

MAT 1739 - Cours 10

Fin Variations et extrema d'une fonction + concavité

Automne 2019

Table des matières

0.3	Dérivée et points critiques	1
1	Concavité et test de la dérivée seconde	2
1.1	Définitions	2
1.2	Test de la dérivée seconde	3
2	Esquisser le graphe d'une fonction	4

Fin cours variations et extrema

0.3 Dérivée et points critiques

Définition 1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} . Un point critique de f est un nombre $x \in I$ tel que f soit dérivable en x et $f'(x) = 0$.

Exemple. Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$. Déterminez les points critiques de f .

On a $f'(x) = 2x - 4$. On résout l'équation $f'(x) = 0$. On a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Le seul point critique de f est $x = 2$.

Proposition 2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x \in I$ un point où f est dérivable. Si x est un extremum local de la fonction f , alors x est un point critique.

Moralité : pour trouver les extrémaux locaux de f , il suffit de regarder les points où f n'est pas dérivable et les points critiques.

Proposition 3. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors f atteint son maximum global (resp. son minimum global) en un point critique ou en l'une des extrémités de l'intervalle $[a, b]$.

Exemple. Déterminez le maximum et le minimum global de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 12x - 3$ sur l'intervalle $[-3, 4]$.

Méthode : Un extremum global de f est soit l'une des extrémités de l'intervalle, soit un extremum local. Comme f est dérivable, les extrema locaux sont des points critiques. On commence donc par chercher les points critiques. On a

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2).$$

Les points critiques de f sont les x tels que $f'(x) = 0$, il n'y a que $x = 2$ et $x = -2$.
On examine maintenant les valeurs de f aux points critiques ET aux extrémités de l'intervalle.

- $f(-3) = (-3)^3 - 12 \times (-3) - 3 = -27 + 36 - 3 = 6$
- $f(-2) = (-2)^3 - 12 \times (-2) - 3 = -8 + 24 - 3 = 13$
- $f(2) = 2^3 - 12 \times 2 - 3 = 8 - 24 - 3 = -19$
- $f(4) = 4^3 - 12 \times 4 - 3 = 64 - 48 - 3 = 13$

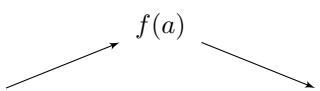
Le maximum global de f vaut 13, il est réalisé aux points $x = -2$ et $x = 4$. Le minimum global de f vaut -19 , il est réalisé au point $x = 2$.

Attention ! Un point critique n'est pas toujours un extremum local (voir DGD).

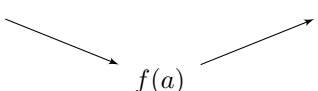
La proposition suivante permet de classer les points critiques si f est suffisamment régulière.

Proposition 4. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et a un point critique de f (on a donc $f'(a) = 0$). Si f' change de signe en passant par a , alors a est un extremum local. De plus

- Si $f'(x) \geq 0$ pour $x < a$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x > a$, alors a est un maximum local.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour $x < a$ et $f'(x) \geq 0$ pour $x > a$, alors a est un minimum local.

x	a
signe de $f'(x)$	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="margin-right: 10px;">+</div> <div style="border-left: 1px dotted black; width: 1px; height: 20px; margin: 0 5px;"></div> <div style="margin-left: 10px;">-</div> </div>
variations de f	<div style="text-align: center;"> $f(a)$  </div>

Maximum local

x	a
signe de $f'(x)$	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="margin-right: 10px;">-</div> <div style="border-left: 1px dotted black; width: 1px; height: 20px; margin: 0 5px;"></div> <div style="margin-left: 10px;">+</div> </div>
variations de f	<div style="text-align: center;"> $f(a)$  </div>

Minimum local

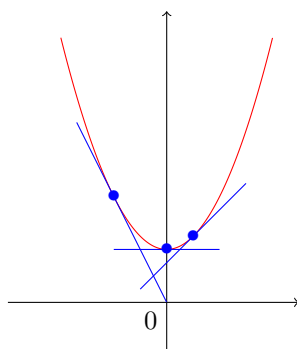
1 Concavité et test de la dérivée seconde

1.1 Définitions

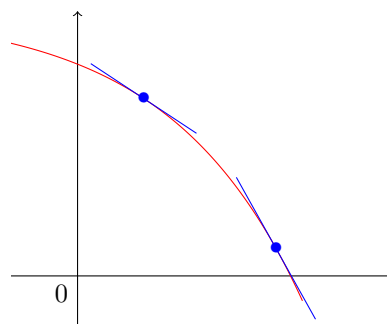
Définition 5. Soient $a < b$ et f définie et deux fois dérivable sur $]a, b[$.

- Le graphe de f est *concave vers le haut* sur l'intervalle $]a, b[$ si toutes les tangentes dans cet intervalle se trouvent sous la courbe. La dérivée seconde f'' est positive sur cet intervalle, c'est-à-dire qu'on a $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$.
- Le graphe de f est *concave vers le bas* sur l'intervalle $]a, b[$ si toutes les tangentes dans cet intervalle se trouvent au-dessus la courbe. La dérivée seconde f'' est négative sur cet intervalle, c'est-à-dire qu'on a $f''(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

Exemple. Le dessin de gauche est le graphe de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$. On a $f''(x) = 2 > 0$ pour tout x .

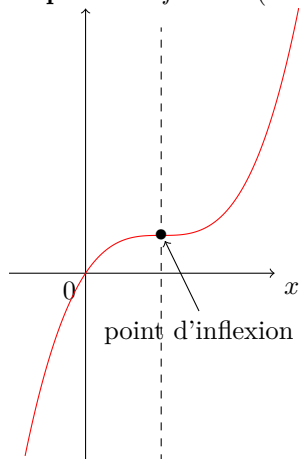


Concavité vers le haut
 $f''(x) > 0$ pour tout x



Concavité vers le bas
 $f''(x) < 0$ pour tout x

Exemple. Soit $f : x \mapsto (x - 1)^3 + 1$. On a $f''(x) = 6(x - 1)$.

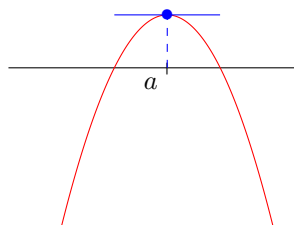
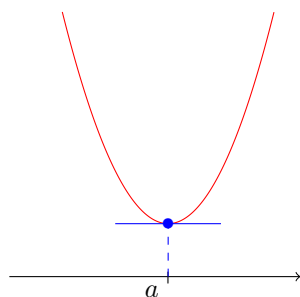


Attention ! La condition $f''(x) = 0$ n'implique pas forcément que x est un point d'inflexion. Par exemple en prenant $f : x \mapsto x^4$, on a $f''(x) = 12x^2 \geq 0$, donc le graphe de f a toujours une concavité vers le haut alors que $f''(0) = 0$.

1.2 Test de la dérivée seconde

Proposition 7. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I et $a \in I$. Alors

- (a) Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f a un minimum local en a .
 (b) Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f a un maximum local en a .
 (c) Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) = 0$, on ne peut pas conclure : il faut étudier le changement de signe de f' en a pour voir si on a un extremum local en a .
 (d) Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) = 0$ et f'' change de signe en a , alors a est un point d'inflexion.



$f''(a) > 0$ (Concavité vers le haut)	$f''(a) < 0$ (Concavité vers le bas)
minimum local	maximum local

3

Solution

On calcule f'' et on dresse son tableau de signes. On a $f'(x) = 4x^3 - 12x$ et $f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x - 1)(x + 1)$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
signe de $f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Le graphe de f est concave vers le haut sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$, et est concave vers le bas sur l'intervalle $] -1, 1[$. Les points de changement de concavité sont -1 et 1 : ce sont les deux points d'inflexion de la courbe de f .

2 Esquisser le graphe d'une fonction

On peut distinguer plusieurs étapes pour dessiner "à la main" le graphe d'une fonction f qu'on suppose deux fois dérivable sur son domaine de définition.

- (1) Déterminer le domaine de f .
- (2) Déterminer les symétries :
 - La fonction est-elle *paire* (c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$ pour tout x) ? Si oui, le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
 - La fonction est-elle *impaire* (c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$ pour tout x) ? Si oui, le graphe est symétrique par rapport à l'origine (symétrie centrale).
- (3) Déterminer les asymptotes à la courbe (horizontales, verticales, obliques)
- (4) Si possible, déterminer les x tels que $f(x) = 0$ et calculer $f(0)$.
- (5) Dresser le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f (donne notamment les extrema locaux).
- (6) Déterminer les points d'inflexion de la courbe et les intervalles de concavité.
- (7) Dernière étape : esquisser le graphe à la main.

Exemple. Esquissez le graphe de la fonction $f : x \mapsto x^3 + 6x^2 + 9x$.