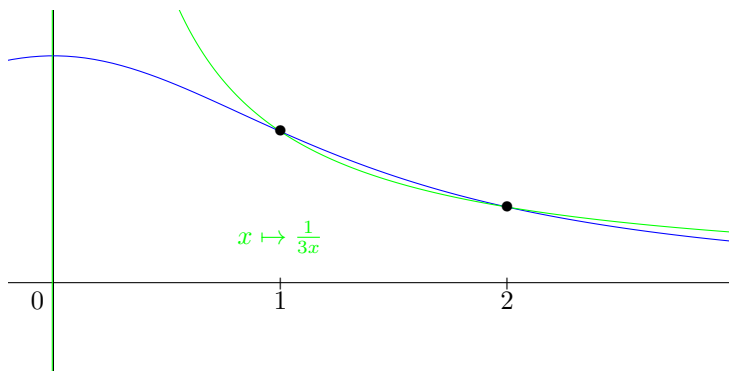
(d) On résout l'équation  $f(x) = 1/5$ . On a

$$\begin{aligned} f(x) = 1/5 &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 2} = \frac{1}{5} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2 = 5 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

(e) On résout l'équation :

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{3x} &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 2} = \frac{1}{3x} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2 = 3x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant vaut  $1 > 0$ , donc on a deux racines, 1 et 2.



Abscisses des points d'intersection des deux graphes = abscisses  $x$  vérifiant  $f(x) = 1/(3x)$ .

- (f) On fait le tableau de signe de la fonction  $x \mapsto f(x) - \frac{1}{3x}$ .  
Travail préliminaire :

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{3x} &= \frac{1}{x^2 + 2} - \frac{1}{3x} \\ &= \frac{3x - (x^2 + 2)}{3x(x^2 + 2)} = -\frac{x^2 - 3x + 2}{3x(x^2 + 2)}. \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
signe de $-(x^2 - 3x + 2)$	-	-	0	+	-
signe de $3x$	-	0	+	+	+
signe de $x^2 + 2$	+	+	+	+	+
signe de $f(x) - \frac{1}{3x}$	+	-	0	+	-

Géométriquement,  $f(x) - 1/(3x) > 0$  signifie que la courbe représentative de  $f$  est au-dessus de celle de la fonction  $x \mapsto 1/(3x)$  au point  $x$ .

*Exercice 5.* Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2 - 3$ .

- (a) Calculez l'équation de la sécante associée au taux de variation moyen de  $f$  sur  $[1, 2]$ .  
(b) En déduire le taux de variation moyen de  $f$  sur  $[1, 2]$ .

**Correction.**

- (a) Le taux de variation moyen de  $f$  sur  $[1, 2]$  est la pente de la droite passant par les points  $(1, f(1)) = (1, -2)$  et  $(2, f(2)) = (2, 1)$ . On note  $y = ax + b$  son équation. Le coefficient directeur  $a$  se calcule par la formule

$$a = \frac{1 - (-2)}{2 - 1} = 3.$$

Pour trouver  $b$ , on utilise le fait que le point  $(x, y) = (1, -2)$  doit vérifier l'équation de la droite, c'est-à-dire  $-2 = a \times 1 + b$ , ce qui conduit à  $b = -5$ . L'équation de la sécante est  $y = 3x - 5$ .

- (b) Le taux de variation moyen est par définition la pente de la sécante précédente, donc il vaut 3.

*Exercice 6.* Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 3x^2 - 5$ .

- (a) Calculez le taux de variation moyen de  $f$  sur  $[2, 3]$ .  
 (b) Donnez l'expression du taux de variation instantané de  $f$  en  $x = 3$  (en fonction de  $h$ ).  
 (c) Donnez une estimation du taux de variation instantané en  $x = 3$  avec  $h = 0.001$ .

**Correction.**

- (a) Le taux de variation moyen de  $f$  sur  $[2, 3]$  est donné par la formule

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = 22 - 7 = 15.$$

- (b) On utilise la formule du cours. Le taux de variation instantané en 3 vaut

$$\begin{aligned} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \frac{(3(3+h)^2 - 5) - 22}{h} = \frac{(3(9 + 6h + h^2) - 27)}{h} \\ &= \frac{27 + 18h + 3h^2 - 27}{h} \\ &= 18 + 3h. \end{aligned}$$

- (c) En utilisant l'expression précédente avec  $h = 0.001$  on trouve 18.003.

*Exercice 7.* Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ .

- (a) Calculez le taux de variation moyen de  $f$  sur  $[1, 2]$ .  
 (b) Donnez l'expression du taux de variation instantané de  $f$  en  $x = 0$  (en fonction de  $h$ ).

**Correction.**

- (a) Le taux de variation moyen de  $f$  sur  $[1, 2]$  vaut

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{6}.$$

- (b) D'après la formule du cours on a

$$\begin{aligned} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \left( \frac{1}{1+h} - \frac{1+h}{1+h} \right) \times \frac{1}{h} \\ &= \frac{-h}{1+h} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{1+h}. \end{aligned}$$