

- Il n'y a pas cours la semaine prochaine.
- Le deuxième examen de mi-session est le mardi 30 octobre, dans cette classe.
- Arrivez à l'heure, il n'y aura pas de temps supplémentaire ajouté.
- Les calculatrices, appareils électroniques et formulaires sont interdits.
- Apportez votre carte d'étudiant.
- L'examen portera sur les cours 1 à 11.

# Objectif pour aujourd'hui

On sait que l'ensemble des solutions d'un système homogène  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  a l'allure d'un point, d'une droite, d'un plan, . . . qui passe par l'origine.

# Objectif pour aujourd'hui

On sait que l'ensemble des solutions d'un système homogène  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  a l'allure d'un point, d'une droite, d'un plan, ... qui passe par l'origine.

On veut comprendre ces objets intrinsèquement (indépendamment d'un système linéaire).

## Définition

Un sous-ensemble  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  est un **sous-espace** de  $\mathbb{R}^n$  si

- 1 le vecteur nul  $\mathbf{0}$  est dans  $H$ ,
- 2 si les vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  sont dans  $H$ , il en est de même pour  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ ,
- 3 si  $k$  est un scalaire et  $\mathbf{v}$  un vecteur de  $H$ , alors  $k\mathbf{v}$  est aussi dans  $H$ .

## Définition

Un sous-ensemble  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  est un **sous-espace** de  $\mathbb{R}^n$  si

- 1  $\mathbf{0} \in H$
- 2  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in H$
- 3  $k \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{v} \in H \Rightarrow k\mathbf{v} \in H$

## Définition

Un sous-ensemble  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  est un **sous-espace** de  $\mathbb{R}^n$  si

- 1  $\mathbf{0} \in H$
- 2  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in H$
- 3  $k \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{v} \in H \Rightarrow k\mathbf{v} \in H$

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas satisfaite, alors  $H$  n'est pas un sous-espace.

## Définition

Un sous-ensemble  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  est un **sous-espace** de  $\mathbb{R}^n$  si

- 1  $\mathbf{0} \in H$
- 2  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in H$
- 3  $k \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{v} \in H \Rightarrow k\mathbf{v} \in H$

## Exemple

L'ensemble  $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$  est-il un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ ?

## Définition

Un sous-ensemble  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  est un **sous-espace** de  $\mathbb{R}^n$  si

- 1  $\mathbf{0} \in H$
- 2  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in H$
- 3  $k \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{v} \in H \Rightarrow k\mathbf{v} \in H$

## Exemple

L'ensemble  $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$  est-il un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ ?

Solution: Non, car  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin H$ .

## Définition

Un sous-ensemble  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  est un **sous-espace** de  $\mathbb{R}^n$  si

- 1  $\mathbf{0} \in H$
- 2  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in H$
- 3  $k \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{v} \in H \Rightarrow k\mathbf{v} \in H$

## Exemple

L'ensemble  $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  est-il un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ ?

## Définition

Un sous-ensemble  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  est un **sous-espace** de  $\mathbb{R}^n$  si

- 1  $\mathbf{0} \in H$
- 2  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in H$
- 3  $k \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{v} \in H \Rightarrow k\mathbf{v} \in H$

## Exemple

L'ensemble  $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  est-il un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ ?

Solution: Non, car  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \in H$  mais  $2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \notin H$ .

## Définition

Un sous-ensemble  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  est un **sous-espace** de  $\mathbb{R}^n$  si

- 1  $\mathbf{0} \in H$
- 2  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in H$
- 3  $k \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{v} \in H \Rightarrow k\mathbf{v} \in H$

## Exemple

L'ensemble  $H = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} \mid t \text{ est un réel} \right\}$  est-il un sous-espace de  $\mathbb{R}^2$ ?

## Définition

Un sous-ensemble  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  est un **sous-espace** de  $\mathbb{R}^n$  si

- 1  $\mathbf{0} \in H$
- 2  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in H$
- 3  $k \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{v} \in H \Rightarrow k\mathbf{v} \in H$

## Exemple

L'ensemble  $H = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} \mid t \text{ est un réel} \right\}$  est-il un sous-espace de  $\mathbb{R}^2$ ?

Solution: Non, car  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in H$  ( $t = 1$ ) et  $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \in H$  ( $t = 2$ ) mais

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \notin H.$$

## Définition

Un sous-ensemble  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  est un **sous-espace** de  $\mathbb{R}^n$  si

- 1  $\mathbf{0} \in H$
- 2  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in H$
- 3  $k \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{v} \in H \Rightarrow k\mathbf{v} \in H$

## Exemple

L'ensemble  $H = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} \mid t \geq 0 \right\}$  est-il un sous-espace de  $\mathbb{R}^2$ ?

## Définition

Un sous-ensemble  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  est un **sous-espace** de  $\mathbb{R}^n$  si

- 1  $\mathbf{0} \in H$
- 2  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in H$
- 3  $k \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{v} \in H \Rightarrow k\mathbf{v} \in H$

## Exemple

L'ensemble  $H = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} \mid t \geq 0 \right\}$  est-il un sous-espace de  $\mathbb{R}^2$ ?

Solution: Non, car  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in H$  ( $t = 1$ ) mais  $-1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \notin H$ .

## Définition

Un sous-ensemble  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  est un **sous-espace** de  $\mathbb{R}^n$  si

- 1  $\mathbf{0} \in H$
- 2  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in H$
- 3  $k \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{v} \in H \Rightarrow k\mathbf{v} \in H$

## Exemple

L'ensemble  $H = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} \mid t \text{ est un réel} \right\}$  est-il un sous-espace de  $\mathbb{R}^2$ ?

## Exemple

L'ensemble  $H = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} \mid t \text{ est un réel} \right\}$  est-il un sous-espace de  $\mathbb{R}^2$ ?

Solution: Oui:

- 1 En choisissant  $t = 0$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  est dans  $H$ .

## Exemple

L'ensemble  $H = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} \mid t \text{ est un réel} \right\}$  est-il un sous-espace de  $\mathbb{R}^2$ ?

Solution: Oui:

① En choisissant  $t = 0$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  est dans  $H$ .

② En considérant  $\begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} s \\ 2s \end{bmatrix}$  dans  $H$  (pour des scalaires  $t, s$ ),

$$\begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ 2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + s \\ 2t + 2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + s \\ 2(t + s) \end{bmatrix} \text{ est aussi dans } H.$$

## Exemple

L'ensemble  $H = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} \mid t \text{ est un réel} \right\}$  est-il un sous-espace de  $\mathbb{R}^2$ ?

Solution: Oui:

① En choisissant  $t = 0$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  est dans  $H$ .

② En considérant  $\begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} s \\ 2s \end{bmatrix}$  dans  $H$  (pour des scalaires  $t, s$ ),

$$\begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ 2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + s \\ 2t + 2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + s \\ 2(t + s) \end{bmatrix} \text{ est aussi dans } H.$$

③ En considérant  $\begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}$  dans  $H$  (pour un scalaire  $t$ ) et  $k \in \mathbb{R}$ , le

$$\text{vecteur } k \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kt \\ k2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kt \\ 2(kt) \end{bmatrix} \text{ est dans } H.$$

## Exemple

L'ensemble  $H = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  est-il un sous-espace de  $\mathbb{R}^2$ ?

## Exemple

L'ensemble  $H = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  est-il un sous-espace de  $\mathbb{R}^2$ ?

Solution: Oui:

①  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  est dans  $H$ .

②  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  est dans  $H$ .

③ Pour un scalaire  $k$ , le vecteur  $k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  est dans  $H$ .

On a vu que

$$\left\{ \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} \mid t \text{ est un réel} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

et

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

sont des sous-espaces de  $\mathbb{R}^2$ .

On a vu que

$$\left\{ \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} \mid t \text{ est un réel} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

et

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

sont des sous-espaces de  $\mathbb{R}^2$ .

Plus généralement,

## Fait

Soient  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  est un sous-espace  $\mathbb{R}^n$ .

## Fait

Soient  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  est un sous-espace  $\mathbb{R}^n$ .

Explication:

## Fait

Soient  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  est un sous-espace  $\mathbb{R}^n$ .

Explication:

- ①  $\mathbf{0}$  est dans  $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  puisque  $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + \dots + 0\mathbf{v}_m$ .

## Fait

Soient  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  est un sous-espace  $\mathbb{R}^n$ .

Explication:

- ①  $\mathbf{0}$  est dans  $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  puisque  $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + \dots + 0\mathbf{v}_m$ .
- ② Considérons  $c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_m\mathbf{v}_m$  et  $d_1\mathbf{v}_1 + \dots + d_m\mathbf{v}_m$  deux vecteurs de  $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ . Alors,

$$\begin{aligned}(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_m\mathbf{v}_m) + (d_1\mathbf{v}_1 + \dots + d_m\mathbf{v}_m) \\= c_1\mathbf{v}_1 + d_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_m\mathbf{v}_m + d_m\mathbf{v}_m \\= (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (c_m + d_m)\mathbf{v}_m\end{aligned}$$

est aussi dans  $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ .

## Fait

Soient  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  est un sous-espace  $\mathbb{R}^n$ .

Explication:

- 1  $\mathbf{0}$  est dans  $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  puisque  $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + \dots + 0\mathbf{v}_m$ .
- 2 Considérons  $c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_m\mathbf{v}_m$  et  $d_1\mathbf{v}_1 + \dots + d_m\mathbf{v}_m$  deux vecteurs de  $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ . Alors,

$$\begin{aligned}(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_m\mathbf{v}_m) + (d_1\mathbf{v}_1 + \dots + d_m\mathbf{v}_m) \\= c_1\mathbf{v}_1 + d_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_m\mathbf{v}_m + d_m\mathbf{v}_m \\= (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (c_m + d_m)\mathbf{v}_m\end{aligned}$$

est aussi dans  $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ .

- 3 Considérons  $c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_m\mathbf{v}_m$  un vecteur de  $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  et  $k$  un scalaire. Alors,

$$k(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_m\mathbf{v}_m) = kc_1\mathbf{v}_1 + \dots + kc_m\mathbf{v}_m$$

est aussi dans  $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ .

## Exemple

Est-ce que  $H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x + 2y - z = 0 \right\}$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ ?

## Exemple

Est-ce que  $H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x + 2y - z = 0 \right\}$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ ?

Solution:  $x + 2y - z = 0$  est un système linéaire homogène. Sa solution générale est  $x = -2y + z$  avec  $y$  et  $z$  des variables libres.

## Exemple

Est-ce que  $H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x + 2y - z = 0 \right\}$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ ?

Solution:  $x + 2y - z = 0$  est un système linéaire homogène. Sa solution générale est  $x = -2y + z$  avec  $y$  et  $z$  des variables libres. Donc

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y + z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Exemple

Est-ce que  $H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x + 2y - z = 0 \right\}$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ ?

Solution:  $x + 2y - z = 0$  est un système linéaire homogène. Sa solution générale est  $x = -2y + z$  avec  $y$  et  $z$  des variables libres. Donc

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y + z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Et donc  $H = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$  et  $H$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  par le

fait précédant.

## Exemple

Est-ce que  $H = \left\{ \begin{bmatrix} b - c \\ a + 2b \\ b + c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ ?

## Exemple

Est-ce que  $H = \left\{ \begin{bmatrix} b - c \\ a + 2b \\ b + c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ ?

Solution: Un vecteur de  $H$  peut être écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} b - c \\ a + 2b \\ b + c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Exemple

Est-ce que  $H = \left\{ \begin{bmatrix} b - c \\ a + 2b \\ b + c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ ?

Solution: Un vecteur de  $H$  peut être écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} b - c \\ a + 2b \\ b + c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donc  $H = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$  et  $H$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  par

le fait précédent.

## Exemple

Est-ce que  $\mathbb{R}^5$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^5$ ?

## Exemple

Est-ce que  $\mathbb{R}^5$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^5$ ?

Solution: Évidemment oui! On peut facilement vérifier les trois conditions de la définition ou écrire  $\mathbb{R}^5$  comme

$$\mathbb{R}^5 = \text{Vect} \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \end{array} \right)$$

## Définition

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ . L'**espace colonne** de  $A$  est le sous-espace de  $\mathbb{R}^m$  engendré par les colonnes de  $A$ . On le note  $\text{Col}(A)$  (ou  $\text{Im}(A)$ ).

## Définition

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ . L'**espace colonne** de  $A$  est le sous-espace de  $\mathbb{R}^m$  engendré par les colonnes de  $A$ . On le note  $\text{Col}(A)$  (ou  $\text{Im}(A)$ ).

Si  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ , alors  $\text{Col}(A) = \text{Vect}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ .

## Définition

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ . L'**espace colonne** de  $A$  est le sous-espace de  $\mathbb{R}^m$  engendré par les colonnes de  $A$ . On le note  $\text{Col}(A)$  (ou  $\text{Im}(A)$ ).

Si  $A = [\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$ , alors  $\text{Col}(A) = \text{Vect}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ .

Le vecteur  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  est dans  $\text{Col}(A)$  si et seulement si  $\mathbf{b} \in \text{Vect}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ . De manière équivalente,  $\mathbf{b} \in \text{Col}(A)$  si et seulement si le système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  est compatible.

## Exemple

Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ . Est-ce que  $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  est dans  $\text{Col}(A)$ ?

## Exemple

Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ . Est-ce que  $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  est dans  $\text{Col}(A)$ ?

Solution:

## Exemple

Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ . Est-ce que  $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  est dans  $\text{Col}(A)$ ?

Solution: Non.

## Définition

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ . Le **noyau** (ou **espace nul**) de  $A$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  qui contient tous les vecteurs  $\mathbf{x}$  tels que  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . On le note  $\text{Null}(A)$  (ou  $\text{Ker}(A)$ ).

## Définition

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ . Le **noyau** (ou **espace nul**) de  $A$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  qui contient tous les vecteurs  $\mathbf{x}$  tels que  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . On le note  $\text{Null}(A)$  (ou  $\text{Ker}(A)$ ).

$$\text{Null}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

## Définition

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ . Le **noyau** (ou **espace nul**) de  $A$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  qui contient tous les vecteurs  $\mathbf{x}$  tels que  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . On le note  $\text{Null}(A)$  (ou  $\text{Ker}(A)$ ).

$$\text{Null}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

## Fait

Si  $A$  est une matrice  $m \times n$ , alors  $\text{Null}(A)$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ .

## Fait

Si  $A$  est une matrice  $m \times n$ , alors  $\text{Null}(A)$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ .

Explication:

- ①  $\mathbf{0} \in \text{Null}(A)$  puisque  $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

## Fait

Si  $A$  est une matrice  $m \times n$ , alors  $\text{Null}(A)$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ .

Explication:

- 1  $\mathbf{0} \in \text{Null}(A)$  puisque  $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .
- 2 Si  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  sont dans  $\text{Null}(A)$ , alors  $A\mathbf{v} = A\mathbf{w} = \mathbf{0}$  et

$$A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = A\mathbf{v} + A\mathbf{w} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Cela veut dire que  $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \text{Null}(A)$ .

## Fait

Si  $A$  est une matrice  $m \times n$ , alors  $\text{Null}(A)$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ .

Explication:

- 1  $\mathbf{0} \in \text{Null}(A)$  puisque  $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .
- 2 Si  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  sont dans  $\text{Null}(A)$ , alors  $A\mathbf{v} = A\mathbf{w} = \mathbf{0}$  et

$$A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = A\mathbf{v} + A\mathbf{w} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Cela veut dire que  $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \text{Null}(A)$ .

- 3 Si  $\mathbf{v}$  est dans  $\text{Null}(A)$  et  $k$  est un scalaire, alors  $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$  et donc

$$A(k\mathbf{v}) = k(A\mathbf{v}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Cela signifie que  $k\mathbf{v} \in \text{Null}(A)$ .

## Fait

Si  $A$  est une matrice  $m \times n$ , alors  $\text{Null}(A)$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ .

Cela veut dire que l'ensemble des solutions d'un système linéaire *homogène* est toujours un sous-espace. En particulier, une droite ou un plan qui passe par l'origine est un sous-espace.

## Fait

Si  $A$  est une matrice  $m \times n$ , alors  $\text{Null}(A)$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ .

Cela veut dire que l'ensemble des solutions d'un système linéaire *homogène* est toujours un sous-espace. En particulier, une droite ou un plan qui passe par l'origine est un sous-espace.

Cependant, l'ensemble des solutions d'un système non-homogène  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  où  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  n'est pas un sous-espace. En effet,  $\mathbf{0}$  n'y appartient pas.

## Fait

Si  $A$  est une matrice  $m \times n$ , alors  $\text{Null}(A)$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ .

Cela veut dire que l'ensemble des solutions d'un système linéaire *homogène* est toujours un sous-espace. En particulier, une droite ou un plan qui passe par l'origine est un sous-espace.

Cependant, l'ensemble des solutions d'un système non-homogène  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  où  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  n'est pas un sous-espace. En effet,  $\mathbf{0}$  n'y appartient pas. En particulier, une droite ou un plan qui ne passe pas par l'origine n'est pas un sous-espace.

## Théorème

Soit  $H$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . Les énoncés suivants sont équivalents:

- $H$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ .
- Il existe des vecteurs  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$  dans  $\mathbb{R}^n$  tels que  $H = \text{Vect}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$ .
- Il existe une matrice  $A$  de taille  $n \times p$  telle que  $H = \text{Col}(A)$ .
- Il existe une matrice  $B$  de taille  $m \times n$  telle que  $H = \text{Null}(B)$ .
- $H$  est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.