

MAT 1739 - Cours 9

Variations et extrema d'une fonction

Automne 2019

Table des matières

1 Fonctions croissantes et décroissantes	1
1.1 Définitions	1
1.2 Lien avec la dérivée	2
1.3 Tableau de variations	2
1.4 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)	2
2 Maximum et minimum	3
2.1 Maximum et minimum globaux	3
2.2 Maximum et minimum locaux	3

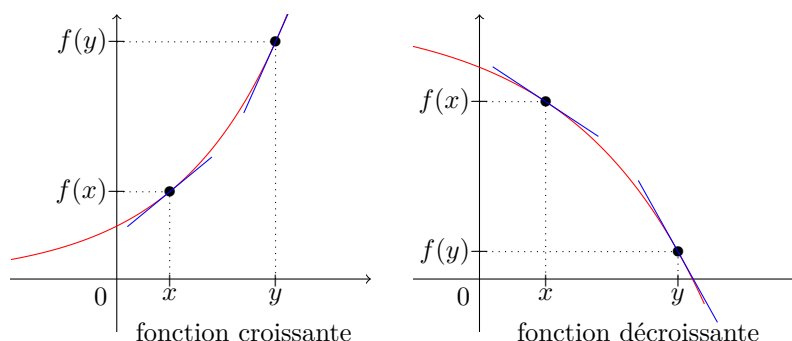
(cf cours 8 pour la correction de l'exo d'économie)

1 Fonctions croissantes et décroissantes

1.1 Définitions

Définition 1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . On dit que f est

- une *fonction croissante* si pour tous $x, y \in I$, si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$,
- une *fonction strictement croissante* si pour tous $x, y \in I$, si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$,
- une *fonction décroissante* si pour tous $x, y \in I$, si $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$,
- une *fonction strictement décroissante* si pour tous $x, y \in I$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.



Remarque. On remarque que lorsque f est croissante, les tangentes à la courbe ont une pente positive, alors que lorsque f est décroissante, les pentes des tangentes à la courbe sont négatives (en bleu sur le dessin). Rappelons que si f est dérivable en un point x , alors la pente de la tangente à la courbe au point $(x, f(x))$ est $f'(x)$.

1.2 Lien avec la dérivée

Proposition 2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (avec I intervalle ouvert de \mathbb{R}) une fonction dérivable. Alors

- (a) La fonction f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- (b) La fonction f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

Moralité : pour connaître les variations de f (c'est-à-dire où f croît et où f décroît), il suffit de connaître le signe de $f'(x)$.

1.3 Tableau de variations

Pour étudier les variations de f , il est pratique de dresser le tableau de signe de f' , puis d'en déduire le *tableau de variations* de f . Une variation croissante est symbolisée par une flèche droite dirigée vers le haut à droite, tandis qu'une variation décroissante est symbolisée par une flèche droite dirigée en bas à droite. Le cas d'une fonction constante sur un intervalle est éventuellement noté par une flèche horizontale dirigée vers la droite.

Exemple. Dressez le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 36x + 5$.

Méthode : On commence par dresser le tableau de signe de f' , puis on place les variations de f dans le même tableau sur une ligne supplémentaire. Il est convenient de placer également les limites de f et les valeurs aux points de changement de variation.

On a $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6) = 6(x - 2)(x + 3)$ (vous pouvez faire le calcul avec la formule vous-mêmes pour vous entraîner).

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
signe de $x - 2$		$-$	0	$+$
signe de $x + 3$	$-$	0	$+$	$+$
signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
variations de f	$-\infty$	86	-39	$+\infty$

Pour compléter le tableau, on a utilisé le fait que

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$,
- $f(-3) = 86$,
- $f(2) = -39$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

1.4 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Théorème (des valeurs intermédiaires). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$. Autrement dit, f atteint toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Exemple. En reprenant le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 36x + 5$, montrer que f possède une racine dans l'intervalle $[-3, 2]$.

La fonction f est continue. On a $f(-3) = 86$ et $f(2) = -39$. Le nombre 0 est compris entre -39 et 86 , donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI), il existe $c \in [-3, 2]$ tel que $f(c) = 0$.

2 Maximum et minimum

2.1 Maximum et minimum globaux

Définition 3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et $a \in I$.

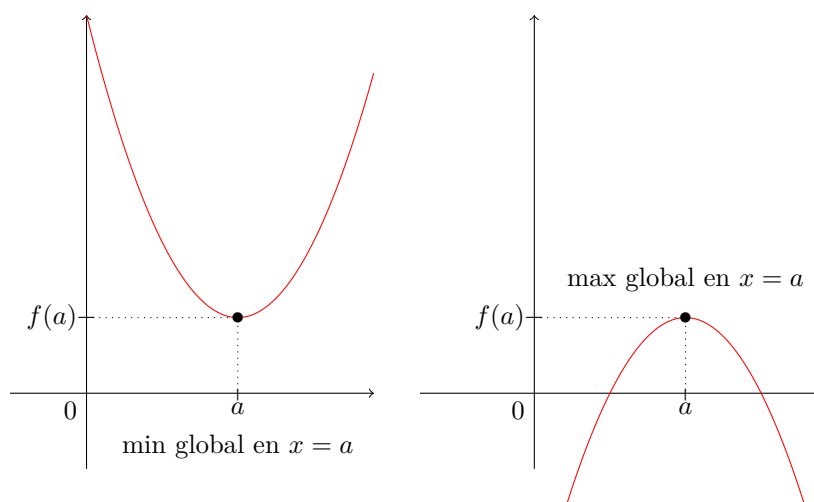
On dit que f admet un *maximum global* en a si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq f(a)$. Le maximum de f est alors $\max_{x \in I} f(x) = f(a)$.

On dit que f admet un *minimum global* en a si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq f(a)$. Le minimum de f est alors $\min_{x \in I} f(x) = f(a)$.

On dit que f admet un *extremum global* en a si f admet un maximum ou un minimum global en a .

Remarque. On parle parfois de maximum absolu (ou minimum absolu) à la place de maximum global (ou minimum global).

Exemple :



Graphiquement, si f admet un maximum global en $x = a$, cela signifie que tous les points de la courbe représentative de f sont en-dessous de la droite d'équation $y = f(a)$. De même, si f admet un minimum global en $x = a$, cela signifie que tous les points de la courbe représentative de f sont au-dessus de la droite d'équation $y = f(a)$.

Proposition 4. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur un intervalle $[a, b]$ **fermé**. Alors f possède un maximum et un minimum global.

Attention! Cette proposition est fausse si f n'est pas continue ou si l'intervalle considéré n'est pas fermé. Par exemple, la fonction $x \mapsto 1/x$ est continue sur l'intervalle $]0, 1]$ mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, donc cette fonction ne possède pas de maximum global!

2.2 Maximum et minimum locaux

Définition 5. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et $a \in I$ qui n'est pas l'une des borne de l'intervalle.

On dit que f admet un *maximum local* en a si pour tout $x \in I$ “assez proche de a ”, on a $f(x) \leq f(a)$.

On dit que f admet un *minimum local* en a si pour tout $x \in I$ “assez proche de a ”, on a $f(x) \geq f(a)$.

On dit que f admet un *extremum local* en a si f admet un maximum ou un minimum local en a .

Attention : Un extremum global n’est pas nécessairement un extremum local : c’est le cas s’il n’est pas situé sur l’une des extrémités de l’intervalle de définition de f .

Remarque. **Attention :** Un extremum local n’est pas toujours un extremum global. Voir par exemple la figure ci-dessous : le maximum local mis en évidence n’est pas un maximum global puisque certains points de la courbe sont au-dessus de la droite en pointillés.

