

# MAT 1739 - Cours 7

## Dérivées (Part II)

Automne 2019

### Table des matières

<b>2 Règles de dérivation</b>	<b>1</b>
2.1 Premières règles . . . . .	2
2.2 Dérivation des fonctions polynomiales . . . . .	2
2.3 Dérivation d'un produit . . . . .	2
2.4 Dérivation d'un quotient . . . . .	3
2.5 Dérivation en chaîne (dérivée de la composée) . . . . .	3

**Exemple.** Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Calculez  $f'$ .  
Soient  $x > 0$  et  $h \neq x$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left( \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{h} \left( \frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)} \right) \\ &= \frac{1}{h} \left( \frac{x - (x+h)}{x(x+h)} \right) \\ &= \frac{1}{h} \left( \frac{-h}{x(x+h)} \right) = -\frac{1}{x(x+h)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

On a donc  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  pour tout  $x > 0$ .

**Proposition 1.** Soit  $f$  une fonction dérivable au point  $a$ . Alors la tangente à la courbe de  $f$  au point  $(a, f(a))$  existe et a pour pente  $f'(a)$ . Son équation est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

En particulier, le TVI de  $f$  en  $a$  vaut  $f'(a)$ .

## 2 Règles de dérivation

Idee : avoir une boîte à outils pour pouvoir calculer les dérivées sans toujours passer par le calcul de  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ .

## 2.1 Premières règles

**Proposition 2.** Soient  $a, \lambda \in \mathbb{R}$  et  $f, g$  deux fonctions dérivables en  $a$ . Alors

- (a) La fonction  $f + g$  est dérivable en  $a$  et  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ .
- (b) La fonction  $x \mapsto \lambda f(x)$  est dérivable en  $a$  et  $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ .

**Justification de (a) :** Posons  $u = f + g$ . On a

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - (f(a) + g(a))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a+h) - f(a)) + (g(a+h) - g(a))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) + g'(a). \end{aligned}$$

**Exemple.** Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x^3$  et  $g(x) = \frac{1}{x}$ . On a vu que  $f'(x) = 3x^2$  et  $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

- (a) On pose  $h(x) = 10x^3 = 10f(x)$ . La dérivée de  $h$  est  $h'(x) = 10 \times 3x^2 = 30x^2$ .
- (b) On pose  $k(x) = f(x) + g(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ . On a  $k'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ .
- (c) On pose  $l(x) = 10f(x) + g(x) = 10x^3 + \frac{1}{x}$ . On a  $l'(x) = 10 \times 3x^2 - \frac{1}{x^2} = 30x^2 - \frac{1}{x^2}$ .

## 2.2 Dérivation des fonctions polynomiales

**Proposition 3.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f : x \mapsto x^n$ . Alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**Exemple.**

- (a) En particulier, la dérivée d'une fonction constante est égale à 0.
- (b) La dérivée de  $x \mapsto x^5$  est  $x \mapsto 5x^4$ .
- (c) En utilisant les règles vues précédemment, la dérivée de  $f : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 + 2$  est  $f'(x) = 2 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 0 = 6x^2 - 10x$  (on dérive terme à terme).

## 2.3 Dérivation d'un produit

**Proposition 4.** Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle de  $\mathbb{R}$ . Alors on a la formule

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

**Justification :** Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables en  $a \in \mathbb{R}$ . On pose  $f = uv$ . Alors

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h)) + (u(a)v(a+h) - u(a)v(a))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u(a+h) - u(a))v(a+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a)(v(a+h) - v(a))}{h} \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \right) \left( \lim_{h \rightarrow 0} v(a+h) \right) + u(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \\ &= u'(a)v(a) + u(a)v'(a) \end{aligned}$$

**Exemple.** Soit  $f$  définie par  $f(x) = (3x - 5)(x^2 + 1)$ . Avec la formule précédente, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underbrace{(3+0)}_{u'} \times \underbrace{(x^2+1)}_v + \underbrace{(3x-5)}_u \times \underbrace{(2x+0)}_v = 3x^2 + 3 + 3x \times 2x - 5 \times 2x \\ &= 9x^2 - 10x + 3. \end{aligned}$$

Vérification avec la dérivée d'un polynôme : on a  $f(x) = (3x - 5)(x^2 + 1) = 3x^3 - 5x^2 + 3x - 5$ , d'où

$$f'(x) = 3 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 3 - 0 = 9x^2 - 10x + 3.$$

## 2.4 Dérivation d'un quotient

**Proposition 5.** Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $v$  ne s'annule pas. Alors on a la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

En particulier,

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

**Justification pour  $\left(\frac{1}{v}\right)'$  :** On utilise la formule générale en prenant  $u$  la fonction constante égale à 1. On a  $u' = 0$  et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{0 \times v - 1 \times v'}{v^2} = -\frac{v'}{v^2}.$$

**Exemple.** Soit  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Alors on a

$$f'(x) = -\frac{(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2},$$

c'est bien ce qu'on avait calculé.

**Proposition 6.** D'une manière générale, la dérivée de  $f : x \mapsto x^n$  est

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Q}).$$

On avait vu cette formule pour  $n \in \mathbb{N}$ . Par exemple, on retrouve les dérivées de  $x \mapsto 1/x$  et  $x \mapsto \sqrt{x}$  en écrivant  $1/x = x^{-1}$  et  $\sqrt{x} = x^{1/2}$ .

**Exemple.** Soit  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$  (pour  $x > 0$ ). Alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+3)'\sqrt{x} - (x+3)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x} - (x+3)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{\frac{2\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{x+3}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{\frac{2x - (x+3)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

## 2.5 Dérivation en chaîne (dérivée de la composée)

**Rappels :** Soient  $g : A \rightarrow B$  et  $f : B \rightarrow C$  deux fonctions. On appelle *composée de  $f$  et  $g$* , notée  $f \circ g$ , la fonction  $f \circ g : A \rightarrow C$  définie par

$$f \circ g(x) = f(g(x)) \quad (x \in A).$$

**Exemple.** Soient  $f, g$  définies par  $f(x) = x + 2$  et  $g(x) = x^2 + 1$ . Alors

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1) + 2 = x^2 + 3$$

et

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(x + 2) \\ &= (x + 2)^2 + 1 \\ &= x^2 + 4x + 4 + 1 \\ &= x^2 + 4x + 5. \end{aligned}$$

**Proposition 7.** Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables telles que la composée  $u \circ v$  soit définie. Alors

$$(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x)).$$

**Exemple.** Trouvez la dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = (2x + 3)^5$ .

On a  $f(x) = u \circ v(x)$  avec  $u(x) = x^5$  et  $v(x) = 2x + 3$ . On a  $u'(x) = 5x^4$  et  $v'(x) = 2$ . En utilisant la formule, on trouve

$$f'(x) = \underbrace{2}_{v'(x)} \times \underbrace{5(2x + 3)^4}_{u'(v(x))} = 10(2x + 3)^4.$$