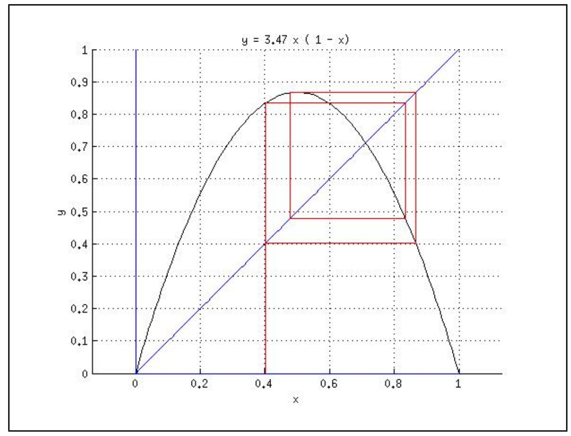
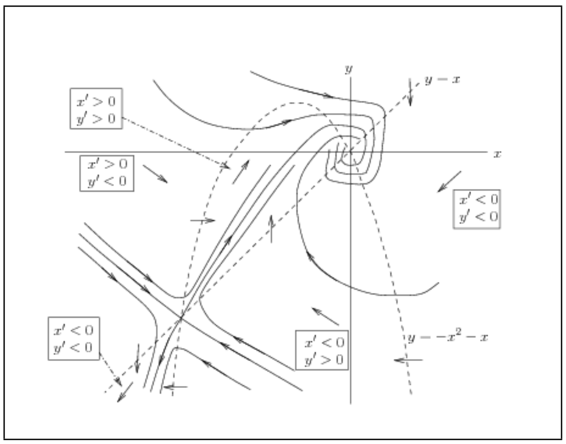




Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie I – MAT1730

2^e édition

Exercises

Benoit Dionne
Université d'Ottawa

[1]

Les fonctions | 1

1.1 Exercices

Question 1.1

Question 1.2

Solution:
Puisque $\cos(t) = -\cos(t - \pi)$, on peut écrire

$$f(t) = 2 - \cos(t) = 2 + \cos(t - \pi) = M + A\cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - T)\right)$$

avec $M = 2$, $A = 1$, $P = 2\pi$ et $T = \pi$.

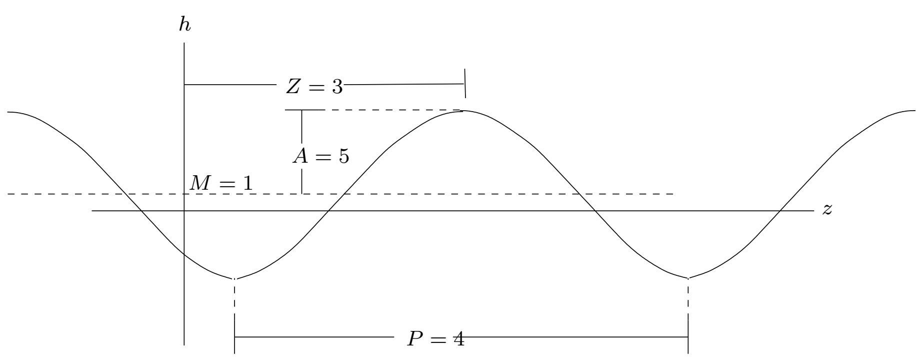
Question 1.3

Solution:
a) L'amplitude est $(9 - (-1))/2 = 5$. La moyenne est $(9 + (-1))/2 = 4$. La période est 2. La phase est 0.

a) L'amplitude est $(8 - (-2))/2 = 5$. La moyenne est $(8 + (-2))/2 = 3$. La période est 2. La phase est 0.5.

Question 1.4

Solution:



$$y = h(z) = M + A\ \cos\left(\frac{2\pi}{P}(z - Z)\right) = 1 + 5\cos\left(\frac{\pi z}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)$$

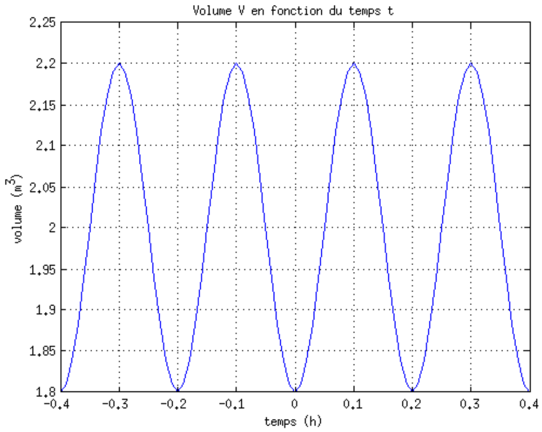


FIGURE 1.1 – La figure pour la question 6

Question 1.5

Solution:
On a

$$g(t) = 2.0 + \sin(t) = 2.0 + \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 2.0 + \cos\left(\frac{2\pi}{2\pi}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= M + A\ \cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - T)\right) \ ,$$

où $M = 2$ est la moyenne, $A = 1$ est l'amplitude, $P = 2\pi$ est la période et $T = \dfrac{\pi}{2}$ est la phase.

Question 1.6

Solution:
La valeur maximale de V est 2.2 et la valeur minimale est 1.8. Ainsi la moyenne est $M = \dfrac{2.2 + 1.8}{2} = 2$ et l'amplitude $A = \dfrac{2.2 - 1.8}{2} = 0.2$. La période est donnée par la distance entre deux points consécutifs où V atteint son maximum. Donc, la période est 0.2. La phase est la plus petite valeur positive de t où V atteint son maximum. Dans le cas présent, c'est à $t = 0.1$. Donc la phase est $T = 0.1$. Finalement, V est la fonction sinusoïdale

$$V(t) = M + A\ \cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - T)\right) = 2 + 0.2\ \cos\left(\frac{2\pi}{0.2}(t - 0.1)\right)$$
$$= 2 + 0.2\ \cos(10\pi\, t - \pi) \ .$$

Question 1.7

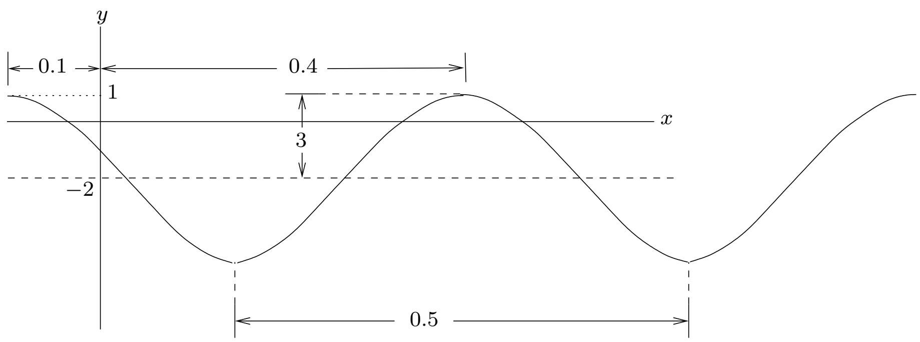


FIGURE 1.2 – Graphe de la fonction sinusoïdale $W(y) = -2.0+3.0\cos(4\pi(y+0.1))$ de la question 7

Solution:
On a que

$$W(y) = M + A\ \cos\left(\frac{2\pi}{P}(y-Y)\right) \ ,$$

où $M = -2$ est la moyenne, $A = 3$ est l'amplitude, $P = 0.5$ est la période et $Y = -0.1$ est la phase. On remarque que $Y = 0.4$ serait aussi acceptable pour la phase car la période est 0.5.

Le graphe de W est donnée à la figure 1.2.

Question 1.8

Solution:
a) On a $f(x) = f_1(f_2(x))$ où $f_1(x) = 5x^{-1}$ et $f_2(x) = 1 + 5^x$.

b) On a $h(t) = h_1(h_2(t))$ où $h_1(x) = x^{-4}$ et $h_2(t) = 1 - t^2$.

c) On a $g(x) = g_1(g_2(g_3(x)))$ où $g_1(x) = \cos(x)$, $g_2(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ et $g_3(x) = 1 + x^2$.

Question 1.9

Solution:
On a $S(t) = S_0 10^{0.693t}$. Pour répondre à la première question, on trouve t tel que $S(t) = 2S(0)$. Donc,

$$\begin{aligned} S_0 10^{0.693t} = 2S_0 &\Longrightarrow 10^{0.693t} = 2 \Longrightarrow \log_{10}\left(10^{0.693t}\right) = \log_{10}(2) \Longrightarrow 0.693\,t = \log_{10}(2) \\ &\Longrightarrow t = \frac{\log_{10}(2)}{0.693} = 0.4343876\ldots \end{aligned}$$

On remarque que la solution ne dépend pas de la valeur de S_0.

Pour répondre à la deuxième question, on trouve t tel que $S(t) = 10S(0)$. Donc,

$$S_0 10^{0.693t} = 10S_0 \Longrightarrow 10^{0.693t} = 10 \Longrightarrow 0.693t = 1 \Longrightarrow t = \frac{1}{0.693} = 1.443001\ldots$$

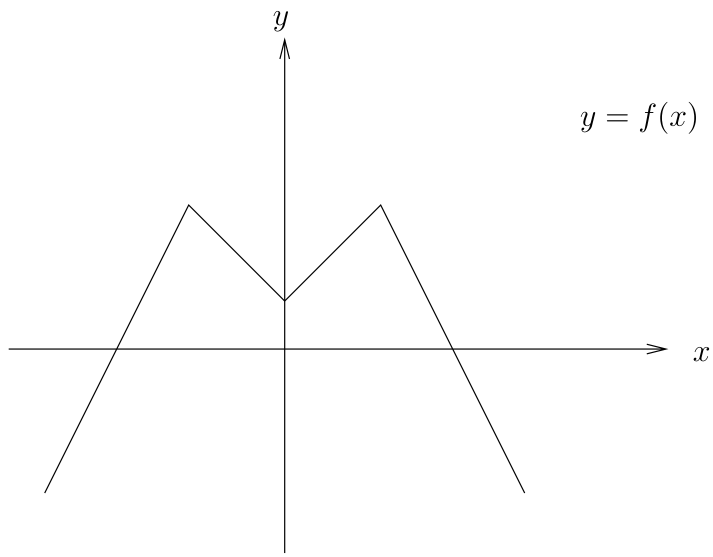


FIGURE 1.3 – La figure pour la question 10

Question 1.10

Question 1.11

Solution:
a) La fonction g est définie pour tout x réel. Donc, le domaine de g est $\mathbb{R}$. Puisque l'image de $x \mapsto x^3$ est $\mathbb{R}$, l'image de g est l'image de $y \mapsto 5^y$ avec $y \in \mathbb{R}$; c'est-à-dire que l'image de g est $]0, \infty[$.

Puisque

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow 5^{x_1^3} = 5^{x_2^3} \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \ ,$$

on a que g est une fonction injective sur $\mathbb{R}$, son domaine. Donc, on peut inverser $g : \mathbb{R} \to]0, \infty[$. L'inverse de g est donné par :

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = 5^{x^3} \Leftrightarrow \log_5(y) = x^3 \Leftrightarrow x = (\log_5(y))^{1/3} \equiv g^{-1}(y) \ .$$

Par convention, on écrit $y = g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\log_5(x)}$. Le domaine de g^{-1} est $]0, \infty[$, l'image de g, et l'image de g^{-1} est $\mathbb{R}$, le domaine de g.

b) Commençons par déterminer le domaine de f. On a

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x-1} \geq 0 &\Leftrightarrow x+1 \geq 0 \text{ et } x-1 > 0, \text{ ou } x+1 \leq 0 \text{ et } x-1 < 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq -1 \text{ et } x > 1, \text{ ou } x \leq -1 \text{ et } x < 1 \\ &\Leftrightarrow x > 1 \text{ ou } x \leq -1 \ .\end{aligned}$$

Donc, le domaine de f est $]-\infty,-1]\cup]1,\infty[$. L'image de f est $[0,\infty[$ car la racine carrée est toujours positive ou nulle, et

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$$

peut être aussi grand que l'on veut si on prend $x>1$ très près de 1. Notons aussi que $f(-1)=0$.

Puisque

$$\begin{aligned} f(x_1)=f(x_2) &\Rightarrow \sqrt{\frac{x_1+1}{x_1-1}}=\sqrt{\frac{x_2+1}{x_2-1}} \Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1}=\frac{x_2+1}{x_2-1} \\ &\Rightarrow (x_1+1)(x_2-1)=(x_2+1)(x_1-1) \\ &\Rightarrow x_1x_2+x_2-x_1-1=x_1x_2-x_2+x_1-1 \\ &\Rightarrow x_2-x_1=-x_2+x_1 \Rightarrow 2x_2=2x_1 \Rightarrow x_2=x_1 \ , \end{aligned}$$

on a que f est une fonction injective sur son domaine. Donc, on peut inverser

$$f:\text{Dom } f \to \text{Im } f \ .$$

L'inverse de f est donné par :

$$\begin{aligned} y=f(x) \Leftrightarrow y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} &\Leftrightarrow y^2=\frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow y^2(x-1)=x+1 \\ &\Leftrightarrow y^2x-x=y^2+1 \Leftrightarrow x(y^2-1)=y^2+1 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{y^2+1}{y^2-1}\equiv f^{-1}(y) \ . \end{aligned}$$

Par convention, on écrit $y=f^{-1}(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. Le domaine de f^{-1} est l'image de f et l'image de f^{-1} est le domaine de f.

c) La fonction h est définie pour tout x sauf $x=-1$. Donc, le domaine de h est $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Puisque $y^{10}\geq 0$ pour tout $y\in\mathbb{R}$, et $\dfrac{x}{x+1}$ peut prendre toutes les valeurs réelles en variant x, on a que l'image de h est $[0,\infty[$.

La fonction h n'est pas injective car

$$h(1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}=h\left(-\frac{1}{3}\right) \ .$$

En fait, le lecteur peut vérifier que $h(x_1)=h(x_2)$ si $x_1+2x_1x_2+x_2=0$. Donc, h n'est pas inversible sur son domaine.

Note : Si on restreint la fonction h à $[0,\infty[$, alors $h:[0,\infty[\to[0,1[$ est inversible. Plus précisément, puisque

$$h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow\left(\frac{x_1}{x_1+1}\right)^{10}=\left(\frac{x_2}{x_2+1}\right)^{10}\Rightarrow\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2}{x_2+1}$$

$$\Rightarrow x_1(x_2+1) = x_2(x_1+1) \Rightarrow x_1x_2 + x_1 = x_1x_2 + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \ ,$$

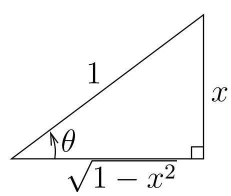
on a que h est injective sur $[0,\infty[$. On a utilisé le fait que $\dfrac{x_1}{x_1+1} \geq 0$ et $= \dfrac{x_2}{x_2+1} \geq 0$ pour obtenir la deuxième implication ci-dessus. L'inverse de h est donné par :

$$\begin{aligned} y = h(x) &\Leftrightarrow y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{10} \Leftrightarrow y^{1/10} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow y^{1/10}(x+1) = x \\ &\Leftrightarrow y^{1/10}x - x = -y^{1/10} \Leftrightarrow x(y^{1/10}-1) = -y^{1/10} \Leftrightarrow x = \frac{y^{1/10}}{1-y^{1/10}} \equiv h^{-1}(y) \ . \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\dfrac{x}{x+1} \geq 0$ pour obtenir la deuxième équivalence ci-dessus. Par convention, on écrit $y = h^{-1}(x) = \dfrac{x^{1/10}}{1-x^{1/10}}$. Le domaine de h^{-1} est l'image de h où h est restreint à $[0,\infty[$. C'est-à-dire que le domaine de h est $[0,1[$. L'image de h^{-1} est $[0,\infty[$, le domaine que l'on a assigné à h.

Question 1.12

Solution:
Soit $\theta = \arcsin(x)$ où $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Donc, $\sin(\theta) = x$ et on obtient la figure suivante.



Ainsi, $\tan(\theta) = x/\sqrt{1-x^2}$.

1.1.1 Révision

Les problèmes qui suivent vont vous permettre de revoir certaines des manipulations algébriques couramment utilisées et auxquelles on aura recours tout au long de notre étude du calcul différentiel et intégral.

Question 1.13

Solution:
a) $(3^4)^{0.5} = 3^2 = 9$

b) $2^{2^3} \times 2^{2^2} = 2^{2^3+2^2} = 2^{8+4} = 2^{12}$

c) $\log_3(1) = 0$ car $3^0 = 1$.

d) $\log_{10}(5) + \log_{10}(20) = \log_{10}(5 \times 20) = \log_{10}(100) = 2$

e) $\log_{10}(500) - \log_{10}(50) = \log_{10}(500/50) = \log_{10}(10) = 1$

f) $\log_{42.3}(42.3^7) = 7$

Question 1.14

Solution:
On se rappelle que les racines du polynôme $ax^2 + bx + c$ sont données par la formule

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

si $b^2 - 4ac \geq 0$. Dans ce cas, on a $ax^2 + bx + c = a(x - x_-)(x - x_+)$. Si $b^2 - 4ac < 0$, il n'y a pas de racine réelle et on ne peut pas factoriser le polynôme.

a) Les racines du polynôme $x^2 + x - 6$ sont

$$x_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = 2 \text{ ou } -3 \ .$$

Donc $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$.

b) Les racines du polynôme $3x^2 - 5x - 2$ sont

$$x_{\pm} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = 2 \text{ ou } -\frac{1}{3} \ .$$

Ainsi

$$3x^2 - 5x - 2 = 3(x - 2)\left(x + \frac{1}{3}\right) \text{ ou } (x - 2)(3x + 1)$$

c) On a

$$x^{3/2} + x^{1/2} - 12x^{-1/2} = x^{-1/2}\left(x^2 + x - 12\right) = x^{-1/2}(x + 4)(x - 3)$$

Question 1.15

Solution:
a)

$$7 \times 5^{3x} = 21 \Leftrightarrow 5^{3x} = 3 \Leftrightarrow \ln\left(5^{3x}\right) = \ln(3) \Leftrightarrow 3x\ln(5) = \ln(3) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(3)}{3\ln(5)}$$

b)

$$\begin{aligned} 4 \times 3^{-2x+1} = 7 \times 3^{3x} &\Leftrightarrow \frac{3^{-2x+1}}{3^{3x}} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow 3^{-5x+1} = \frac{7}{4} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(3^{-5x+1}\right) = \ln\left(\frac{7}{4}\right) \Leftrightarrow (-5x+1)\ln(3) = \ln(7) - \ln(4) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}\left(-1 + \frac{\ln(7) - \ln(4)}{\ln(3)}\right)$$

Question 1.16

Solution:
a)

$$7b^{3x} = 21 \Leftrightarrow b^{3x} = 3 \Leftrightarrow 3x = \log_b(3) \Leftrightarrow x = \frac{\log_b(3)}{3}$$

b)

$$\begin{aligned} 4b^{-2x+1} = 7b^{3x} &\Leftrightarrow \frac{b^{-2x+1}}{b^{3x}} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow b^{-5x+1} = \frac{7}{4} \\ &\Leftrightarrow -5x+1 = \log_b\left(\frac{7}{4}\right) = \log_b(7) - \log_b(4) \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}\left(-1 + \log_b(7) - \log_b(4)\right) = \frac{1}{5}\left(1 - \log_b(7) + \log_b(4)\right) \end{aligned}$$

c) $|x-2| = 5$ si $x - 2 = 5$ ou $x - 2 = -5$. Donc, $x = 7$ ou -3.

d) Ce cas n'est pas beaucoup plus difficile que le précédent.

$$|x-2| = |2x-5| \Leftrightarrow \frac{|x-2|}{|2x-5|} = \left|\frac{x-2}{2x-5}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{2x-5} = 1 \text{ ou } \frac{x-2}{2x-5} = -1\ .$$

Si $\dfrac{x-2}{2x-5} = 1$, on obtient $x - 2 = 2x - 5$ et ainsi $x = 3$. Si $\dfrac{x-2}{2x-5} = -1$, on obtient $x - 2 = -2x + 5$ et ainsi $x = 7/3$.

Question 1.17

Solution:
a) Il y a deux cas à considérer : $x < -2$ ou $x > -2$.

Si $x < -2$, on a $x + 2 < 0$ et donc

$$\frac{x^2}{x+2} < 1 \Leftrightarrow x^2 > x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) > 0$$

$x^2 - x - 2$ est un polynôme qui est positif pour $x < -1$ et $x > 2$. Comme on assume que $x < -2$, on obtient $x < -2$

Si $x > -2$, on a maintenant $x + 2 > 0$ et

$$\frac{x^2}{x+2} < 1 \Leftrightarrow x^2 < x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) < 0$$

$x^2 - x - 2$ est un polynôme qui est négatif pour $-1 < x < 2$. Comme on assume que $x > -2$, on obtient $-1 < x < 2$

L'inégalité est donc vrai pour $]-\infty,-2[\cup]-1,2[$.

b) On a trois cas a considérer : $x>3$, $-1<x<3$ et $x<-1$.

Si $x>3$, on a que $x+1>0$ et $x-3>0$. Donc,

$$\frac{x}{x-3}<\frac{-6}{x+1}\Leftrightarrow x(x+1)<-6x+18\Leftrightarrow x^2+7x-18=(x+9)(x-2)<0$$

Il faut avoir $-9<x<2$. Comme on assume que $x>3$, il n'y a pas de solutions.

Si $-1<x<3$, on a que $x+1>0$ et $x-3<0$. Donc,

$$\frac{x}{x-3}<\frac{-6}{x+1}\Leftrightarrow x(x+1)>-6x+18\Leftrightarrow x^2+7x-18=(x+9)(x-2)>0$$

Il faut avoir $x<-9$ ou $x>2$. Comme on assume que $-1<x<3$, on obtient $2<x<3$.

Finalement, si $x<-1$, on a que $x+1<0$ et $x-3<0$. Donc,

$$\frac{x}{x-3}<\frac{-6}{x+1}\Leftrightarrow x(x+1)<-6x+18\Leftrightarrow x^2+7x-18=(x+9)(x-2)<0$$

Il faut avoir $-9<x<2$. Comme on assume que $x<-1$, on obtient $-9<x<-1$.

L'inégalité est donc vrai pour $]-9,-1[\cup]2,3[$.

c) On a

$$|x-2|<5\Leftrightarrow -5<x-2<5\Leftrightarrow -5<x-2 \text{ et } x-2<5\Leftrightarrow -3<x \text{ et } x<7$$

L'inégalité est donc vrai pour $-3<x<7$.

d) On a

$$|x^2-2x-5|<|x-1|\Leftrightarrow\frac{|x^2-2x-5|}{|x-1|}=\left|\frac{x^2-2x-5}{x-1}\right|<1\Leftrightarrow -1<\frac{x^2-2x-5}{x-1}<1$$

On a deux cas à considérer : $x<1$ et $x>1$. Si $x>1$, on a $x-1>0$ et ainsi

$$\begin{aligned}-1<\frac{x^2-2x-5}{x-1}<1&\Leftrightarrow -(x-1)<x^2-2x-5<x-1\\&\Leftrightarrow -(x-1)<x^2-2x-5 \text{ et } x^2-2x-5<x-1\\&\Leftrightarrow 0<x^2-x-6 \text{ et } x^2-3x-4<0\\&\Leftrightarrow 0<(x-3)(x+2) \text{ et } (x-4)(x+1)<0\end{aligned}$$

La première inégalité est satisfaite pour $x<-2$ ou $x>3$, et la deuxième est satisfaite pour $-1<x<4$. Pour satisfaire les deux inégalité simultanément, on doit donc avoir $3<x<4$.

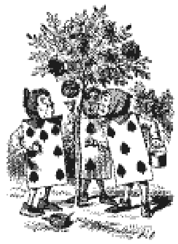
Si $x<1$, on a $x-1<0$ et ainsi

$$\begin{aligned}-1<\frac{x^2-2x-5}{x-1}<1&\Leftrightarrow -(x-1)>x^2-2x-5>x-1\\&\Leftrightarrow -(x-1)>x^2-2x-5 \text{ et } x^2-2x-5>x-1\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0 > x^2 - x - 6 \text{ et } x^2 - 3x - 4 > 0$$
$$\Leftrightarrow 0 > (x-3)(x+2) \text{ et } (x-4)(x+1) > 0$$

La première inégalité est satisfaite pour $-2 < x < 3$, et la deuxième est satisfaite pour $x < -1$ ou $x > 4$. Pour satisfaire les deux inégalité simultanément, on doit donc avoir $-2 < x < -1$.

L'inégalité est donc vrai pour $]-2,-1[\cup]3,4[$.



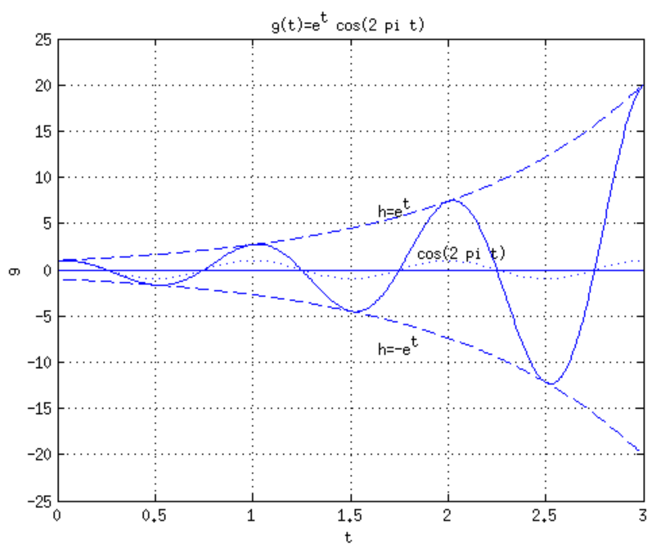
Les suites et séries | 2

2.1 Exercices

Question 2.1

Question 2.2

Solution:



Question 2.3

Solution:
La fonction $\cos(2\pi\ t)$ est une fonction périodique de période 1. De plus, $\cos(2\pi\ t) = 0$ pour $t = (2n-1)/4$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Même si la fonction e^{-t} n'est pas constante, on peut imaginer qu'elle joue le rôle de « l'amplitude « pour la fonction W. Une amplitude qui tend vers 0.

Le graphe de W est donnée à la figure 2.1.

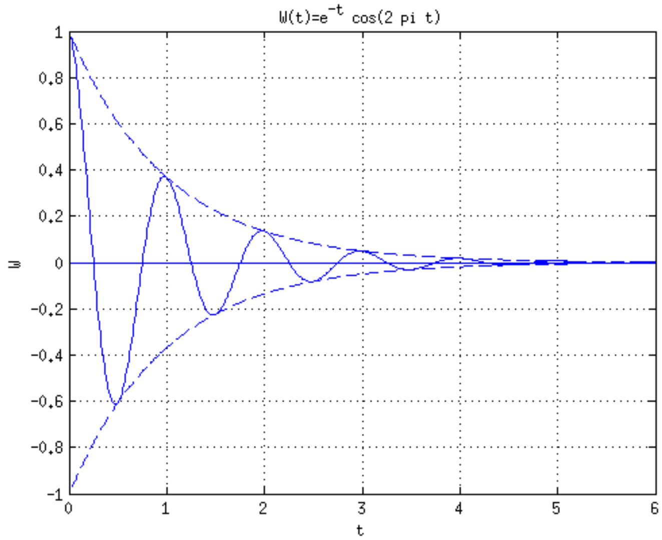


FIGURE 2.1 – Graphe de la fonction $W(t) = e^{-t}\cos(2\pi t)$ pour la question 3

Question 2.4

Question 2.5

Les limites et les fonctions continues | 3

3.1 Exercices

Question 3.1

Solution:
Posons $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x}$. Si on choisit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $x_n = 1/n$, on obtient une suite qui tend vers 0. Les données du tableau suivant suggère que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 2$.

n	$x_n = 1/n$	$f(x_n)$
1	1	$6.389056\ldots$
2	$1/2$	$3.43656\ldots$
3	$1/3$	$2.8432\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	$1/100$	$2.020134\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1000	$1/1000$	2.002001
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
∞	0	2

Comme $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 2$ quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 0, on peut écrire

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} f(x) = 2 \ .$$

Question 3.2

Solution:
On peut facilement voir à partir de la figure dans la question que $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} p(t) = 0$ car $p(t) = 0$ pour tous $t < 1$. De même, on a que $\displaystyle\lim_{t\to 1^+} p(t) = 2$. Ainsi, la limite $\displaystyle\lim_{t\to 1} p(t)$ n'existe pas car $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} p(t) \neq \lim_{t\to 1^+} p(t)$.

Question 3.3

Solution:
a) On a

$$\begin{gathered}\frac{1-\cos(0.1)}{0.1} \approx 0.04995834\ ,\ \frac{1-\cos(0.01)}{0.01} \approx 0.00499995\ ,\\ \frac{1-\cos(0.001)}{0.001} \approx 4.9999995\times 10^{-4}\ ,\ \frac{1-\cos(0.0001)}{0.0001} \approx 4.9999999\times 10^{-5}\ ,\ldots \to 0\end{gathered}$$

b) On a

$$\begin{gathered}\frac{\ln(1-0.1)}{0.1} \approx -1.05360515\ ,\ \frac{\ln(1-0.01)}{0.01} \approx -1.00503358\ \ ,\\ \frac{\ln(1-0.001)}{0.001} \approx -1.00050033\ ,\ \frac{\ln(1-0.0001)}{0.0001} \approx -1.0000500\ ,\ldots \to -1\end{gathered}$$

Question 3.4

Solution:
On a $\sqrt{x} < 0.1$ si $0 \leq x < 0.01$. On a $\sqrt{x} < 0.01$ si $0 \leq x < 0.0001$. La convergence n'est certainement pas rapide. Il faut que x soit très petit pour que $\sqrt{x}$ soit petit.

Question 3.5

Solution:
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1.5$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0.5$. Comme la limite à droite est différente de la limite à gauche la limite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 6$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$. Comme la limite à droite est différente de la limite à gauche la limite $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas.

Question 3.6

Solution:
Puisque v est une fonction continue, $\lim\limits_{t\to 0} v(t) = v(0) = 1$.

1. On cherche t tel que $|v(t)-1| < 1$.

$$|v(t)-1| < 1 \Longrightarrow t^2 < 1 \Longrightarrow -1 < t < 1\ .$$

2. On cherche t tel que $|v(t)-1| < 0.5$.

$$|v(t)-1| < 0.5 \Longrightarrow t^2 < 0.5 \Longrightarrow -\sqrt{0.5} < t < \sqrt{0.5}\ .$$

3. On cherche t tel que $|v(t)-1|<0.01$.

$$|v(t)-1|<0.01 \Longrightarrow t^2<0.01 \Longrightarrow -0.1<t<0.1 \ .$$

Question 3.7
Déterminer si les limites suivantes existent. Évaluer la limite quand elle existe.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1+x}$ **b**) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{2+\sqrt{2x^2-4}}$ **c**) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\cos(\pi/x)}{x^2-5}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{2-\sqrt{x^2-5}}$ **e**) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x^2-25}$

Solution:
a) Soit $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$. On a que $f(x)=f_1(x)/f_2(x)$ où $f_1(x)=e^x$ et $f_2(x)=1+x$. Comme f_1 et f_2 sont des fonctions continues, on a que f est continue en tout point de la droite réelle sauf en $x=-1$ car $f_2(-1)=0$. Donc,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1+x}=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=\frac{e^0}{1+0}=1 \ .$$

b) Puisque $f(x)=\dfrac{(x-2)}{2+\sqrt{2x^2-4}}$ est une fonction continue en $x=2$, on a que

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{2+\sqrt{2x^2-4}}=\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=\frac{(2-2)}{2+\sqrt{2\times 2^2-4}}=\frac{0}{4}=0 \ .$$

c) Puisque $f(x)=\dfrac{\cos(\pi/x)}{x^2-5}$ est une fonction continue en $x=3$, on a que

$$\lim_{x\to 3}\frac{\cos(\pi/x)}{x^2-5}=\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)=\frac{\cos(\pi/3)}{3^2-5}=\frac{1/2}{4}=\frac{1}{8} \ .$$

d) La fonction $f(x)=\dfrac{(x-3)}{2-\sqrt{x^2-5}}$ n'est pas définie en $x=3$ car le dénominateur est nul en $x=3$. Il en est de même du numérateur. La fonction n'est donc pas continue en $x=3$. On élimine la racine carrée au dénominateur en multipliant la fonction f par l'expression $\dfrac{2+\sqrt{x^2-5}}{2+\sqrt{x^2-5}}$. Comme cette expression est égale à 1, on ne change pas la valeur de $f(x)$. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{(x-3)}{2-\sqrt{x^2-5}} &= \left(\frac{(x-3)}{2-\sqrt{x^2-5}}\right)\left(\frac{2+\sqrt{x^2-5}}{2+\sqrt{x^2-5}}\right)=\frac{(x-3)(2+\sqrt{x^2-5})}{4-(x^2-5)}\\ &= \frac{(x-3)(2+\sqrt{x^2-5})}{9-x^2}=\frac{(x-3)(2+\sqrt{x^2-5})}{(3-x)(3+x)}=-\frac{2+\sqrt{x^2-5}}{3+x}\end{aligned}$$

Ainsi,
$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)}{2-\sqrt{x^2-5}} = \lim_{x\to 3} -\frac{2+\sqrt{x^2-5}}{3+x} = -\frac{2+\sqrt{3^2-5}}{3+3} = -\frac{2}{3}$$
où nous avons utilisé le fait que $h(x) = -\dfrac{2+\sqrt{x^2-5}}{3+x}$ est une fonction continue en $x = 3$ pour calculer cette limite.

e) Pour déterminer si $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{|x-5|}{x^2-25}$ existe, nous devons considérer les cas $x < 5$ et $x > 5$.

Pour $x < 5$, $|x-5| = 5-x$ et on obtient
$$\lim_{x\to 5^-} \frac{|x-5|}{x^2-25} = \lim_{x\to 5^-} \frac{5-x}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to 5^-} \frac{-1}{x+5} = -\frac{1}{10}\ .$$

Pour $x > 5$, $|x-5| = x-5$ et on obtient
$$\lim_{x\to 5^+} \frac{|x-5|}{x^2-25} = \lim_{x\to 5^+} \frac{x-5}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to 5^+} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10}\ .$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to 5^-} \frac{|x-5|}{x^2-25} \neq \lim_{x\to 5^+} \frac{|x-5|}{x^2-25}$, on doit conclure que $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{|x-5|}{x^2-25}$ n'existe pas.

Question 3.8

Solution:
On a $S(t) = e^{\alpha t}$ car $S_0 = 1$ par hypothèses. Pour déterminer α, on utilise $S(1000) = 2.71828$. On a
$$\begin{aligned} e^{1000\,\alpha} = 2.71828 &\Longrightarrow \ln\left(e^{1000\,\alpha}\right) = \ln(2.71828) \Longrightarrow 1000\,\alpha = \ln(2.71828) \\ &\Longrightarrow \alpha = \frac{\ln(2.71828)}{1000} = 9.999993273472820\ldots \times 10^{-4}\ . \end{aligned}$$

Donc, on peut dire que $\alpha = 10^{-3}$.

Pour répondre à la deuxième partie de la question, on doit trouver t tel que
$$2.71828 - 0.1 = 2.61828 < S(t) < 2.81828 = 2.71828 + 0.1\ .$$

On a
$$\begin{aligned} 2.61828 < e^{0.001\,t} < 2.81828 &\Longrightarrow \ln(2.61828) < 0.001\,t < \ln(2.81828) \\ &\Longrightarrow 10^3\ \ln(2.61828) < t < 10^3\ \ln(2.81828) \\ &\Longrightarrow 962.51761\ldots < t < 1036.126769\ldots \end{aligned}$$

Question 3.9

Solution:
On a $\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1$ car, pour toute suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ qui tend vers 1 avec $x_n \geq 0$, on a $H(x_n) = 1$.

On a $\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0$ car, pour toute suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ qui tend vers 1 avec $x_n < 0$, on a $H(x_n) = 0$.

Puisque $\lim_{x\to 0^+} H(x) \neq \lim_{x\to 0^-} H(x)$, la limite $\lim_{x\to 0} H(x)$ n'existe pas.

Question 3.10

Solution:
L'équation de la droite qui joint les points $(-0.1, -1)$ et $(0.1, 1)$ est $y = 10x$. Donc,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < -0.1 \\ 10x & \text{si} \quad -0.1 \leq x < 0.1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0.1 \end{cases} .$$

Question 3.11

Solution:
Soit $W(V)$ l'impulsion électrique produite par le neurone après qu'il est reçu une impulsion électrique de V volts. On dit dans la question que

$$W(V) = \begin{cases} V_1 & \text{si} \quad V < V_0 \\ 2V & \text{si} \quad V > V_0 \end{cases}$$

De plus, on dit dans la question que W est continue. Donc, W doit aussi être définie à $V = V_0$ et

$$W(V_0) = \lim_{V\to V_0^-} W(V) = \lim_{V\to V_0^+} W(V) .$$

Puisque

$$\lim_{V\to V_0^-} W(V) = V_1 \quad \text{et} \quad \lim_{V\to V_0^+} W(V) = 2V_0 ,$$

on a donc $W(V_0) = V_1 = 2V_0$. La fonction W est naturellement continue pour $V \neq V_0$. Finalement, la définition de W est

$$W(V) = \begin{cases} V_1 & \text{si} \quad V < V_0 \\ 2V & \text{si} \quad V \geq V_0 \end{cases}$$

avec $V_1 = 2V_0$.

Question 3.12

Solution:
On a
$$\frac{1}{\sqrt{x}} > 10 \Longrightarrow 0 < \sqrt{x} < \frac{1}{10} \Longrightarrow 0 < x < \frac{1}{100} \ .$$
On a
$$\frac{1}{\sqrt{x}} > 100 \Longrightarrow 0 < \sqrt{x} < \frac{1}{100} \Longrightarrow 0 < x < \frac{1}{10^4} \ .$$
La croissance n'est pas rapide. Il faut que x soit très petit pour que $\sqrt{x}$ soit légèrement grand.

Question 3.13

Solution:
Comme f est défini par des polynômes pour $x \neq 3$, on a que f est continue partout sauf possiblement en $x = 3$. Pour que f soit continue en $x = 3$, on doit avoir
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \ .$$
Puisque $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (ax^2 + 4x) = 9a + 12$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} x^2 + ax = 9 + 3a$ et $f(3) = 9 + 3a$, on doit donc avoir $9a + 12 = 9 + 3a$. Si on résout, on trouve $a = -1/2$.

Question 3.14

Solution:
Comme f est définie par une fonction rationelle sans division par 0 pour < 3 et par des polynômes pour $x > 3$ et $x \neq 4$, on a que f est continue partout sauf possiblement en $x = 3$ et $x = 4$.

Pour que f soit continue en $x = 3$, on doit avoir
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \ .$$
Puisque
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(x+1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} (x+1) = 4 \ ,$$
$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} ax^2+x+b = 9a+3+b$ et $f(3) = 9a+3+b$, on doit donc avoir $4 = 9a+3+b$. On obtient l'équation $9a + b = 1$.

Pour que f soit continue en $x = 4$, on doit avoir
$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4) \ .$$
Puisque $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} ax^2+x+b = 16a+4+b$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} b\sqrt{x}+\frac{5ax}{2} = 2b+10a$ et $f(4) = 2b+10a$, on doit donc avoir $16a+4+b = 2b+10a$. On obtient l'équation $6a-b = -4$.

Il faut résourde le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 9a + b &= 1 \\ 6a - b &= -4 \end{aligned}$$

pour trouver a et b. Si on additionne les deux équations, on trouve $15a = -3$. Donc, $a = -1/5$. Si on substitue cette valeur de a dans l'équation $6a - b = -4$, on obtient $-6/5 - b = -4$. Donc, $b = 14/5$

Question 3.15

Solution:
0.1% de 440 est 0.44. Donc, le coût du diapason sera de $\dfrac{5}{0.44} \approx 11.36$ dollars. 0.01% de 440 est 0.044. Donc, le coût du diapason sera de $\dfrac{5}{0.044} \approx 113.64$ dollars.

On a que $\displaystyle \lim_{x\to 440} \frac{5}{|x-440|} = +\infty$. Le coût du diapason va devenir exorbitant si on demande la perfection. En fait, on n'atteindra jamais la perfection.

Question 3.16

Solution:
Soit $h(t) = (1-t)^{-4}$. Comme la fonction h n'est pas définie en $t = 1$, elle n'est certainement pas continue. On doit donc utiliser les suites pour estimer la limite.

n	$t_n = 1 + 1/n^2$	$f(t_n)$
1.000000	2.000000	1
2.000000	1.250000	256
3.000000	1.111111	6561
4.000000	1.062500	65536
5.000000	1.040000	390625
6.000000	1.027778	1679616
7.000000	1.020408	5764801
8.000000	1.015625	16777216
9.000000	1.012346	43046721
10.000000	1.010000	10^8
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
98.000000	1.000104	$\approx 8.50763 \times 10^{15}$
99.000000	1.000102	$\approx 9.22744 \times 10^{15}$
100.000000	1.000100	$\approx 10^{16}$
	$\downarrow$	$\downarrow$
	1	$+\infty$

Pour toute autre suite $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 1, on a toujours $(1-t_n)^{-4} \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$. Donc, $\displaystyle \lim_{x\to 1} (1-t)^{-4} = +\infty$.

On aurais pu résonner à partir de la définition de la fonction h. Soit $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite qui tend vers 0. C'est le cas pour $t_n = 1/n^2$ que l'on a utilisé dans le tableau ci-dessus. Si on substitue $t = 1 + t_n$ dans $h(t)$, on obtient $h(1+t_n) = t_n^{-4} = \dfrac{1}{t_n^4}$. Puisque $t_n^4 \to 0$ lorsque $n \to \infty$, on a que $1/t_n^4 \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$. Plus $t_n^4 > 0$ est petit, plus $1/t_n^4$ est grand.

Question 3.17

Solution:
Posons $f(y) = y^2 \ln(y-1)$. Avant de répondre à la question, notons que $f(y)$ n'est pas défini pour $y < 1$. Donc, il est impossible de considérer $\lim_{y\to 1^-} f(y)$ et $\lim_{y\to 1} f(y)$.

Si on choisit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $x_n = 1 + 1/n$, on obtient une suite de termes plus grand que 1 qui tend vers 1. On a les résultats suivants :

n	$x_n = 1/n$	$f(x_n)$
1	2	0
2	3/2	$-1.55958\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10,000$	1.0001	$-9.212182\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10^9	$1+10^{-9}$	$-20.723265\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10^{15}	$1+10^{-15}$	$-34.4342154\ldots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
∞	1	?

Il semble que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$ car $f(x_n)$ semble décroître sans borne inférieure lorsque n augmente. Malheureusement, ce n'est pas convaincant. $f\left(1+10^{-15}\right) = -34.4342154\ldots$ n'est pas une très petite valeur négative même si $1+10^{-15}$ est très près de 1. Peut-être que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -35$.

C'est ici qu'il est important d'utiliser notre connaissance de la fonction ln et de mettre notre calculatrice de côté. On sait que $\ln(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque $x > 0$ tend vers 0 (pensez au graphe de ln). Donc, $\ln(y-1)$ tend vers $-\infty$ lorsque $y > 1$ tend vers 1. Puisque y^2 tend vers 1 lorsque x tend vers 1, alors $y^2 \ln(y-1)$ tend vers $-\infty$ lorsque $y > 1$ tend vers 1. C'est-à-dire,

$$\lim_{x\to 1^+} y^2 \ln(y-1) = -\infty \ .$$

Le fait que f ne soit pas défini en $y = 1$ n'empêche pas l'existence de la limite $\lim_{y\to 1^+} f(y)$ car la limite d'une fonction à un point est indépendante du comportement de la fonction à ce point.

Question 3.18

Solution:

a) Si on divise le numérateur et dénominateur par x^2, on a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x-4}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+(5/x)-(4/x^2)}{3+(1/x^2)} = \frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}(5/x)-\lim\limits_{x\to\infty}(4/x^2)}{3+\lim\limits_{x\to\infty}(1/x^2)} = \frac{1}{3}$$

car $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$ pour $r > 0$.

b) Si on factorise x^3 à l'extérieur de la racine cubique, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x-(8x^3+3)^{1/3}}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x-x\left(8+(3/x^3)\right)^{1/3}}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\left(8+(3/x^3)\right)^{1/3}\right)\\ &= \left(1-\left(8+\lim_{x\to\infty}(3/x^3)\right)^{1/3}\right) = 1-8^{1/3} = -1\end{aligned}$$

c) Puisque $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ n'existe pas.

d) On a

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+7x} &= \left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+7x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+7x}}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+7x}}\right)\\ &= \frac{(x^2+3x)-(x^2+7x)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+7x}} = \frac{-4x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+7x}}\\ &= \frac{-4x}{x\sqrt{+(3/x)}+x\sqrt{1+(7/x)}} = \frac{-4}{\sqrt{1+(3/x)}+\sqrt{1+(7/x)}}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+7x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{-4}{\sqrt{1+(3/x)}+\sqrt{1+(7/x)}}\\ &= \frac{-4}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}(3/x)}+\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}(7/x)}}\\ &= \frac{-4}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = -2\end{aligned}$$

e) Puisque

$$\frac{2e^{2x}-e^{-3x}}{3e^{2x}-4e^{-5x}} = \frac{e^{2x}\left(2-e^{-5x}\right)}{e^{2x}\left(3-4e^{-7x}\right)} = \frac{2-e^{-5x}}{3-4e^{-7x}}\ ,$$

On a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}-e^{-3x}}{3e^{2x}-4e^{-5x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-e^{-5x}}{3-4e^{-7x}} = \frac{2-\lim\limits_{x\to\infty} e^{-5x}}{3-4\lim\limits_{x\to\infty} e^{-7x}} = \frac{2}{3}$$

car $\lim\limits_{x\to\infty} e^{rx} = 0$ pour $r < 0$.

La dérivée d'une fonction | 4

4.1 Exercices

Question 4.1

Solution:
a) **i)** $\dfrac{f(1+1)-f(1)}{1} = \dfrac{2\times 2^2-2}{1} = 6$, $\dfrac{f(1+0.5)-f(1)}{0.5} = \dfrac{2\times(1.5)^2-2}{0.5} = 5$,
$\dfrac{f(1+0.1)-f(1)}{0.1} = \dfrac{2\times(1.1)^2-2}{0.1} = 4.2$ et
$\dfrac{f(1+0.01)-f(1)}{0.01} = \dfrac{2\times(1.01)^2-2}{0.01} = 4.02$ respectivement.

ii) $y-2 = 6(t-1)$, $y-2 = 5(t-1)$, $y-2 = 4.2(t-1)$ et $y-2 = 4.02(t-1)$ respectivement.

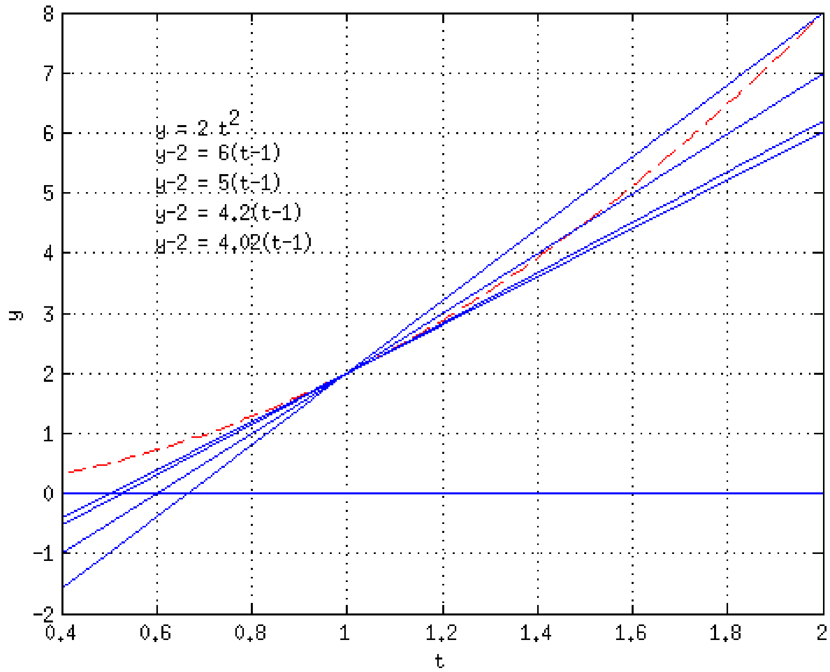
iii) Voir figure ci-dessous.

iv) La pente de la tangente est la limite des pentes

$$\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t} = \frac{f(1+\Delta t)-f(1)}{\Delta t}$$

des sécantes qui passent par les points $(t_0, f(t_0)) = (1,2)$ et $(t_0+\Delta t, f(t_0+\Delta t)) = (1+\Delta t, f(1+\Delta t))$ lorsque Δt tend vers 0. Ainsi, on peut conclure à partir des calculs fait en (i) que la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(1,2)$ est (probablement) 4.

v) $y-2 = 4(t-1)$



b) i) $\dfrac{f(0+1)-f(0)}{1} = \dfrac{e^{2(1)}-1}{1} \approx 6.3891$, $\quad \dfrac{f(0+0.5)-f(0)}{0.5} = \dfrac{e^{2(0.5)}-1}{0.5} \approx 3.4366$,
$\dfrac{f(0+0.1)-f(0)}{0.1} = \dfrac{2^{2(0.1)}-1}{0.1} \approx 2.2140$ et
$\dfrac{f(0+0.01)-f(0)}{0.01} = \dfrac{e^{2(0.01)}-1}{0.01} \approx 2.0201$ respectivement.

ii) $y-1 = 6.3891(t-0) = 6.3891t$, $y-1 = 3.4366t$, $y-1 = 2.2140t$ et $y-1 = 2.0201t$ respectivement.

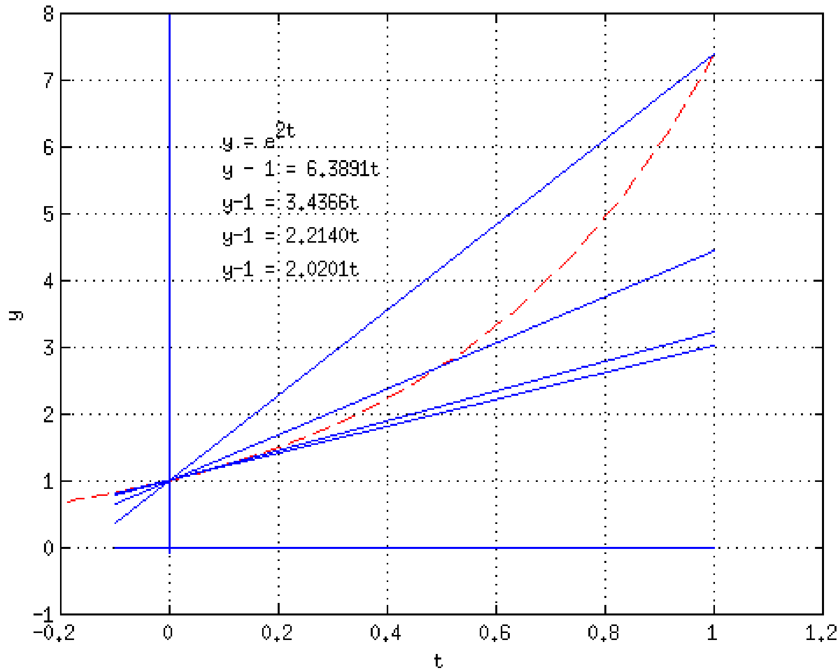
iii) Voir figure ci-dessous.

iv) La pente de la tangente est la limite des pentes

$$\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t} = \frac{f(\Delta t)-f(0)}{\Delta t}$$

des sécantes qui passent par les points $(t_0, f(t_0)) = (0,1)$ et $(t_0+\Delta t, f(t_0+\Delta t)) = (\Delta t, f(\Delta t))$ lorsque Δt tend vers 0. Ainsi, on peut conclure à partir des calculs fait en (i) que la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(0,1)$ est (probablement) 2.

v) $y-1 = 2t$



Question 4.2

Solution:

a) $\dfrac{p(1)-p(0)}{1} = \dfrac{1.5^1 - 1}{1} = 0.5$

b) $\dfrac{p(0.1)-p(0)}{0.1} = \dfrac{1.5^{0.1} - 1}{0.1} \approx 0.4138$

c) $\dfrac{p(0.01)-p(0)}{0.01} = \dfrac{1.5^{0.01} - 1}{0.01} \approx 0.4063$

d) $\dfrac{p(0.001)-p(0)}{0.001} = \dfrac{1.5^{0.001} - 1}{0.001} \approx 0.4055$

e) $\ln(1.5) \approx 0.40546510$

f) $y - 1 \approx 0.40546510\,t$.

Question 4.3

Solution:

On commence par estimer $p'(1)$, le taux de croissance instantané à $t = 1$. On a

$$\frac{p(1.01)-p(1)}{0.01} = \frac{2^{1.01}-2}{0.01} \approx 1.3911100, \quad \frac{p(1.001)-p(1)}{0.001} = \frac{2^{1.001}-2}{0.001} \approx 1.386774925,$$
$$\frac{p(1.0001)-p(1)}{0.0001} = \frac{2^{1.0001}-2}{0.0001} \approx 1.386342407529995, \quad \ldots \to 1.3862943611\ldots$$

Donc, $p'(1) = 1.3862943611\ldots$

De même, on peut estimer $p'(2)$, le taux de croissance instantané à $t = 2$. On a

$$\frac{p(2.01)-p(2)}{0.01} = \frac{2^{2.01}-4}{0.01} \approx 2.7822200, \frac{p(2.001)-p(2)}{0.001} = \frac{2^{2.001}-4}{0.001} \approx 2.773549850,$$
$$\frac{p(2.0001)-p(2)}{0.0001} = \frac{2^{2.0001}-4}{0.0001} \approx 2.7726848151, \ldots \to 2.772588722\ldots$$

Donc, $p'(1) = 2.772588722\ldots.$

Le taux de croissance relatif à $t = 1$ est

$$\frac{p'(1)}{p(1)} = \frac{1.3862943611\ldots}{2} = 0.693147180559945\ldots$$

et le taux de croissance relatif à $t = 2$ est

$$\frac{p'(2)}{p(2)} = \frac{2.772588722\ldots}{4} = 0.693147180559945\ldots$$

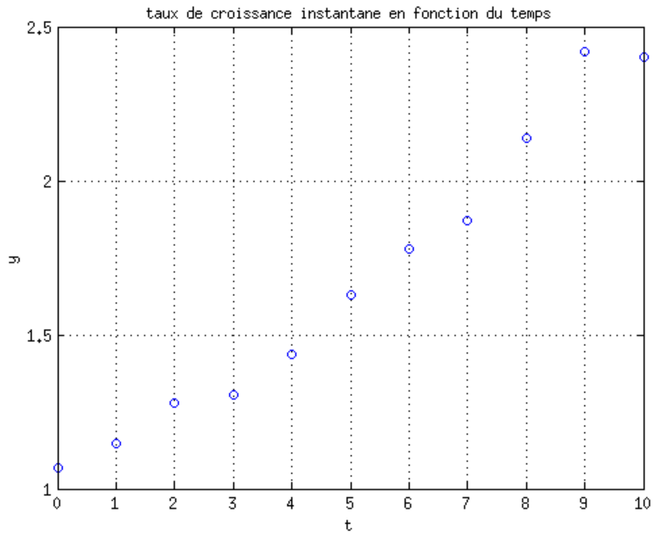
Est-ce que $\dfrac{p'(t)}{p(t)} = 0.693147180559945\ldots$ pour tout t ?

Question 4.4

Solution:

a) À $t = 0$, $H'(0) \approx \dfrac{H(1)-H(0)}{1-0} = 1.07$. À $t = 1$, puisque que $\dfrac{H(0)-H(1)}{0-1} = 1.07$ et $\dfrac{H(2)-H(1)}{2-1} = 1.22$, on estime $H'(1)$ par la moyenne $H'(1) \approx \dfrac{1.22+1.07}{2} = 1.145$. À $t = 2$, puisque que $\dfrac{H(1)-H(2)}{1-2} = 1.22$ et $\dfrac{H(3)-H(2)}{3-2} = 1.34$, on estime $H'(2)$ par la moyenne $H'(2) \approx \dfrac{1.22+1.34}{2} = 1.28$. On procède de la même façon pour trouver $H'(3) \approx 1.305$, $H'(4) \approx 1.435$, $H'(5) = 1.63$, $H'(6) \approx 1.78$, $H'(7) = 1.87$, $H'(8) = 2.14$, $H'(9) = 2.42$ et $H'(10) = 2.4$

b)



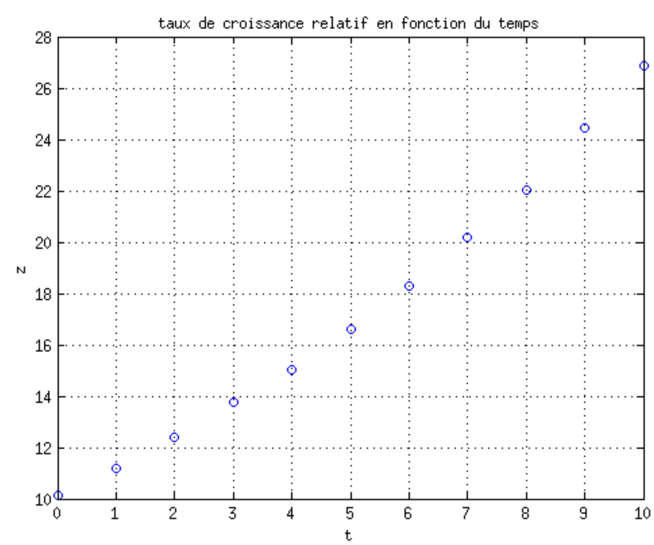
c)

t	0	1	2	3	4	5
$\frac{H'(t)}{H(t)} \approx$	0.105835	0.102415	0.103225	0.094978	0.095602	0.098133

…

6	7	8	9	10
0.097427	0.092711	0.097228	0.098977	0.089385

d) Le taux de croissance relatif n'est pas constant mais augmente. Alors qu'il ne semble pas y avoir de cohérence entre les différents taux de croissance instantanés que l'on a calculés, on peut facilement imaginer en regardant le graphe des taux de croissance relatifs en fonction du temps qu'ils semblent tracer une courbe convexe.



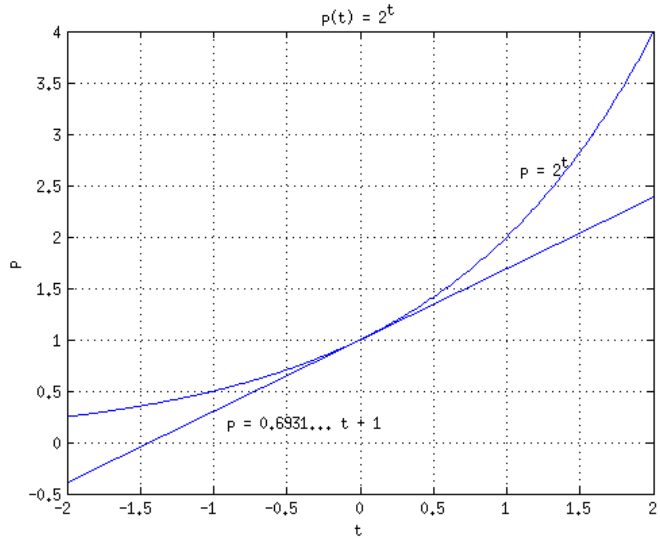


FIGURE 4.1 – Droite tangente à la courbe $y = 2^t$ au point $(0, 1)$ associé à la question 5

Question 4.5

Solution:

a	b	Taux de croissance moyen entre a et b heures (individus/heure)
0	1	$\dfrac{2^1 - 2^0}{1 - 0} = 1$
0	0.1	$\dfrac{2^{0.1} - 2^0}{0.1 - 0} = 0.7177\ldots$
0	0.01	$\dfrac{2^{0.01} - 2^0}{0.01 - 0} = 0.6956\ldots$
0	0.001	$\dfrac{2^{0.001} - 2^0}{0.001 - 0} = 0.6956\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	10^{-5}	$\dfrac{2^{10^{-5}} - 2^0}{10^{-5} - 0} = 0.6931\ldots$
0	10^{-6}	$\dfrac{2^{10^{-6}} - 2^0}{10^{-6} - 0} = 0.6931\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\downarrow$	$\downarrow$
	0	$0.6931\ldots$

On en déduit que
$$\lim_{b\to 0}\frac{2^b-2^0}{b-0}\approx 0.6931\ldots$$
C'est le taux de variation instantané de 2^t à $t=0$.

On retrouve à la figure **??** ci-dessous les graphes de p et de la droite tangente au graphe de p au point $(0,1)$. La pente m de la droite tangente est le taux de variation instantané de 2^t à $t=0$; c'est-à-dire, $m\approx 0.6931$. L'équation de cette droite tangente dans la forme point-pente est
$$(p-1)=m(t-0)\Longrightarrow p=0.6931t+1\ .$$

Question 4.6

Solution:
a)

a	b	Taux de croissance moyen de la a^e à la b^e heure (visites/heure)
2	3	$\dfrac{87-57}{3-2}=30$
3	4	$\dfrac{151-87}{4-3}=64$
3	5	$\dfrac{246-87}{5-3}=\dfrac{159}{2}=79.5$

b) On peut estimer le taux de croissance instantané après trois heures en calculant la moyenne du taux de croissance moyen de la 2^e à la 3^e heure et du taux de croissance moyen de la 3^e à la 4^e heure. On obtient, $(30+64)/2=47$ visites/heure. On utilise les taux de croissance moyens calculés sur les plus petits intervalles de temps possibles.

c) Ce n'est pas réaliste de demander d'estimer le taux de croissance instantané après trois heures sur la base des données que l'on possède. Il faudrait calculer le nombre de visites sur des intervalles de temps beaucoup plus petits qu'une heure.

Question 4.7

Solution:
a) La fonction f n'est pas continue en $x=4$.

b) La fonction f n'est pas différentiable en $x=4$ car elle n'est même pas continue à ce point. De plus, la fonction f n'est pas différentiable en $x=5.5$ car
$$\lim_{x\to 5.5^-}\frac{f(x)-f(5.5)}{x-5.5}=\frac{5}{3}\quad\text{et}\quad\lim_{x\to 5.5^+}\frac{f(x)-f(5.5)}{x-5.5}=-\frac{5}{3}\neq\frac{5}{3}$$
impliquent que
$$\lim_{x\to 5.5^+}\frac{f(x)-f(5.5)}{x-5.5}$$

n'existe pas. Le graphe de la fonction a un «coin» au point $(5.5, f(5.5))$. Finalement, La fonction f n'est pas différentiable en $x = 6.5$ car

$$\lim_{x\to 6.5^+} \frac{f(x) - f(6.5)}{x - 6.5} = -\infty \ .$$

La tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(6.5, f(6.5))$ est verticale.

c) La dérivée de la fonction est nulle aux points où la tangente à la courbe est horizontale. On a donc $x = 0.5$, 2 et 3.5.

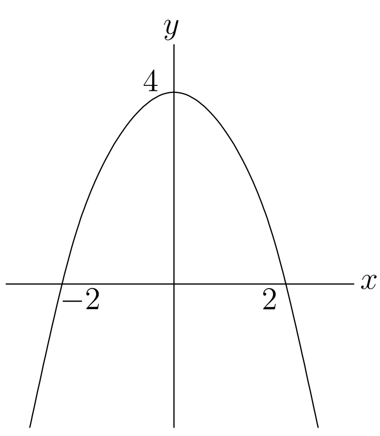
Question 4.8

Solution:
Puisque $g'(y) = -3 < 0$ pour tout y, la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Ce n'est pas surprenant car $z = g(y) = -3y + 5$ est l'équation d'une droite de pente -3. L'intervalle où la fonction est strictement croissante est l'intervalle vide.

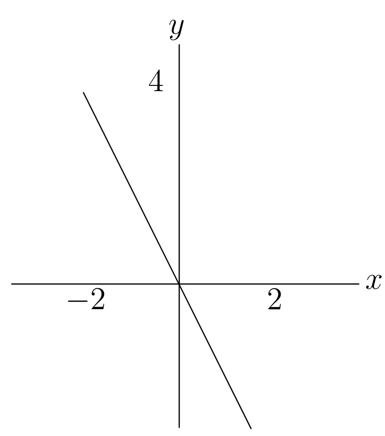
Question 4.9

Solution:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(4 - (x+h)^2) - (4 - x^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(-x^2 - 2xh - h^2 + 4) - (4 - x^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (-2x - h) = -2x \ .
\end{aligned}$$



$y = f(x) = 4 - x^2$



$y = f'(x) = -2x$

Le seul point x pour lequel $f'(x) = 0$ est $x = 0$ car $f'(0) = 0$ et $f'(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$. Puisque $f'(x) = -2x > 0$ pour $x < 0$, la fonction f est strictement croissante pour $x < 0$. Puisque $f'(x) = -2x < 0$ pour $x > 0$, la fonction f est strictement décroissante pour $x > 0$.

Question 4.10

Solution:
La valeur de la dérivée de f en un point est donné par la pente de la droite tangente à la courbe en ce point.

a) La dérivée est positive sur les intervalles $]0.5, 2[$, $]3, 4[$ et $]5.5, 7[$.

b) La dérivée est positive sur les intervalles $]0, 0.5[$, $]1, 3[$ et $]4, 5.5[$.

c) La dérivée est nulle aux points $x = 5.5$, 2, 3 et 5.5.

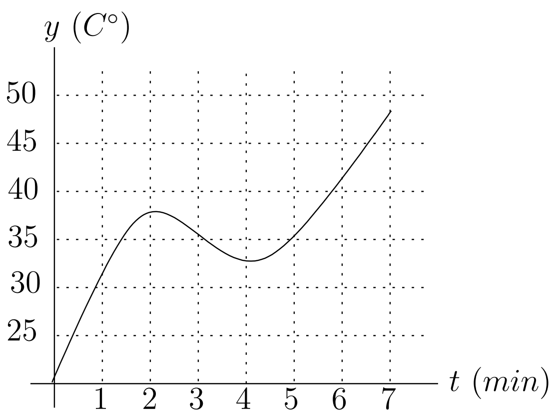
Question 4.11

Solution:
f ne peut pas être la dérivée de g car, entre 0 et 3.7, g est une fonction strictement décroissante. Donc, f devrait être négatif entre 0 et 3.7.

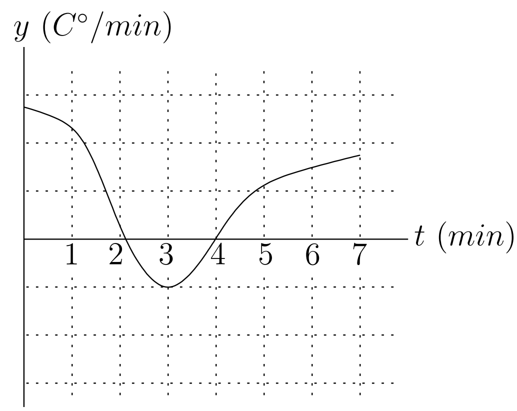
On a que g est la dérivée de f. On a que g est positif quand f est strictement croissante, g est négatif quand f est strictement décroissante, et g est zéro aux points où f à un extremum.

Question 4.12

Solution:



$y = T(t)$

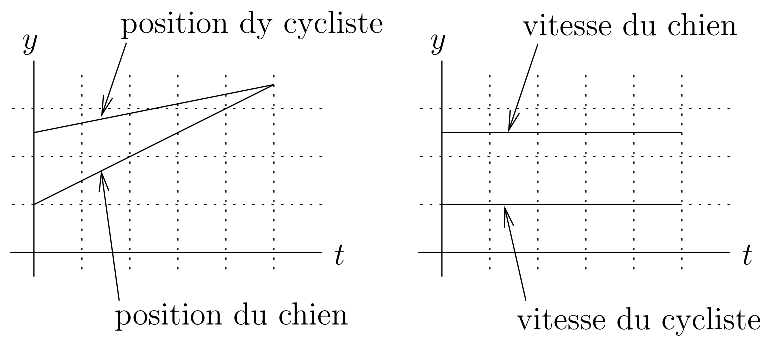


$y = T'(t)$

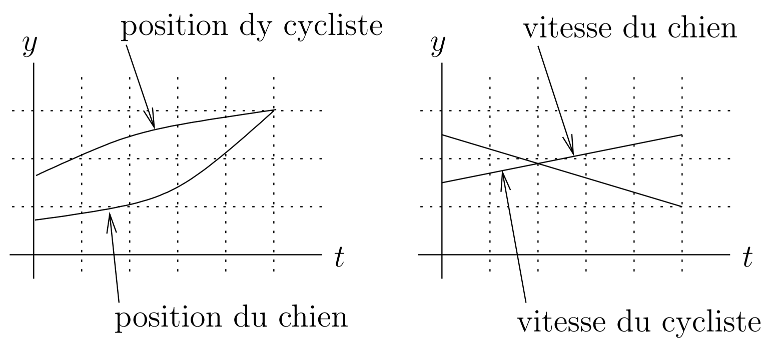
La température augmente lorsque $T'(t) > 0$ et diminue lorsque $T'(t) < 0$.

Question 4.13

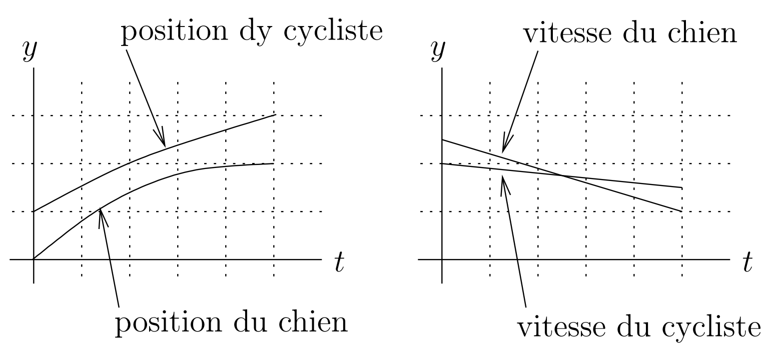
Solution:
a)



b)



c)

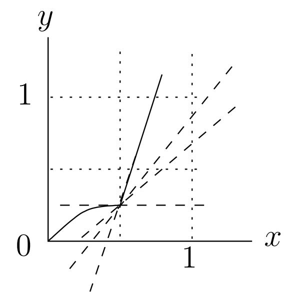


Question 4.14

Solution:
La fonction f n'est pas continue au point $x = 1$ car

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \approx 1.8 \neq 2 = \lim_{x\to 1^+} f(x) \ .$$

La fonction f n'est pas différentiable aux points $x = 0.5$ et $x = 1$. Puisque l'on vient de montrer que la fonction f n'est pas continue au point $x = 1$, elle n'est donc pas différentiable à ce point. La raison pour laquelle la dérivée de f n'existe pas au point $x = 0.5$ est donnée dans la figure suivante :



La fonction f est continue au point $x = 0.5$ mais ne possède pas de droite tangente au point $(0.5, f(0.5))$. On peut voir que

$$\lim_{x\to 0.5^-} \frac{f(x) - f(0.5)}{x - 0.5} \neq \lim_{x\to 0.5^+} \frac{f(x) - f(0.5)}{x - 0.5}$$

La limite à gauche est près de 0 alors que celle à droite est très grande. Donc la fonction f n'est pas différentiable au point $x = 0.5$.

La dérivée de f est nulle aux points x tels que la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x, f(x))$ est horizontal (i.e. de pente nulle). Ainsi, la fonction f possède une dérivée nulle au point $x \approx 1.6$ seulement.

Question 4.15

Solution:
la pente de la sécante à la courbe $y = g(x)$ entre les points x et $x + h$ est

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{(x+h) + (x+h)^2 - x - x^2}{h} = \frac{h + 2hx + h^2}{h} = 1 + 2x + h \ .$$

La pente de la tangente à la courbe $y = g(x)$ au point x est

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} (1 + 2x + h) = 1 + 2x + \lim_{h\to 0} h = 1 + 2x \ .$$

Question 4.16

Solution:
a) Il suffit de donner une valeur de t pour laquelle la pente de la droite tangente à la courbe $y = V(t)$ au point $(t, V(t))$ est positive. Par exemple, $t = 0.5$.

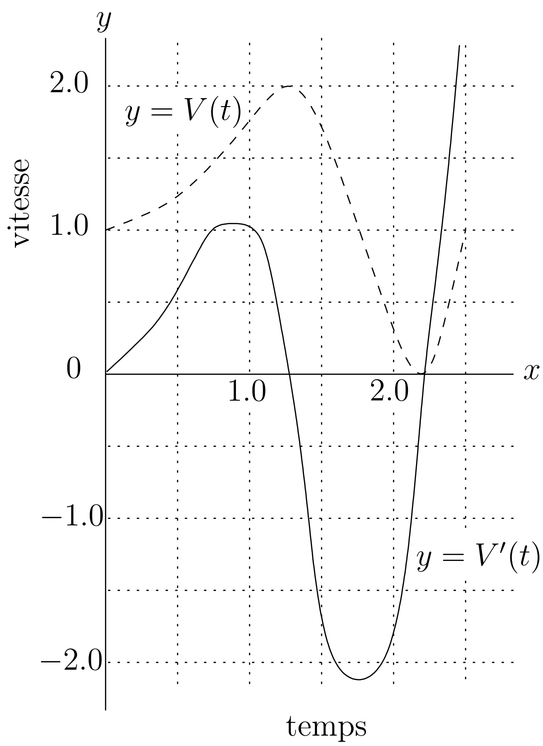
b) Il suffit de donner une valeur de t pour laquelle la pente de la droite tangente à la courbe $y = V(t)$ au point $(t, V(t))$ est négative. Par exemple, $t = 1.5$.

c) Il suffit de donner la valeur de t pour laquelle la pente de la droite tangente à la courbe $y = V(t)$ au point $(t, V(t))$ est maximale. C'est à $t \approx 2.5$.

d) Il suffit de donner la valeur de t pour laquelle la pente de la droite tangente à la courbe $y = V(t)$ au point $(t, V(t))$ est minimale. C'est à $t \approx 1.7$.

e) Il suffit de donner les valeurs de t pour lesquelles la pente de la droite tangente à la courbe $y = V(t)$ au point $(t, V(t))$ est nulle. On trouve $t \approx 1.25$ et $t \approx 2.2$.

f) Le graphe de la dérivée V' de V est donnée à la figure suivante :



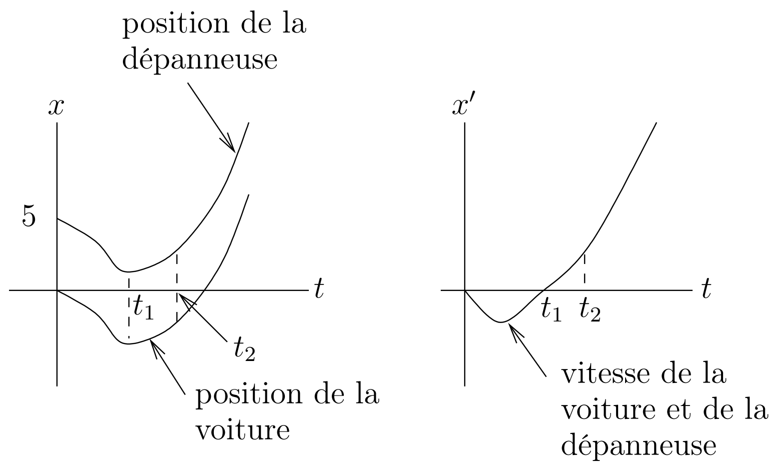
Ce graphe de la dérivée V' de la fonction V est naturellement une approximation du graphe de V' car il faudrait calculer la pente de la droite tangente à la courbe $y = V(t)$ à tous les points $(t, V(t))$ pour pouvoir tracer exactement le graphe de V'.

Question 4.17

Solution:
Si on considère la pente de la droite tangente à la courbe $y = g(x)$ aux points $(x, g(x))$, on remarque cette pente est égale à la valeur $f(x)$ en ces points (porter une attention particulière au signe de la pente). Ainsi, $g'(x) = f(x)$.

Question 4.18

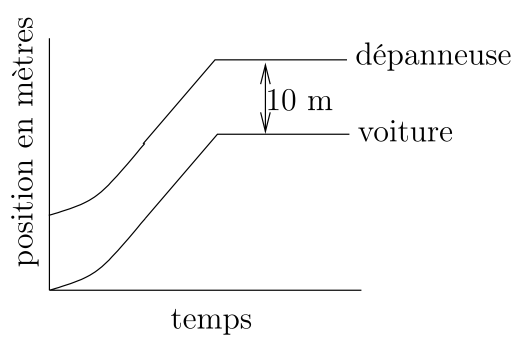
Solution:



La figure ci-dessus contient des graphes possibles pour la position et la vitesse de la voiture en fonction du temps répondant aux conditions de la question. Il en est de même pour la dépanneuse. La voiture et la dépanneuse ont la même vitesses en tous temps.

Question 4.19

Solution:



Question 4.20

Solution:
Si $v(t)$ est la vitesse du train au temps t et $u(t)$ est la vitesse du passager par rapport au train au temps t, alors $w(t) = v(t) + u(t)$ est la vitesse du passager par rapport au sol au temps t. On a $v(t) = 110$ km/h et $u(t) = -3$ km/h pour tout t. Alors, la vitesse du passager est $w(t) = 110 - 3 = 107$ km/h pour tout t. Noter que $u(t) < 0$ car le passager se déplace dans la direction opposée au mouvement du train.

Question 4.21

Question 4.22

Question 4.23

Solution:
Soit B le poids en grammes du cerveau, W le poids en grammes du poisson, et L la longueur en centimètres du poisson. On a que $B = 0.007W^{2/3}$ et $W = 0.12L^{2.53}$. De plus, on nous donne comme information que $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$ est constant et est égale à

$$\frac{20-15}{10^7} = 5 \times 10^{-7} \quad \text{cm/année} .$$

On veut calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B$ lorsque $L = 18$ cm.

En fait, lorsque que l'on considère B comme une fonction de t, on fait référence à la fonction composée $B(W(L(t)))$. Donc,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}W}\,\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}L}\,\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} .$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B = \left(\frac{2}{3} \times 0.007\, W^{-1/3}\right)\left(2.53 \times 0.12\, L^{1.53}\right)\left(5 \times 10^{-7}\right) .$$

Lorsque $L = 18$, on a $W = 0.007(18)^{2/3} = 0.04807799619\ldots$ Donc

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B &= \left(\frac{2}{3} \times 0.007(0.04807799619\ldots)^{-1/3}\right)\left(2.53 \times 0.12 \times 18^{1.53}\right)\left(5 \times 10^{-7}\right) \\ &= 1.622544808 \times 10^{-7} \ \text{gr/année.}\end{aligned}$$

Question 4.24

Question 4.25

Question 4.26

Solution:
a) $f'(x) = \frac{1}{5}x^{1/5-1} = \frac{1}{5}x^{-4/5}$

b) $h'(t) = \frac{1}{e}x^{1/e-1} = \frac{1}{e}x^{(1-e)/e}$

c) $g'(z) = 3\left(3z^{3-1}\right) + 2\left(2z^{2-1}\right) = 9z^2 + 4z$

d) On a la fonction composée $f(x) = f_1(f_2(x))$ où $f_2(x) = 2x+1$ et $f_1(y) = y^3$. Puisque $f_1'(y) = 3y^2$ et $f_2'(x) = 2$, on obtient

$$f'(x) = f_1'(f_2(x))\, f_2'(x) = 3(2x+1)^2\,(2) = 6(2x+1)^2 .$$

Question 4.27

Solution:
a) $h'(\theta) = \sec(\theta)(\sec^2(\theta) + \tan^2(\theta))$

b) $h'(x) = 135x(x^2-5)^{133/2}$

c) $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^2}$

d) $f'(t) = \dfrac{\cos(x)}{4+\sin(x)}$

e) $g(\theta) = \dfrac{\sin(\theta) + \theta\cos(\theta)}{\sqrt{2\theta\,\sin(\theta)}}$

f) Si on dérive l'expression

$$\ln|G(x)| = \ln\left(\frac{|1+x||2+x|}{|3+x|}\right) = \ln|1+x| + \ln|2+x| - \ln|3+x| \quad , \quad x > -1 \ ,$$

on obtient

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} \ .$$

Donc,

$$G'(x) = \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x}\right) G(x) = \frac{2+x}{3+x} + \frac{1+x}{3+x} - \frac{(1+x)(2+x)}{(3+x)^2} \ .$$

g) On a $F(\theta) = f_1(f_2(f_3(\theta)))$ où $f_1(y) = y^2$, $f_2(y) = \tan(y)$ et $f_3(\theta) = \sin(\theta)$. Ainsi,

$$F'(\theta) = f_1'(f_2(f_3(\theta)))\ f_2'(f_3(\theta))\ f_3'(\theta) \ .$$

Or, $f_1'(y) = 2y$, $f_2'(y) = \sec^2(y)$ et $f_3'(\theta) = \cos(\theta)$. On obtient donc

$$F'(\theta) = 2\tan(\sin(\theta))\ \sec^2(\sin(\theta))\ \cos(\theta) \ .$$

h) $f'(x) = \dfrac{3}{(3x-1)\ln(2)}$

i) $y' = \dfrac{4x}{1+16x^2} + \arctan(4x)$

Question 4.28

Solution:
a) On a

$$\ln|f(y)| = \ln\left(|5y-3|^7|y^2-1|\right) = 7\ln|5y-3| + \ln|y^2-1| \tag{4.1.1}$$

De plus, $\ln|y^2-1| = g_2(g_1(y))$ où $g_1(y) = y^2-1$ et $g_2(z) = \ln|z|$. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\ln|y^2-1| = g_2'(g_1(y))g_1'(y) = \left.\frac{1}{z}\right|_{z=y^2-1}(2y) = \frac{2y}{y^2-1}$$

Si on dérive des deux côtés de l'équation (4.1.1), on obtient

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{35}{5y-3} + \frac{2y}{y^2-1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f'(y) &= \left(\frac{35}{5y-3} + \frac{2y}{y^2-1}\right)f(y) = \left(\frac{35}{5y-3} + \frac{2y}{y^2-1}\right)(5y-3)^7(y^2-1) \\
&= 35(5y-3)^6(y^2-1) + 2y(5y-3)^7 = (5y-3)^6\big(35(y^2-1) + 2y(5y-3)\big) \\
&= (5y-3)^6(45y^2-6y-35)\ .
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
h'(t) &= \frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+t)\right)(2-t) - (1+t)\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2-t)\right)}{(2-t)^2} \\
&= \frac{(2-t)+(1+t)}{(2-t)^2} = \frac{3}{(2-t)^2}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
g'(z) &= \frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+z^2)\right)(1+2z^3) - (1+z^2)\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+2z^3)\right)}{(1+2z^3)^2} \\
&= \frac{2z(1+2z^3) - 6z^2(1+z^2)}{(1+2z^3)^2} = \frac{-2z^4-6z^2+2z}{(1+2z^3)^2}
\end{aligned}$$

Question 4.29

Solution:
a) Puisque $f(t) = f_1(f_2(t))$ où $f_1(x) = x^{33}$ et $f_2(t) = 1+3t$, on obtient

$$f'(t) = f_1'(f_2(t))f_2'(t) = 33(1+3t)^{32}\,(3) = 99(1+3t)^{32}\ .$$

b) On a que

$$\ln|h(x)| = \ln\left(\frac{|1+3x|^2}{|1+2x|^3}\right) = 2\ln|1+3x| - 3\ln|1+2x|$$

Si on dérive des deux côtés de l'équation, on obtient

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{6}{1+3x} - \frac{6}{1+2x}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \left(\frac{6}{1+3x} - \frac{6}{1+2x}\right) h(x) = \left(\frac{6}{1+3x} - \frac{6}{1+2x}\right)\left(\frac{(1+3x)^2}{(1+2x)^3}\right) \\
&= 6\left((1+2x) - (1+3x)\right)\left(\frac{(1+3x)}{(1+2x)^4}\right) \\
&= \frac{-6x(1+3x)}{(1+2x)^4} \ .
\end{aligned}$$

Notez que nous avons utilisé $\ln|1+3x| = g_2(g_1(x))$ où $g_1(x) = 1+3x$ et $g_2(z) = \ln|z|$ pour obtenir que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|1+3x| = g_2'(g_1(x))g_1'(x) = \left.\frac{1}{z}\right|_{z=1+3x}(3) = \frac{3}{1+3x} \ .$$

Nous avons procédé de façon semblable pour calculer la dérivée de $\ln|1+2x|$.

c) On a

$$g(z) = \left(1 + \frac{2}{1+z}\right)^7 = \left(\frac{3+z}{1+z}\right)^7 = (3+z)^7(1+z)^{-7} \ .$$

Donc

$$\ln|g(z)| = \ln\left(|3+z|^7|1+z|^{-7}\right) = 7\ln|3+z| - 7\ln|1+z|$$

Si on dérive des deux côtés de l'équation, on obtient

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{7}{3+z} - \frac{7}{1+z}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
g'(z) &= \left(\frac{7}{3+z} - \frac{7}{1+z}\right) g(z) = \left(\frac{7}{3+z} - \frac{7}{1+z}\right)\left(\frac{(3+z)^7}{(1+z)^7}\right) \\
&= 7\left((1+z) - (3+z)\right)\left(\frac{(3+z)^6}{(1+z)^8}\right) \\
&= \frac{-14(3+z)^6}{(1+z)^8} \ .
\end{aligned}$$

d) On a $f(x) = e^{-7x} = f_1(f_2(x))$ où $f_1(y) = e^y$ et $f_2(x) = -7x$. Donc

$$f'(x) = f_1'(f_2(x))f_2'(x) = e^{-7x}(-7) = -7e^{-7x} \ .$$

e) On a $h(x) = \ln|\ln(x)| = h_1(h_2(x))$ où $h_1(y) = \ln|y|$ et $h_2(x) = \ln(x)$ pour $x > 0$. Puisque $h_1'(y) = y^{-1}$ et $h_2'(x) = x^{-1}$, on a

$$h'(x) = h_1'(h_2(x))h_2'(x) = \left.\frac{1}{y}\right|_{y=\ln(x)} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\ln(x)} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\ln(x)} \ , \ x > 0 \ .$$

Question 4.30

Solution:
$y(t) = t^2 \sin(t)$ est une solution car

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^2 \sin(t)\right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^2\right)\sin(t) + t^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(t)\right) = 2t\sin(t) + t^2\cos(t)$$

pour tout t.

Question 4.31

Solution:
i) Avec la règle de la dérivée d'un quotient, on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+e^x}\right) &= \frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1\right)(1+e^x) - (1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+e^x)\right)}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{0\times(1+e^x) - e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} \ .\end{aligned}$$

ii) Pour utiliser la règle de la dérivée de fonctions composées, on note que

$$\frac{1}{1+e^x} = (1+e^x)^{-1} = f_1(f_2(x))$$

où $f_1(y) = y^{-1}$ et $f_2(x) = 1 + e^x$. Puisque $f_1'(y) = -y^{-2}$ et $f_2'(x) = e^x$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+e^x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1+e^x)^{-1}\right) = f_1'(f_2(x))f_2'(x) = -(1+e^x)^{-2}e^x = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} \ .$$

Question 4.32

Solution:
i) Avec les identités pour les fonctions logarithmiques, on a $f(x) = \ln(7x) = \ln(7) + \ln(x)$. Donc $f'(x) = 1/x$.

ii) Pour utiliser la règle des fonctions composées, on note que $\ln(7x) = f_1(f_2(x))$ où $f_1(y) = \ln(y)$ et $f_2(x) = 7x$. Donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(7y)) = f_1'(f_2(x))f_2'(x) = \left.\frac{1}{y}\right|_{y=7x}(7) = \frac{1}{7x}(7) = \frac{1}{x} \ .$$

Question 4.33

Solution:

i) On a la règle $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = a^x \ln(a)$ pour $a > 0$. Donc, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^x) = 7^x \ln(7)$.

ii) Pour utiliser la règle des fonctions composées, on note que $7^x = e^{\ln(7^x)} = e^{x\ln(7)} = f_1(f_2(x))$ où $f_1(y) = e^y$ et $f_2(x) = x\ln(7)$. Donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(7^x\right) = f_1'(f_2(x))f_2'(x) = e^y\Big|_{y=x\ln(7)} \ln(7) = e^{x\ln(7)}\ln(7) = e^{\ln(7^x)}\ln(7) = 7^x\ln(7)\ .$$

Question 4.34

Solution:
a)

$$h'(\theta) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin(\theta)\right)\cos(\theta) + \sin(\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\cos(\theta)\right) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\ .$$

b) On a $\cos(2x-1) = f_1(f_2(x))$ où $f_1(y) = \cos(y)$ et $f_2(x) = 2x-1$. Donc,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(2x-1) = f_1'(f_2(x))f_2'(x) = -\sin(2x-1)\,(2) = -2\sin(2x-1)\ .$$

On obtient

$$h'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(3+\cos(2x-1)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(2x-1) = -2\sin(2x-1)\ .$$

c) Puisque $e^{\cos(z)} = f_1(f_2(z))$ où $f_2(y) = e^y$ et $f_2(z) = \cos(z)$, on a

$$g'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(e^{\cos(z)}\right) = f_2'(f_1(z))f_1'(z) = e^{\cos(z)}(-\sin(z)) = -e^{\cos(z)}\sin(z)\ .$$

d) Si on n'utilise pas la formule pour calculer la dérivée de la sécante, on procéderait comme suit. Puisque

$$f(\theta) = \sec(\theta) = \left(\cos(\theta)\right)^{-1} = f_1(f_2(\theta))\ .$$

où $f_1(y) = y^{-1}$ et $f_2(\theta) = \cos(\theta)$, on trouve

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= f_1'(f_2(\theta))f_2'(\theta) = -\left(\cos(\theta)\right)^{-2}\left(-\sin(\theta)\right) = \frac{\sin(\theta)}{\left(\cos(\theta)\right)^2} \\ &= \left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)\left(\frac{1}{\cos(\theta)}\right) = \tan(\theta)\sec(\theta)\ . \end{aligned}$$

Question 4.35

Solution:
i) Puisque $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\cos(2\theta)\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\cos^2(\theta)\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin^2(\theta)\right) = -2\cos(\theta)\sin(\theta) - 2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ &= -4\cos(\theta)\sin(\theta) = -2\sin(2\theta)\ .\end{aligned}$$

On a utilisé la règle de la dérivée d'un produit pour calculer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\cos^2(\theta)\right) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\cos(\theta)\right)\cos(\theta) = -2\cos(\theta)\sin(\theta)$$

et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin^2(\theta)\right) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin(\theta)\right)\sin(\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$$

On aurait pu calculer la dérivée de $\cos^2(\theta)$ et $\sin^2(\theta)$ à l'aide de la règle de la dérivée de fonctions composées.
ii) Puisque $\cos(2\theta) = f_1(f_2(\theta))$ où $f_2(y) = \cos(y)$ et $f_2(\theta) = 2\theta$, on a

$$f'(\theta) = f_2'(f_1(z))f_1'(z) = -\sin(y)\Big|_{y=2\theta}(2) = -\sin(2\theta)\,(2) = -2\sin(2\theta)\ .$$

Question 4.36

Solution:
On a $P(G) = P(M(G))$ où $M(G) = 5G + 2$ et $P(M) = 0.5M$. Puisque $M'(G) = 5$ et $P'(N) = 0.5$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}G}P = P'(M(G))M'(G) = (0.5)(5) = 2.5 \text{ piqûres / cm}^2.$$

Question 4.37

Solution:
On a $F(I) = F(V(I))$ où $F(V) = 37 + 0.4V$ et $V(I) = 5I^2$. Puisque $F'(V) = 0.4$ et $V'(I) = 10I$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}I}F &= F'(V(I))V'(I) = (0.4)(10I) \\ &= 4I \quad \text{degrés Celsius / degré d'immunosuppression.}\end{aligned}$$

Question 4.38

Solution:
a) $h'(1) = 30$

b) $k'(1) = 36$

Question 4.39

Solution:
On a $f'(x) > 0$ pour tout x car f est une fonction strictement croissante. Ainsi, $h'(x) = \dfrac{-f'(x)}{f^2(x)} < 0$ pour tout x car $f(x) > 0$ pour tout x par hypothèse.

Question 4.40

Question 4.41

Solution:
i) Puisque
$$y = 2 + x^3 \Leftrightarrow x^3 = y - 2 \Leftrightarrow x = (y-2)^{1/3} \ ,$$
l'inverse de f est $f^{-1}(x) = (x-2)^{1/3}$. Ainsi, la règle des fonctions composées donne
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-2)^{1/3} = \frac{1}{3}(x-2)^{-2/3} \ .$$

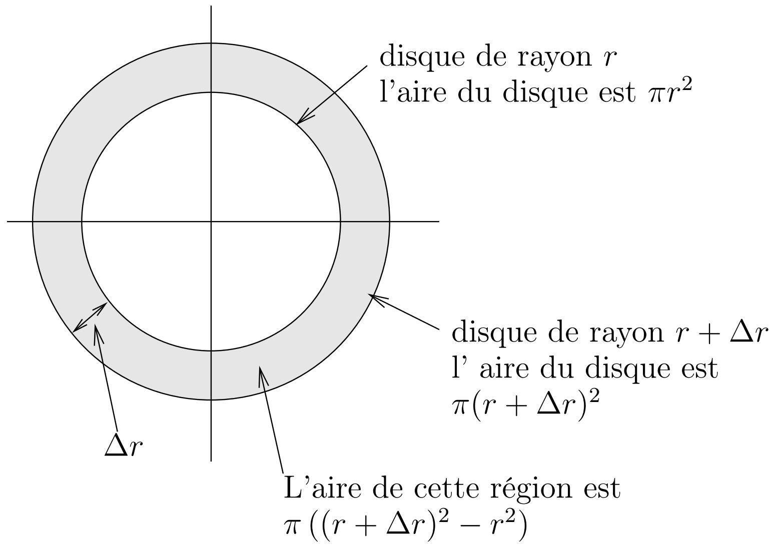
ii) Puisque $f(f^{-1}(x)) = x$ pour tout x, on a que
$$1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(f^{-1}(x))\right) = f'(f^{-1}(x))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f^{-1}(x)\right) \ .$$
Donc
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
où $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. Puisque $f'(x) = 3x^2$, on obtient
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{3((x-2)^{1/3})^2} = \frac{1}{3(x-1)^{2/3}} = \frac{1}{3}(x-2)^{-2/3} \ .$$

Question 4.42

Solution:
$y = -x + \pi$

Question 4.43

Solution:
On a $A'(r) = 2\pi r$.



Par définition, on a

$$\begin{aligned} A'(r) &= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{A(r + \Delta r) - A(r)}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2}{\Delta r} \\ &= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} (2\pi r + \pi \Delta r) = 2\pi r \end{aligned}$$

Puisqu'on divise une aire en m^2 (i.e. $\pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2$) par une longueur en m (i.e. Δr), on obtient que $A'(r)$ est en m. Ce sont les unités de $2\pi r$.

Noter que lorsque $\Delta r \to 0$, l'anneau « tend » vers un cercle de rayon r qui a une circonférence de $2\pi r$.

Les applications de la dérivée d'une fonction | 5

5.1 Exercices

Question 5.1

Solution:
On sait que la valeur de f' en un point est donné par la pente de la droite tangente à la courbe en ce point. De plus, $f'' < 0$ sur un intervalle si et seulement si f est concave sur cet intervalle, et $f'' > 0$ sur un intervalle si et seulement si f est convexe sur cette intervalle. Avec cette information, on obtient les résultats suivants :

a) Les points critiques sont -3, -2, -1, 1, 2, 4 et 5.

b) $f' > 0$ (la fonction est strictement croissante) sur les intervalles $]-\infty,-3[$, $]-2,-1[$, $]-0.5,1[$, $]2,4[$ et $]5,\infty[$.

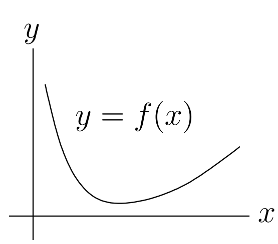
c) $f' < 0$ (la fonction est strictement décroissante) sur les intervalles $]-3,-2[$, $]-1,-0.5[$, $]1,2[$ et $]4,5[$.

d) $f' > 0$ (la fonction est convexe) sur les intervalles $]-2.5,-1.5[$, $]-0.8,0.2[$, $]1.5,3[$ et $]4.5,\infty[$.

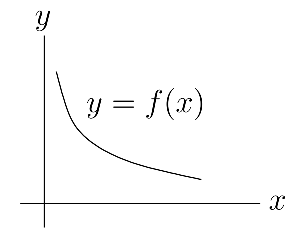
e) $f' < 0$ (la fonction est concave) sur les intervalles $]-\infty,-2.5[$, $]-1.5,-0.8[$, $]0.2,1.5[$ et $]3,4.5[$.

Question 5.2

Solution:
a) Si la dérivée f' est strictement croissante alors $f'' > 0$ et donc la fonction est convexe.



b) Si $f' < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante. Si la dérivée f' est strictement croissante alors $f'' > 0$ et la fonction est convexe.



Question 5.3

Solution:
La voiture se déplace le plus rapidement lorsque $t \approx 17$ s et $t \approx 45$ s. C'est lorsque la pente de la tangente à la courbe est la plus grande (i.e. $x'(t)$ est le plus grand).

La voiture accélère le plus rapidement au voisinage de $t = 6$ s et $t = 42$ s. C'est lorsque la pente de la tangente à la courbe augmente le plus rapidement tout en étant positive (i.e. $x''(t) > 0$ est le plus grand et $x'(t) > 0$).

La voiture décélère le plus rapidement au voisinage de $t = 12$ s. C'est lorsque la pente de la tangente à la courbe diminue le plus rapidement tout en étant positive (i.e. $x''(t) < 0$ est le plus petit et $x'(t) > 0$).

Question 5.4

Solution:
a) $h'(y) = 10y^9 - 9y^8$ et $h''(y) = 90y^8 - 72y^7$.

b) Puisque $f(x) = \dfrac{3+x}{2x} = \dfrac{3}{2}x^{-1} + \dfrac{1}{2}$, on a $f'(x) = -\dfrac{3}{2}x^{-2}$ et $f''(x) = 3x^{-3}$.

Question 5.5

Question 5.6

Question 5.7

Solution:
$H'(\theta) = \theta\cos(\theta) + \sin(\theta)$ et $H''(\theta) = 2\cos(\theta) - \theta\sin(\theta)$

Question 5.8

Solution:
a)

$$f'(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)\right)e^x + x^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x)\right) = 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x \ .$$

b)

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x)\right) e^x - (1+x)\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x)\right)}{(e^x)^2} = \frac{e^x - (1+x)e^x}{e^{2x}} = -xe^{-x} \ .$$

c)

$$g'(z) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z+4)\right)\ln(z) + (z+4)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\ln(z))\right) = \ln(z) + (z+4)\frac{1}{z} = \ln(z) + 1 + \frac{4}{z} \ .$$

d)

$$F'(w) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}(e^w)\right)\ln(w) + e^w\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}(\ln(w))\right) = e^w\ln(w) + e^w\frac{1}{w} = e^w\left(\ln(w) + \frac{1}{w}\right) \ .$$

e) Puisque $f(x) = \ln(x^7) = 7\ln(x)$, alors $f'(x) = \dfrac{7}{x}$.

f) Il faut premièrement remarquer que $e^{-z} = g_1(g_2(z))$ où $g_1(w) = e^w$ et $g_2(z) = -z$. Ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(e^{-z}\right) = g_1'(g_2(z))g_2'(z) = e^{-z}\times(-1) = -e^{-z}$. On a

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1+e^{-z})\right)(1+e^z) - (1+e^{-z})\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1+e^z)\right)}{(1+e^z)^2} \\ &= \frac{-e^{-z}(1+e^z) - (1+e^{-z})e^z}{(1+e^z)^2} = -\frac{e^{-z}+2+e^z}{(1+e^z)^2} = -\frac{\left(e^{-z/2}+e^{z/2}\right)^2}{(1+e^z)^2} \ . \end{aligned}$$

Question 5.9

Solution:

Question 5.10

Question 5.11

Question 5.12

Solution:
a) La vélocité au temps t est $p'(t) = -10,4t - 2$ m/s et l'accélération au temps t est $p''(t) = -10.4$ m/s^2.

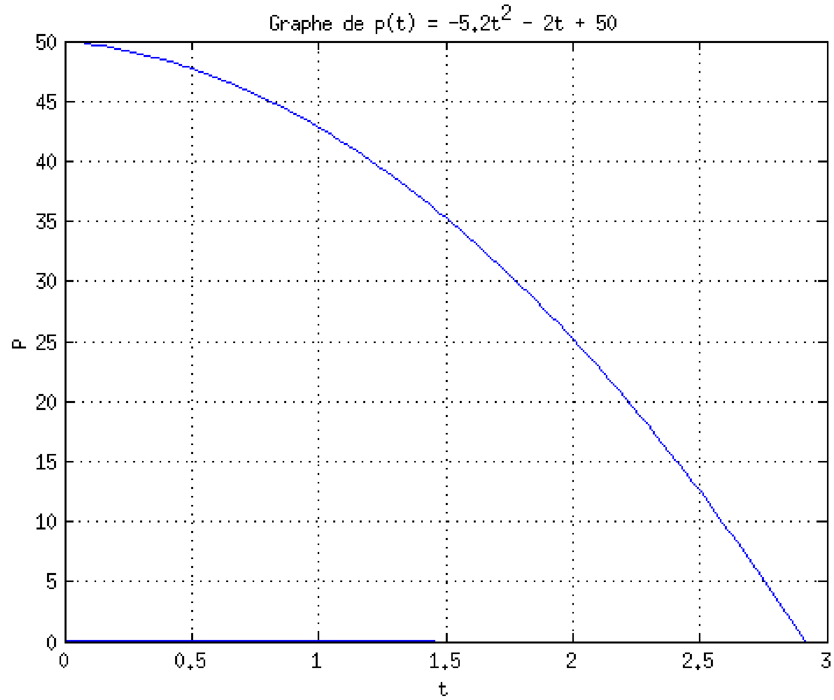
b) $p(t)$ est un simple polynomial de degré deux. On pourrait facilement tracer le graphe de p sans faire appel aux dérivées de p. Mais, comme on veut se pratiquer à tracer des graphes à l'aide de l'information fournie par les dérivées d'ordre un et deux, on ignore le fait que $p(t)$ est un simple polynomial.

Les solutions de $p(t) = 0$ sont $t = t_1 = 2.91451\ldots$ et $t = t_2 = -3.299133\ldots$. On peut ignorer t_2 puisque l'on est simplement intéressé aux valeurs positives de t.

Il n'y a qu'un seul point critique ; c'est $t = -0.1923\ldots$ s. Comme le point critique est négatif, on peut se douter que l'objet a été lancé vers le sol. On peut ignorer ce point critique puisqu'il est négatif. Pour $t \geq 0$, on aura toujours $p'(t) < 0$. Donc la fonction est strictement décroissante.

Puisque $p''(t) = -10.4 < 0$ pour tout t, la fonction sera concave sur toute la droite réelle.

Le graphe de p est



c) La hauteur de la tour est $p(0) = 50$ m. Puisque $p'(0) = -2$ m/s, l'objet est lancé vers le bas à une vitesse de 2 m/s. Puisque $p''(t) = -10.4$ m/s^2, l'accélération dû à la gravité sur cette planète est 10.4 m/s^2.

Question 5.13

Solution:
Soit $d(t)$ la distance entre le sol et l'objet au temps t. On a que $d''(t) = -22.88$. On assume que la distance positive est vers le haut, d'où le signe négatif devant 22.88. Donc $d'(t) = -22.88t + C_1$ et $d(t) = -11.44t^2 + C_1 t + C_2$ où C_1 et C_2 sont des constantes qui sont déterminées par les conditions initiales. On laisse tomber un objet d'une hauteur de 100 m. Donc, $d(0) = 100$ et $d'(0) = 0$. $d'(0) = 0$ donne $C_1 = 0$ et $d(0) = 100$ donne $C_2 = 100$. On obtient $d(t) = -11.44t^2 + 100$.

On cherche t tel que $d(t) = 0$; c'est-à-dire, $-11.44t^2 + 100 = 0$. On trouve $t \approx 2.9566$ s. La vélocité à ce moment est $d'(2.95656198) \approx -67.6461$ m/s. Comme la direction positive est vers le haut, cela veut dire que l'objet frappe le sol à une vitesse de 67.6461 m/s.

Question 5.14

Solution:
Soit $d(t)$ la distance entre le sol et l'objet au temps t. On a que $d''(t) = -22.88$. On assume que la distance positive est vers le haut, d'où le signe négatif devant 22.88. Donc $d'(t) = -22.88t + C_1$ et $d(t) = -11.44t^2 + C_1 t + C_2$ où C_1 et C_2 sont des constantes qui sont déterminées par les conditions initiales. On a que $d'(0) = 10$ m/s car on lance l'objet vers le haut. Donc, $C_1 = 10$. De plus, $d(0) = 100$. Donc, $C_2 = 100$. Ainsi,

$$d(t) = 100 + 10t - 11.44t^2 \text{ m},$$

où le temps t est en secondes.

Au moment où l'objet atteint sa hauteur maximale, la vélocité est nulle. C'est-à-dire, $d'(t) = -22.88t + 10 = 0$. Donc, $t \approx 0.43703$ s. Il s'écoule 0.43703 s avant que l'objet atteigne sa hauteur maximale. À ce moment, l'objet est à $d(0.43703) \approx 102.1853$ m.

L'objet frappe le sol lorsque $d(t) = 0$. Les deux racines du polynôme $100 + 10t - 11.44t^2$ sont

$$t_1 = \frac{-10 - \sqrt{10^2 + 4 \times 100 \times 11.44}}{-2 \times 11.44} \approx 3.425755$$

et

$$t_2 = \frac{-10 + \sqrt{10^2 + 4 \times 100 \times 11.44}}{-2 \times 11.44} \approx -2.551629 \ .$$

Naturellement, la seule réponse plausible est $t = 3.425755$ s. À ce moment, l'objet a une vélocité de $d'(3.425755) \approx -68.3813$ m/s. Comme la direction positive est vers le haut, cela veut dire que l'objet frappe le sol à une vitesse de 68.3813 m/s.

Question 5.15

Solution:
a) Soit $d(t)$ la distance entre le sol et l'objet au temps t. On a que $d''(t) = -2.15 \times 10^{-3}$. On assume que la distance positive est vers le haut, d'où le signe négatif pour l'accélération. Donc $d'(t) = -2.15 \times 10^{-3} t + C_1$ et $d(t) = -1.075 \times 10^{-3} t^2 + C_1 t + C_2$ où C_1 et C_2 sont des constantes qui sont déterminées par les conditions initiales.

L'objet a été lancé vers le haut à une vitesse de 5 m/s. Donc, $d'(0) = 5$ m/s. On trouve que $C_1 = 5$. L'objet est lancé d'une hauteur de 100 m. Donc, $d(0) = 100$ m. On trouve $C_2 = 100$.

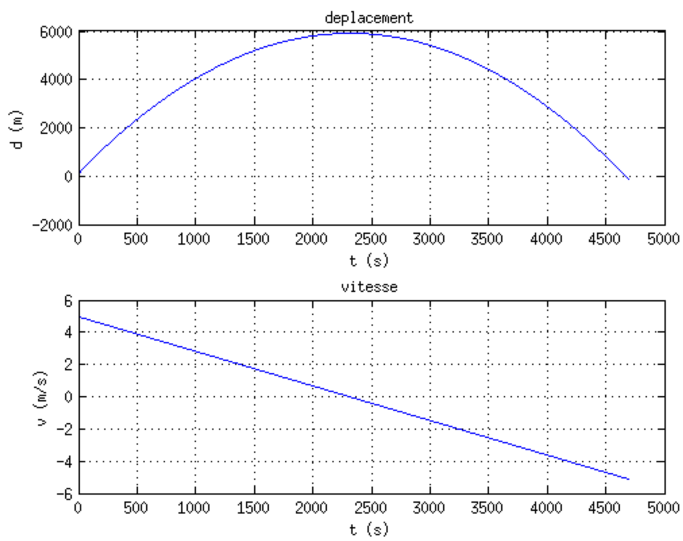
La vélocité de l'objet en fonction du temps est $v(t) = d'(t) = -2.15 \times 10^{-3} t + 5$ m/s et le déplacement en fonction du temps est $d(t) = -1.075 \times 10^{-3} t^2 + 5t + 100$ m.

b) Pour déterminer la hauteur maximale, il faut trouver les points critiques de d ; c'est-à-dire les valeurs de t telles que $v(t) = 0$. On obtient $t = 5/(2.15 \times 10^{-3}) \approx 2,325.581$ s. Puisque $d''(t) < 0$ pour tout t, la fonction d atteint son maximum absolu à $t = t_1 =\approx 2,325.581$. On obtient $d(t_1) \approx 5,913.95$ m.

c) On cherche $t > 0$ tel que $d(t) = -1.075 \times 10^{-3}t^2 + 5t + 100 = 100$ où, si vous préférez, $-1.075 \times 10^{-3}t^2 + 5t = 0$. On trouve, $t = t_2 \approx 4,651.16$ s. À ce moment, la vélocité est $v(t_2) = -5$ m/s. Ceci n'est pas surprenant car le déplacement de l'objet est décrit par une parabole. À cause de la symétrie de la parabole par rapport à son axe, la pente de la tangente à la parabole au point $(0, 100)$ est l'inverse additif de la pente à la parabole au point $(t_2, 100)$.

d) On cherche $t > 0$ tel que $d(t) = -1.075 \times 10^{-3}t^2 + 5t + 100 = 0$. On trouve, $t_3 \approx 4,671.0775$ s. la vélocité lorsque l'objet frappe le sol est $v(t_3) \approx -5.0428$ m/s

e)



Question 5.16

Solution:
a) $T(t) = p(t)M(t) = (2 \times 10^6 + 10^3t^2)(80 - 0.5t)$.

b)

$$\begin{aligned} T'(t) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2 \times 10^6 + 10^3t^2)\right)(80 - 0.5t) + (2 \times 10^6 + 10^3t^2)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(80 - 0.5t)\right) \\ &= 2 \times 10^3t(80 - 0.5t) - 0.5(2 \times 10^6 + 10^3t^2) \\ &= -1.5 \times 10^3t^2 + 1.6 \times 10^5t - 10^6 \ . \end{aligned}$$

c) On a que

$$T'(t) = -1.5 \times 10^3t^2 + 1.6 \times 10^5t - 10^6 = -1.5 \times 10^3\left(t^2 - 106.\overline{6}t + 666.\overline{6}\right) = 0$$

pour

$$t = t_1 = \frac{106.\overline{6} - \sqrt{106.\overline{6}^2 - 4 \times 666.\overline{6}}}{2} = 6.\overline{6}$$

et

$$t = t_2 = \frac{106.\overline{6} + \sqrt{106.\overline{6}^2 - 4 \times 666.\overline{6}}}{2} = 100$$

À $t = t_1$, $T(t_1) = 153674074.\overline{074}$ g, $M(t_1) = 76.\overline{6}$ g et $p(t_1) = 2004444.\overline{4} \approx 2004445$ individus.
À $t = t_2$, $T(t_2) = 3.6 \times 10^8$ g, $M(t_2) = 30$ g et $p(t_2) = 1.2 \times 10^7$ individus.

Question 5.17

Solution:
a) Le volume total de l'arbre au temps t est $V(t) = V_a(t) + V_b(t) = t^2 + 36$ cm^3. La masse de l'arbre au temps t sera $M(t) = V(t)\rho(t) = (t^2 + 36)(1.2 - 0.1t)$ g.

b) le taux de variation de la masse en fonction du temps est

$$\begin{aligned} M'(t) = V'(t)\rho(t) + V(t)\rho'(t) &= (2t)(1.2 - 0.1t) - 0.1(t^2 + 36) \\ &= -0.3t^2 + 2.4t - 3.6 \text{ g/année} \end{aligned}$$

c) La seul solution de $M(t) = 0$ est $t = 12$. Les points critiques de M sont les points où

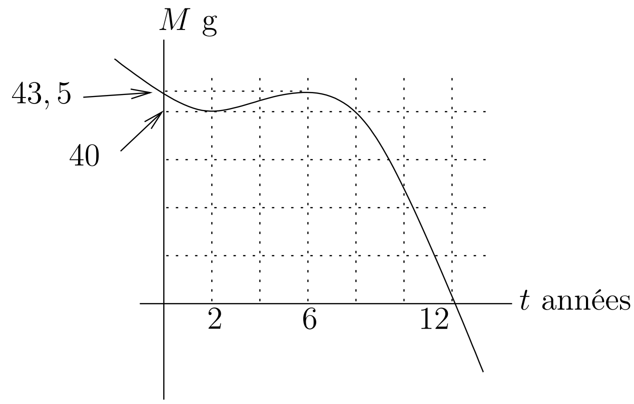
$$M'(x) = -0.3t^2 + 2.4t - 3.6 = -0.3(t^2 - 8t + 12) = -0.3(t-2)(t-6) = 0 \ .$$

On trouve $x = 2$ et 6. De plus, $\lim_{t\to\infty} M(t) = -\infty$.

On obtient le tableau suivant :

t	0	$0 < t < 2$	2	$2 < t < 6$	6	$6 < x < 12$	12	$12 < x$	$+\infty$
$M(t)$	43.2	+	40	+	43.2	+	0	−	$-\infty$
$M'(t)$	−	−	0	+	0	−	−	−	
	décroît	décroît	min. loc.	croît	max. loc.	décroît	décroît	décroît	

Le graphe de M a l'allure suivante :



Question 5.18

Question 5.19

Solution:
a) La densité au temps t est $\rho(t) = \dfrac{M(t)}{V(t)} = \dfrac{1+t^2}{1+t}$ g/cm^3.

b)

$$\rho'(t) = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+t^2)\right)(1+t) - (1+t^2)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+t)\right)}{(1+t)^2} = \frac{2t(1+t)-(1+t^2)}{(1+t)^2}$$
$$= \frac{t^2+2t-1}{(1+t)^2}$$

c) On cherche les valeurs de t pour lesquelles $\rho'(t) > 0$. Puisque $(1+t)^2 > 0$ pour tous $t \neq -1$, il suffit de trouver les valeurs de t telles que $t^2+2t-1 > 0$.

Les racines du polynôme t^2+2t-1 sont $t_1 = -1+\sqrt{2} = 0.41421356\ldots$ et $t_2 = -1-\sqrt{2} = -2.41421356\ldots$. Puisque le coefficient de t^2 dans le polynôme t^2+2t-1 est positif, on a que $t^2+2t-1 > 0$ pour $t < t_2$ et $t > t_1$.

Si on considère seulement les valeurs de $t \geq 0$, on a que $\rho'(t) > 0$ pour $t > t_1$. Donc, la densité ρ est strictement croissante sur l'intervalle $]t_1, +\infty[$.

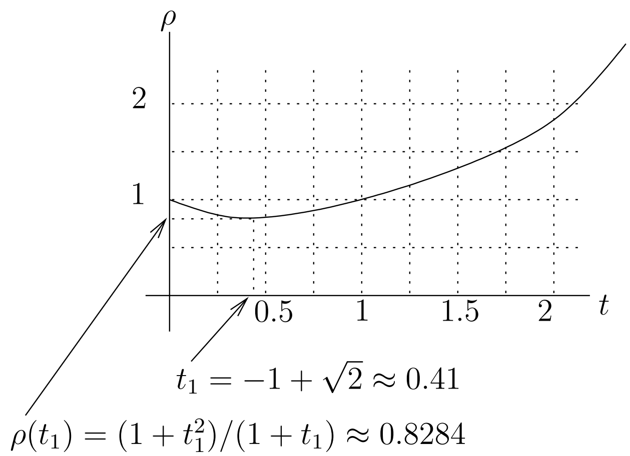
d) On trace le graphe de ρ seulement pour $t \geq 0$. En fait, pour $t < -1$, on aurait une densité négative.

On a $\rho(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$. On a calculé les points critiques de ρ en (**c**) (i.e. les points t tels que $\rho'(t) = 0$). Pour $t \geq 0$, il y a un seul point critique et c'est $t = t_1$. De plus, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1+t^2}{1+t} = +\infty$.

On obtient le tableau suivant :

t	0	$0 < t < t_1$	t_1	$t_1 \approx 0.4142 < t$	∞
$\rho(t)$	1	$+$	≈ 0.828	$+$	∞
$\rho'(t)$	$-$	$-$	0	$+$	
	décroît	décroît	min. loc.	croît	

Le graphe de ρ a l'allure suivante :



Question 5.20

Solution:
a) La taille de la population après un an est $T(p) = pf(p) = 2p\left(1 - \dfrac{p}{1000}\right) = 2p - \dfrac{1}{500}\,p^2$.

b) $T'(p) = 2 - \dfrac{1}{250}\,p$.

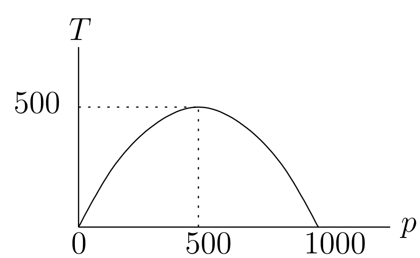
c) $T(p)$ est un simple polynomial de degré deux. On pourrait facilement tracer le graphe de T sans faire appel à la dérivée de T. Mais, comme on veut se pratiquer à tracer des graphes à l'aide de la dérivée, on ignore le fait que $T(p)$ est un simple polynomial.

Les solutions de $T(p) = 0$ sont $p = 0$ et $p = 1000$. Il n'y a qu'un seul point critique pour T (où $T'(p) = 0$) et c'est $p = 500$. De plus, p et $T(p)$ doivent être positifs car p est le nombre d'individus dans la population initialement et $T(p)$ est la taille de la population après un an. On doit donc assumer que $0 \leq p \leq 1000$.

On obtient le tableau suivant :

p	0	$0 < p < 500$	500	$500 < p < 1000$	1000
$T(p)$	0	$+$	500	$+$	0
$T'(p)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
	croît	croît	max. loc.	décroît	décroît

Le graphe de T a l'allure suivante :



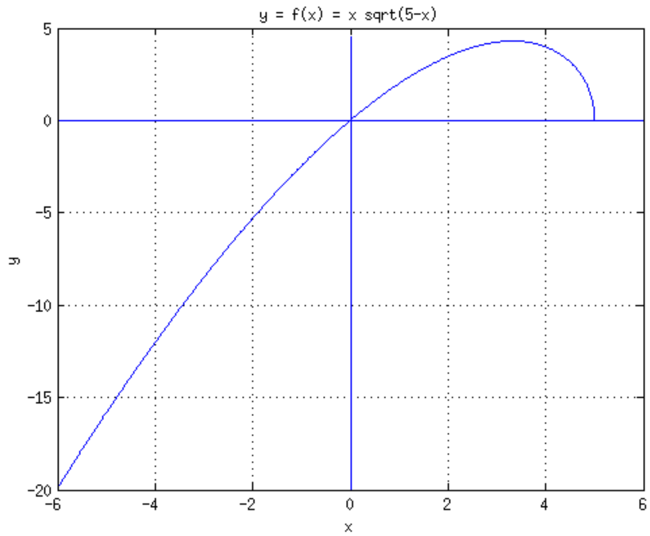


FIGURE 5.1 – Graphe de la fonction $f(x) = x\sqrt{5-x}$ de la question 21 (**a**)

Question 5.21

Solution:
a) La fonction est strictement croissante sur $]-\infty, 10/3[$ et strictement décroissante sur $]10/5, 5[$. Le seul maximum local est $f(10/3) = 10\sqrt{15}/9$. La fonction est concave sur $]-\infty, 5[$. Voir la figure 5.1.

b) La fonction est strictement croissante sur $]\pi/3, 5\pi/3[$ et $]7\pi/3, 3\pi[$ et strictement décroissante sur $]0, \pi/3[$ et $]5\pi/3, 7\pi/3[$. Le seul maximum local est $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Il y a deux minimums locaux : $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ et $f(7\pi/3) = 7\pi/3 + \sqrt{3}$. La fonction est convexe sur $]0, \pi[$ et $]2\pi, 3\pi[$ et concave sur $]\pi, 2\pi[$. Les points (π, π) et $(2\pi, 2\pi)$. sont des points d'inflexion. Voir la figure 5.2.

Question 5.22

Solution:
Les solutions de $h(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = 0$ sont les points où h coupe l'axe des x. On trouve $x = 0$, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. Les points critiques de h sont les points où $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0$. On trouve $x = 1$ et -1.

De plus, $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\infty} h(x) = +\infty$.

Notons que la fonction h est impaire car $h(-x) = -h(x)$ pour tout x. Il suffit donc de tracer le graphe de h pour $x \geq 0$. Le graphe de h pour $x < 0$ est la réflexion par rapport à l'origine du graphe de h pour $x > 0$.

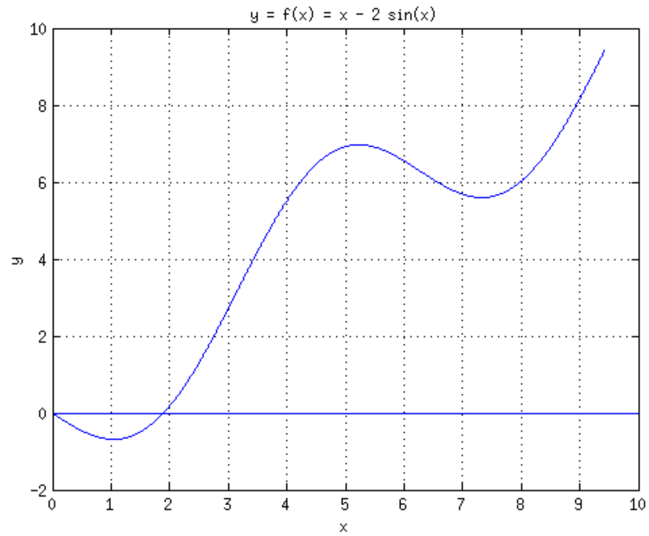
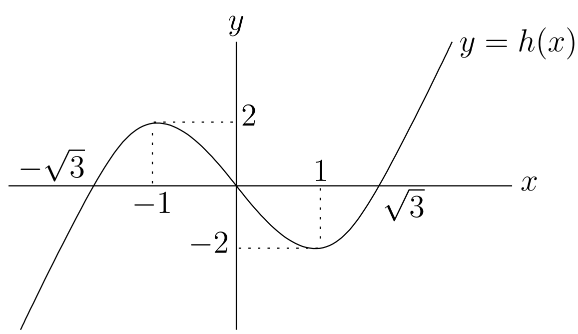


FIGURE 5.2 – Graphe de la fonction $f(x) = x - 2\sin(x)$ de la question 21 (**b**)

On obtient le tableau suivant :

x	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3} < x$	$+\infty$
$h(x)$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
	décroît	décroît	min. loc.	croît	croît	croît	



Question 5.23

Solution:
On a $h'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x-5)(x+1)$ et $h''(x) = 6x - 12$.

$h'(x)$ est définie pour tout x et $h'(x) = 0$ pour $x = -1$ et $x = 5$. Les points critiques sont $x = -1$ et $x = 5$. $h''(x) = 0$ pour $x = 2$. Donc $x = 2$ est un candidat pour un point d'inflexion. Finalement, $\lim_{x\to\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$.

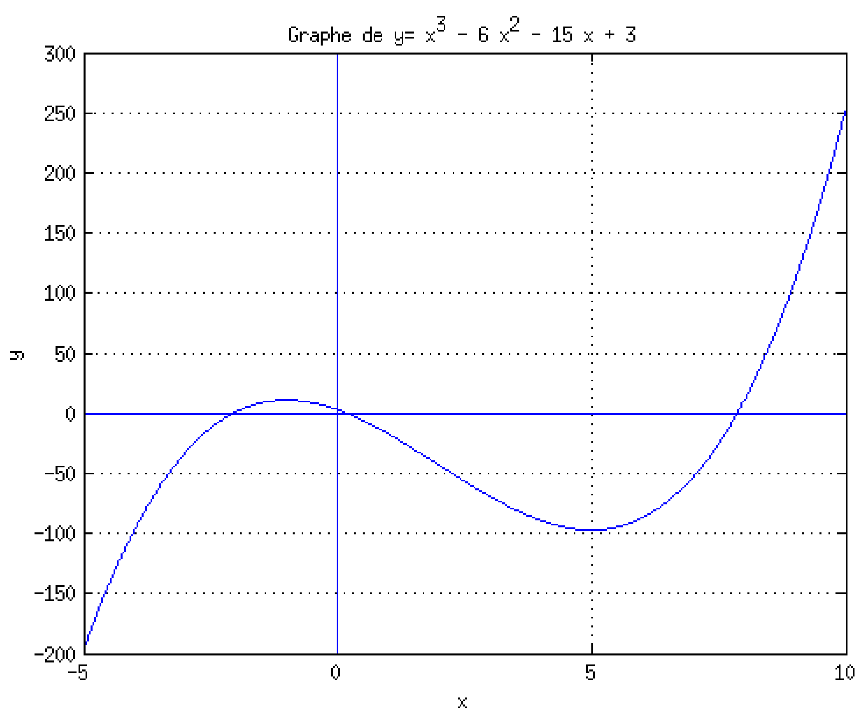
On résume nos résultats dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$x < -1$	-1	$-1 < x < 2$	2	
$f(x)$	$-\infty$	$-\vert+$	11	$+\vert-$	-43	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$\ldots$
		croît	max. local	décroît	point d'inflexion	
		concave				

	$2 < x < 5$	5	$5 < x$	$+\infty$
	$-$	-97	$-\vert+$	$+\infty$
	$-$	0	$+$	
$\ldots$	$+$	$+$	$+$	
	décroît	min. loc.	croît	
	convexe			

La fonction f change de signe dans les intervalles où l'on retrouve un des symboles $+|-$ et $-|+$. Comme f est continue, il existe un point dans un tel intervalle où la fonction f est nulle.

Le graphe de f est



Question 5.24

Solution:
On a

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2} \quad , \quad f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{24}{x^4} \ .$$

Ainsi, la fonction f n'est pas définie en $x = 0$, elle est positive pour $x > -4^{1/3}$ et négative pour $x < -4^{1/3}$.

La fonction f' n'est pas définie en $x = 0$. Elle est égale à 0 au point $x = 2$. De plus, sauf au point $x = 0$ où la dérivée n'existe pas, $f'(x)$ est négatif pour $0 < x < 2$ et positif pour $x < 0$ et $x > 2$.

La fonction f'' n'est pas définie en $x = 0$ et est positive pour tout $x \neq 0$.

Puisque

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ ,$$

il n'y a aucune asymptote horizontale. Par contre,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \ .$$

Donc la partie positive de l'axe des x est une asymptote verticale.

On résume nos résultats dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\infty < x < -4^{1/3}$	$-4^{1/3}$	$-4^{1/3} < x < 0$	0
$f(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$N.A.$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	$N.A.$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	$N.A.$
		croît convexe			asymptote verticale

$\ldots$

$\ldots$

$0 < x < 2$	2	$2 < x < \infty$	∞
$+$	$+$	$+$	$+\infty$
$-$	0	$+$	
$+$	$+$	$+$	
décroît	min. local	croît	
convexe			

Le graphe de f est donné à la figure 5.3.

Question 5.25

Solution:
a) On a $f'(x) = -e^x + (1 - x)e^x = -xe^x$ et $f''(x) = -e^x - xe^x = -(1 + x)e^x$.

$f(x) > 0$ pour $x < 1$ et $f(x) < 0$ pour $x > 1$. $f(x) = 0$ seulement pour $x = 1$.

La fonction f' est définie sur toute la droite réelle et $f'(x) = 0$ implique que $x = 0$. Donc, $x = 0$ est le seul point critique de f. On a $f'(x) < 0$ pour $x > 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x < 0$.

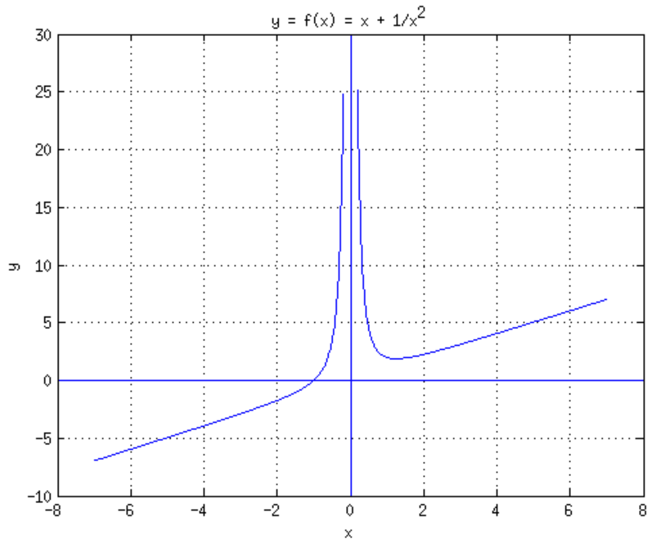


FIGURE 5.3 – Graphe de la fonction $f(x) = x + 1/x^2$ de la question 24

La fonction f'' est définie sur toute la droite réelle et $f''(x) = 0$ seulement pour $x = -1$. Donc, $x = -1$ est un candidat pour un point d'inflexion. On a que $f''(x) < 0$ pour $x > -1$ et $f''(x) > 0$ pour $x < -1$.

Finalement,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (1-x)e^x = -\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-x)e^x = 0$$

On peut vérifier numériquement ces limites à l'aide de suites $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui tendent vers plus ou moins l'infini selon le cas.

On résume nos résultats dans le tableau suivant :

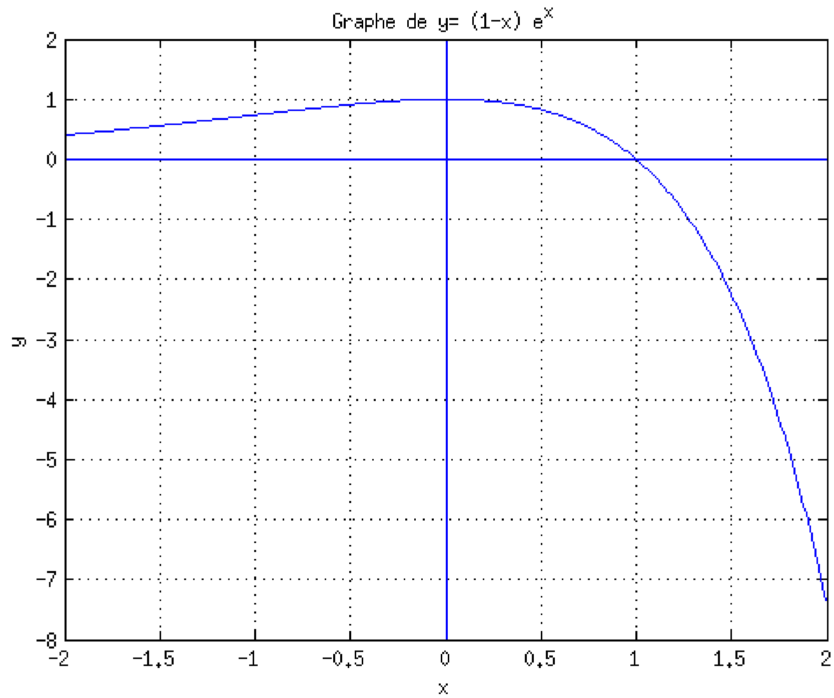
x	$-\infty$	$x < -1$	-1
$f(x)$	0	$+$	$2e^{-1}$
$f'(x)$		$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	0
	asymptote horizontale	croît convexe	point d'inflexion

…

…

$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x$	$+\infty$
$+$	1	$+$	0	$-$	$-\infty$
$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
croît	min. loc.	décroît	décroît	décroît	
concave					

Le graphe de f est ci-dessous.



b) On a $g(z) = \dfrac{e^z}{z^2} = z^{-2}e^z$. Ainsi,

$$g'(z) = -2z^{-3}e^x + z^{-2}e^z = \left(z^{-2} - 2z^{-3}\right) e^z = (z-2)\, z^{-3}e^z$$

et

$$\begin{aligned} g''(z) &= \left(-2z^{-3} + 6z^{-4}\right) e^z + \left(z^{-2} - 2z^{-3}\right) e^z = \left(z^{-2} - 4z^{-3} + 6z^{-4}\right) e^z \\ &= \left(z^2 - 4z + 6\right) z^{-4}e^z \ . \end{aligned}$$

La fonction g est définie sur toute la droite réelle sauf à l'origine. De plus, $g(z) > 0$ pour tout $z \neq 0$.

La fonction g' est aussi définie sur toute la droite réelle sauf à l'origine. De plus $g'(z) = 0$ si $z = 2$. On a donc deux point critiques, $x = 0$ et $x = 2$.

Comme g et g', la fonction g'' est aussi définie sur toute la droite réelle sauf à l'origine. De plus, $g''(z) \neq 0$ pour tout $z \neq 0$. Donc, l'origine est le seul candidat pour être un point d'inflexion.

À l'aide de suites de nombres, on peut vérifier que

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^z}{z^2} = \infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^z}{z^2} = 0\ .$$

De plus,

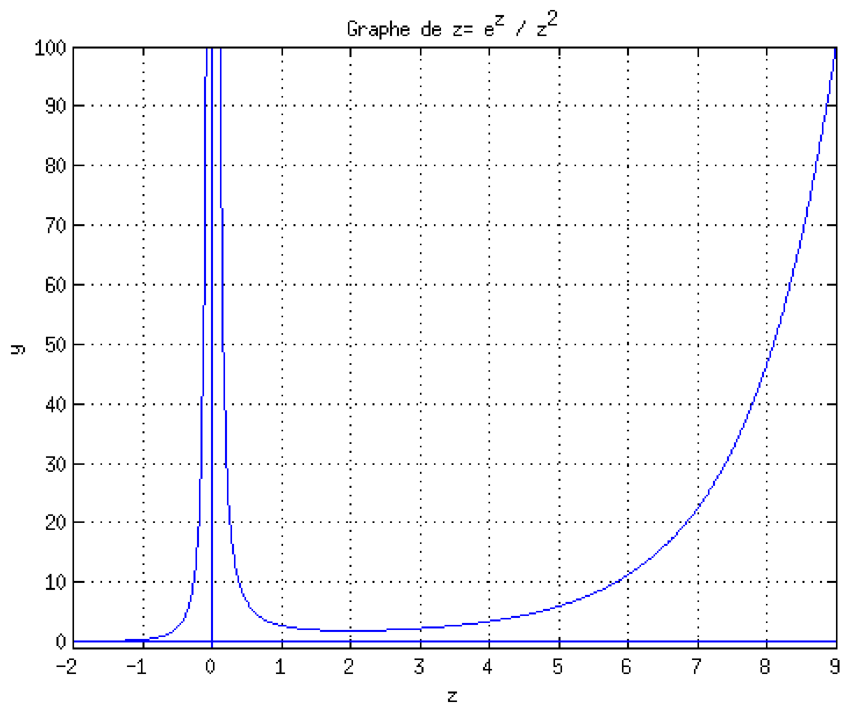
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^z}{z^2} = \infty$$

On résume nos résultats dans le tableau suivant :

z	$-\infty$	$x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x$	∞
$g(z)$	0	$+$	$N.A.$	$+$	$e^2/4$	$+$	$+\infty$
$g'(z)$		$+$	$N.A.$	$-$	0	$+$	
$g''(z)$		$+$	$N.A.$	$+$	$+$	$+$	
	asymptote	croît	asymptote	décroît	min. loc.	croît	
	horizontale	convexe	verticale	convexe			

On remarque que l'origine n'est pas un point d'inflexion. La concavité ne change pas à l'origine.

Le graphe de g est ci-dessous.



Question 5.26

Question 5.27

Solution:

x (nombre d'oeufs pondus)	5	10	20
$S(x) = xP(x)$ (nombre de poussins qui survivront)	$0.\overline{370}$	$0.196\ldots$	$0.0995\ldots$

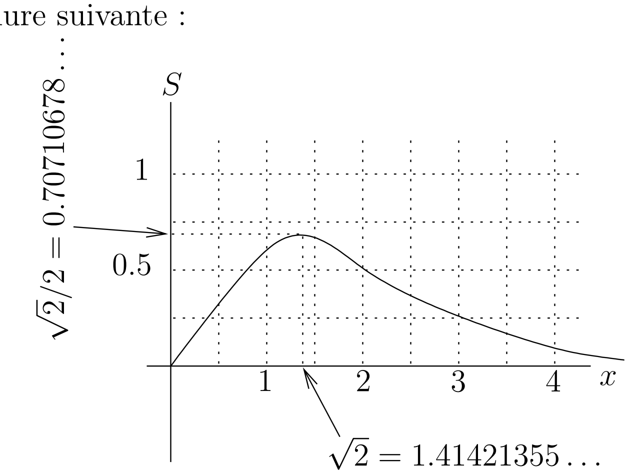
On a $S(x) = \dfrac{x}{1+0.5x^2}$ et $S'(x) = \dfrac{1-0.5x^2}{(1+0.5x^2)^2}$. La seul solution de $S(x)=0$ est $x=0$. En fait $S(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Le seul point critique (positif) de S est $x = \sqrt{2}$. De plus,

$$\lim_{x\to\infty} S(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+0.5x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1/x)}{(1/x^2)+0.5} = \frac{\big(\lim_{x\to\infty}(1/x)\big)}{\big(\lim_{x\to\infty}(1/x^2)\big)+0.5} = \frac{0}{0+5} = 0\ .$$

On obtient le tableau suivant :

x	0	$0 < x < \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} < x$	∞
$S(x)$	0	$+$	$\sqrt{2}/2$	$+$	0
$S'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	
	croît	croît	max. loc.	décroît	

Le graphe de S a l'allure suivante :



La meilleure stratégie est de pondre $\sqrt{2}$ oeufs car cela donne la valeur maximale de S.

Question 5.28

Question 5.29

Solution:

a) Il y a aucune asymptote.

b) La fonction est strictement croissante sur les intervalles $]2n\pi, (2n+1)\pi[$ où $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Elle est strictement décroissante sur les intervalles $](2n+1)\pi, (2n+2)\pi[$ où $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

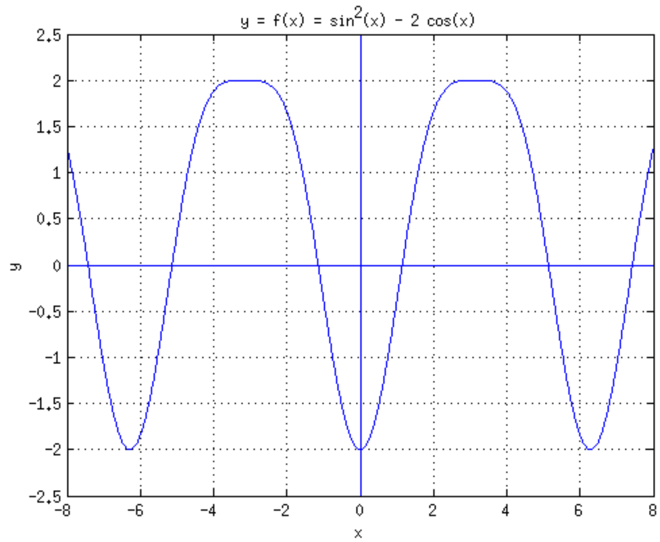


FIGURE 5.4 – Graphe de la fonction $f(x) = \sin^2(x) - 2\cos(x)$ de la question 5.4.

c) Les maximums locaux sont aux points $x = (2n+1)\pi$ où on a $f((2n+1)\pi) = 2$. Les minimums locaux sont aux points $x = 2n\pi$ où on a $f(2n\pi) = -2$.

d) La fonction est convexe sur les intervalles $]2n\pi - \frac{\pi}{3}, 2n\pi + \frac{\pi}{3}[$ et concave sur les intervalles $]2n\pi + \frac{\pi}{3}, 2n\pi + \frac{5\pi}{3}[$ où $n \in \mathbb{Z}$. Les points d'inflexions sont $(2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, -\frac{1}{4})$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

e) Voir la figure 5.4.

Question 5.30

Solution:
La masse totale de la population est donnée par $T(t) = m(t)p(t) = 10^3(1-t^2)e^t$ On a

$$T'(t) = -2te^t + (1-t^2)e^t = (1-2t-t^2)e^t$$

et

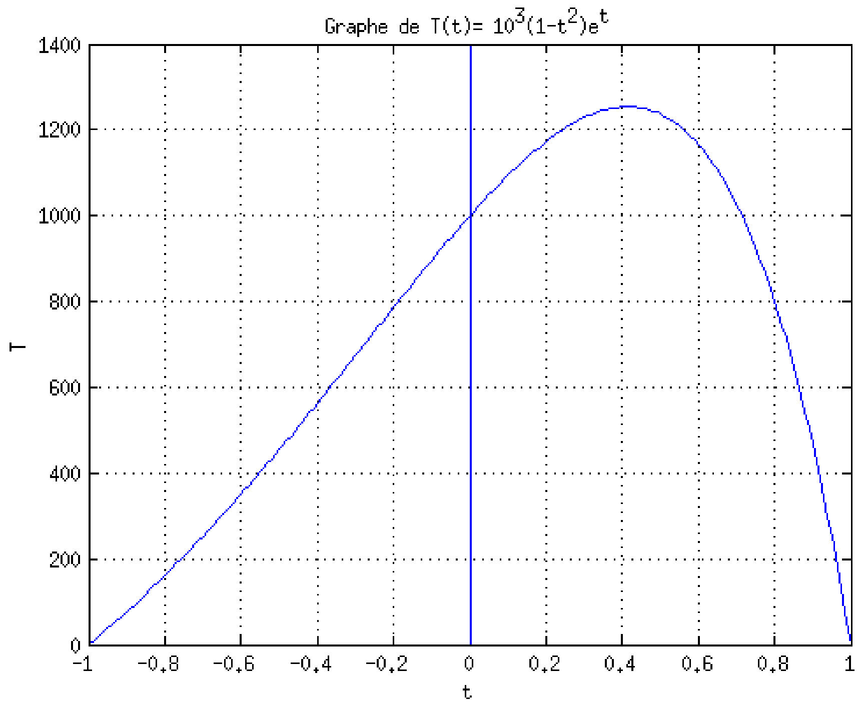
$$T''(t) = (-2-2t)e^t + (1-2t-t^2)e^t = (-1-4t-t^2)e^x \ .$$

$T(t) > 0$ pour $|t| < 1$ et $T(t) < 0$ pour $|t| > 1$. Puisque l'on parle de masse, on doit se limiter à $-1 \leq t \leq 1$. La fonction T ainsi que ses dérivées sont définies sur toute la droite réelle. On a que $T'(t) = 0$ pour $t_1 = -1 + \sqrt{2} \approx 0.41421$ et $t_2 = -1 - \sqrt{2}$. Puisque $t_2 < -1$, on ignore ce point critique. t_1 est le seul point critique dans l'intervalle $[-1, 1]$. On a que $T''(t) = 0$ pour $s_1 = -2 + \sqrt{3} \approx -0.267949$ et $s_2 = -2 - \sqrt{3}$. Puisque $s_2 < -1$, on ignore ce point. s_1 est le seul point dans l'intervalle $[-1, 1]$ où $T''(s_1) =$. C'est un candidat pour être un point d'inflexion.

On résume nos résultats dans le tableau suivant :

<table>
<tr><td>t</td><td>-1</td><td>$-1 < t < s_1$</td><td>s_1</td><td>$s_1 < t < t_1$</td><td>t_1</td><td>$t_1 < t < 1$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$T(t)$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>$10^3(1-s_1^2)e^{s_1}$</td><td>$+$</td><td>$10^3(1-t_1^2)e^{t_1}$</td><td>$+$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$T'(t)$</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$T''(t)$</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2" rowspan="2">croît
convexe</td><td rowspan="2">croît et
point
d'inflexion</td><td>croît</td><td>min. loc.</td><td colspan="2">décroît</td></tr>
<tr><td colspan="4">concave</td></tr>
</table>

Le graphe de T est ci-dessous.



Question 5.31

Solution:
Puisque $G(x) = \sqrt{x}\, e^{-x} = x^{1/2}e^{-x}$, on obtient

$$G'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}e^{-x} - x^{1/2}e^{-x} = \left(\frac{1}{2}x^{-1/2} - x^{1/2}\right) e^{-x} = \left(\frac{1}{2} - x\right) x^{-1/2}e^{-x}$$

et

$$G''(x) = \left(-\frac{1}{4}x^{-3/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2}\right) e^{-x} - \left(\frac{1}{2}x^{-1/2} - x^{1/2}\right) e^{-x} = \frac{1}{4}\left(-1 - x + 4x^2\right) x^{-3/2}e^{-x} \ .$$

La fonction G est définie sur l'intervalle $[0, \infty[$ alors que les fonctions G' et G'' sont définie sur $]0, \infty[$. On va tracer le graphe de G pour $x \geq 0$. On a que $G(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

On a que $G'(x) = 0$ pour $x = 1/2$ et G' n'est pas définie à l'origine. Les deux points critiques sont $x = 0$ et $x = 1/2$. On a que $G''(x) = 0$ pour $x = x_1 = (1 + \sqrt{17})/8 \approx 0.6404$ (la racine positive du polynôme $4x^2 - x - 1$. C'est un candidat pour être un point d'inflexion.

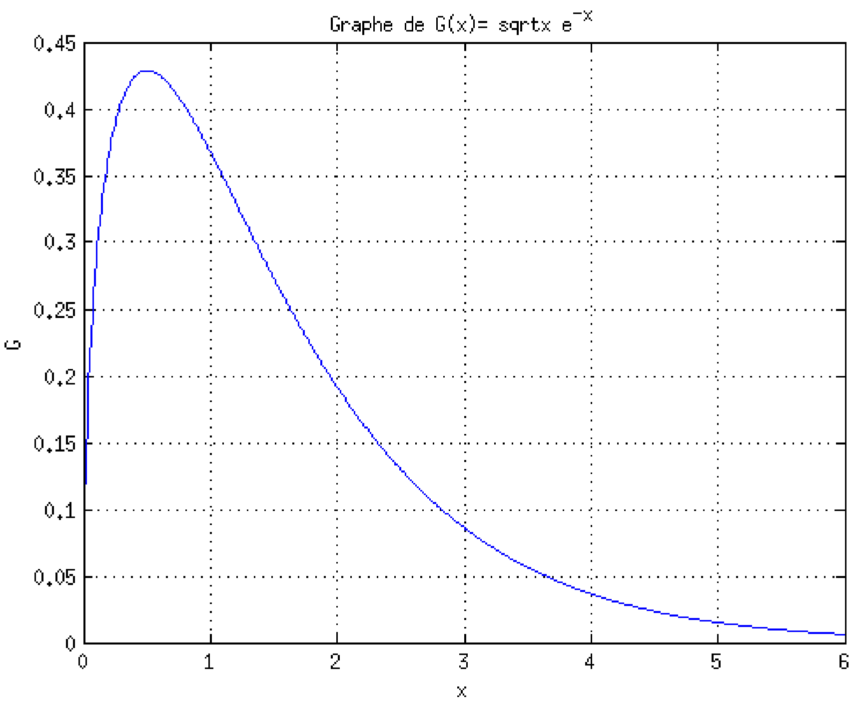
À l'aide de suites de nombres, on peut vérifier que

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} = 0 \ .$$

On résume nos résultats dans le tableau suivant :

x	0	$0 < x < 1/2$	$1/2$	$1/2 < x < x_1$	x_1	$x_1 < x$	$+\infty$
$G(x)$	0	$+$	$e^{-1/2}/\sqrt{2}$	$+$	$\sqrt{x_1}\, e^{-x_1}$	$+$	0
$G'(x)$	$N.A.$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$G''(x)$	$N.A.$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
		croît	max. loc.	décroît	décroît point d'inflexion	décroît convexe	
		concave					

Le graphe de G est ci-dessous.



Question 5.32

Solution:
On a $f'(x) = \dfrac{3x^2}{(1+x^3)^2}$ et $f''(x) = \dfrac{6x(1-2x^3)}{(1+x^3)^3}$.

La fonction f est définie sur toute la droite réelle sauf à -1. $f(x) > 0$ pour $x > 0$ et $x < -1$, $f(x) < 0$ pour $-1 < x < 0$ et $f(x) = 0$ seulement pour $x = 0$.

La fonction f' est aussi définie sur toute la droite réelle sauf à -1. $f'(x) = 0$ à $x = 0$ et $f(x) > 0$ pour tout x différent de -1 et 0.

La fonction f'' est définie sur toute la droite réelle sauf à -1. $f''(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = 2^{-1/3}$. $f''(x) > 0$ pour $x < -1$ et $0 < x < 2^{-1/3}$. $f''(x) < 0$ pour $-1 < x < 0$ et $x > 2^{-1/3}$.

De plus,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{1+x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(1/x^3)+1} = \frac{1}{\lim_{x\to\pm\infty}(1/x^3)+1} = 1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$$

Noter que l'on ne peut pas utiliser la règle de l'Hospital pour évaluer les limites $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$. Pourquoi ?

On résume nos résultats dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	
$f(x)$	1	$+$	$N.A.$	$-$	0	
$f'(x)$		$+$	$N.A.$	$+$	0	
$f''(x)$		$+$	$N.A.$	$-$	0	
	asymptote horizontale	croît convexe	point critique et d'inflexion, asymptote verticale	croît concave	point critique et d'inflexion	. . .

	$0 < x < 2^{-1/3}$	$2^{-1/3}$	$2^{-1/3} < x$	$+\infty$
	$+$	1/3	$+$	1
. . .	$+$	$+$	$+$	
	$+$	0	$-$	
	croît convexe	point d'inflexion	croît concave	asymptote horizontale

Le graphe de f est ci-dessous.

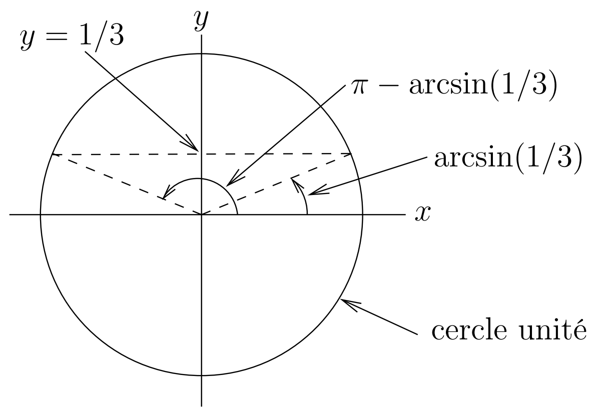
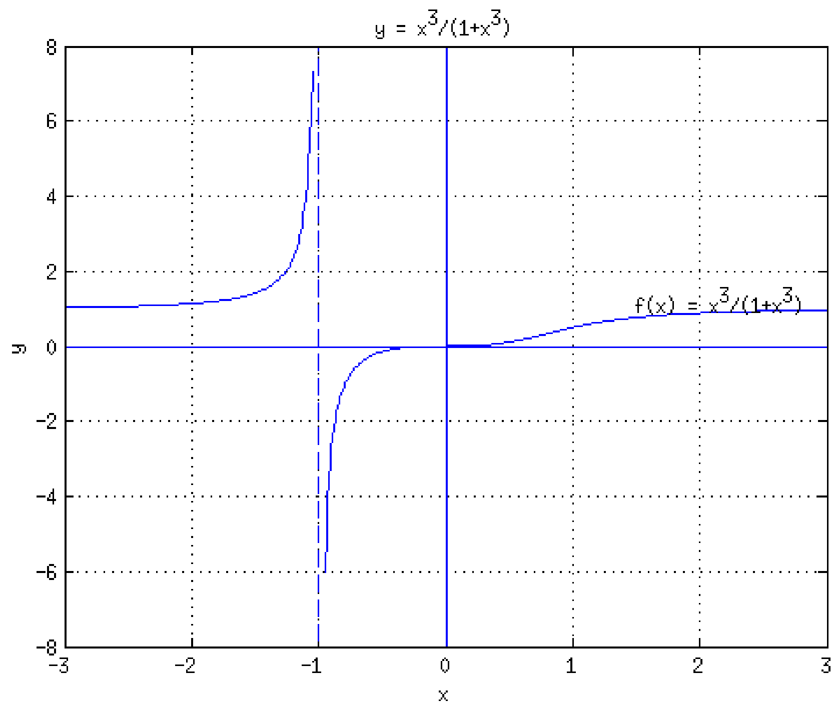


FIGURE 5.5 – Les valeurs de $\theta \in [0, 2\pi]$ telles que $\sin(\theta) = 1/3$.



Question 5.33

Solution:
a) On a $f'(\theta) = 1 - 3\sin(\theta)$ et $f''(\theta) = -3\cos(\theta)$. La fonction f et ses dérivées sont définies sur toute la droite réelle.

Les valeurs de $\theta \in [0, 4\pi]$ pour lesquelles $f'(\theta) = 0$ sont $\theta_1 = \arcsin(1/3) \approx 0.3398$, $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$, $\theta_3 = (\pi - \arcsin(1/3)) \approx 2.8018$ et $\theta_4 = \theta_3 + 2\pi$ (voir figure 5.5). Les points θ_i's sont les points critiques de f sur l'intervalle $[0, 4\pi]$.

Les valeurs de $\theta \in [0, 4\pi]$ pour lesquelles $f''(\theta) = 0$ sont $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ et $7\pi/2$. Ce sont donc nos candidats pour être des points d'inflexion.

On résume nos résultats dans le tableau suivant :

θ	0	$0<\theta<\theta_1$	θ_1	$\theta_1<\theta<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(\theta)$	3	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(\theta)$	1	$+$	0	$-$	$-$
$f''(\theta)$	-3	$-$	$-$	$-$	0
		croît	loc. max.	décroît	décroît et point d'inflexion
	concave				

…

$\frac{\pi}{2}<\theta<\theta_3$	θ_3	$\theta_3<\theta<\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$+\vert-$	$-$	$-\vert+$	$+$
$-$	0	$+$	4
$+$	$+$	$+$	0
décroît point d'inflexion	loc. min.	croît	croît et point d'inflexion
convexe			

…

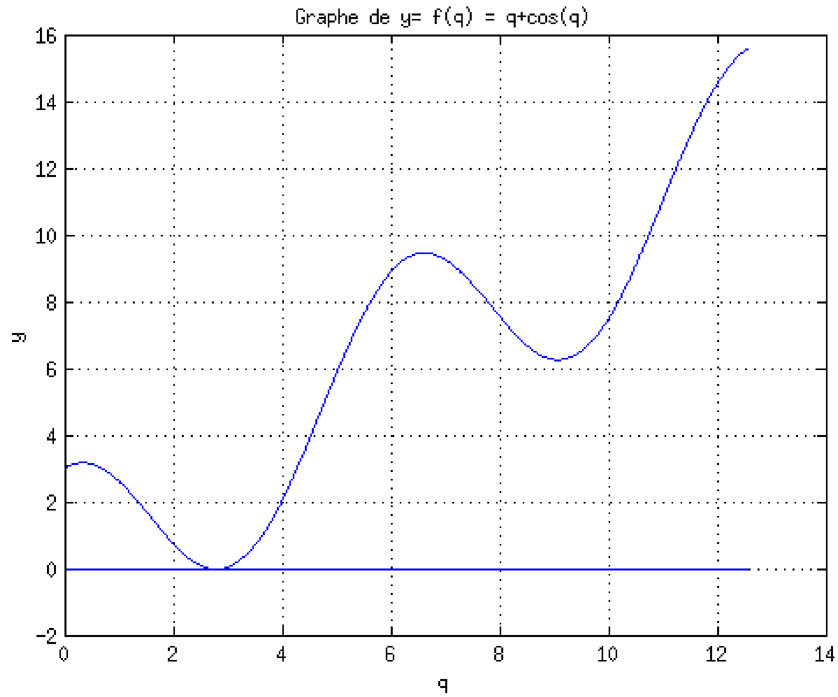
$\frac{3\pi}{2}<\theta<\theta_2$	θ_2	$\theta_2<\theta<\frac{5\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$
$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	0	$-$	$-$
$-$	$-$	$-$	0
croît	max. loc.	décroît	décroît et point d'inflexion
concave			

…

$\frac{5\pi}{2}<\theta<\theta_4$	θ_4	$\theta_4<\theta<\frac{7\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}<\theta<4\pi$	4π
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
décroît	min. loc	croît	croît et point d'inflexion	croît	croît
convexe				concave	

La fonction f change de signe dans les intervalles où l'on retrouve un des symboles $+|-$ et $-|+$. Comme f est continue, il existe un point dans un tel intervalle où la fonction f est nulle.

Le graphe de f est



b) On a $h'(t) = (\cos(t) - \sin(t))\, e^{-t}$ et $h''(t) = -2\cos(t)e^{-t}$. La fonction h et ses dérivées sont définies sur toute la droite réelle.

Les valeurs de $t \in [0, 4\pi]$ pour lesquelles $h(t) = 0$ sont les valeurs de t telles que $\sin(t) = 0$; c'est-à-dire, $n\pi$ pour $n = 0$, 1, 2, 3 et 4.

Les valeurs de $t \in [0, 4\pi]$ pour lesquelles $h'(t) = 0$ sont les valeurs de t telles que $\tan(t) = 1$ puisque $\cos(t) - \sin(t) \neq 0$ pour $t = \pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ et $7\pi/2$. Donc, les points critiques de h sur l'intervalle $[0, 4\pi]$ sont $\pi/4$, $5\pi/4$, $9\pi/4$ et $13\pi/4$. Le valeurs de $t \in [0, 4\pi]$ pour lesquelles $h''(t) = 0$ sont $(2n + 1)\pi/2$ pour $n = 0$, 1, 2 et 3. Ce sont donc nos candidats pour être des points d'inflexion.

On résume nos résultats dans le tableau suivant :

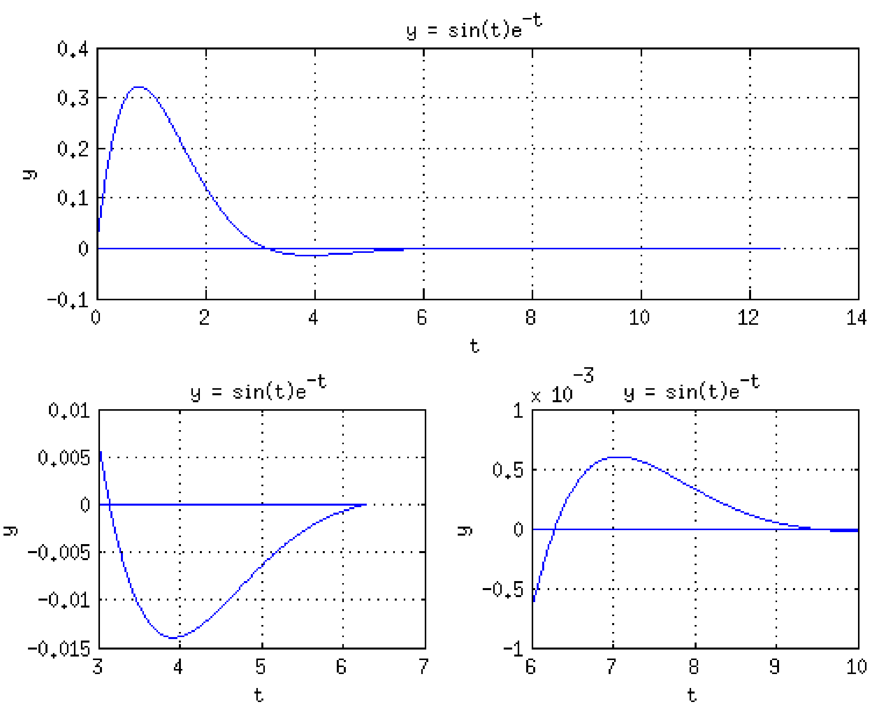
t	0	$0 < t < \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	π	
$h(t)$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	
$h'(t)$	1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	
$h''(t)$	-2	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	…
	croît	croît	loc. max.	décroît	décroît et point d'inflexion	décroît	décroît	
	concave					convexe		

	$\pi < t < \frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$	2π	
	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	
	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
...	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	...
	décroît	loc. min.	croît	croît et point d'inflexion	croît	croît	
	convexe				concave		

	$2\pi < t < \frac{9\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4} < t < \frac{5\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2} < t < 3\pi$	3π	
	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	
	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	
...	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	...
	croît	max. loc.	décroît	décroît et point d'inflexion	décroît	décroît	
	concave				convexe		

	$3\pi < t < \frac{13\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{4} < t < \frac{7\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2} < t < 4\pi$	4π
	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
...	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
	décroît	min. loc	croît	croît et point d'inflexion	croît	croît
	convexe				concave	

Le graphe de f est donné ci-dessous. Puisque e^{-t} tend très rapidement vers 0 lorsque t tend vers plus l'infini, on a aussi tracé le graphe de f sur des intervalles de plus en plus éloigné de l'origine. Porter attention à l'amplitude de f dans chacun des graphiques ci-dessous.



Question 5.34

Solution:
Comme f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[-2, 2]$, on peut utiliser le théorème des valeurs extrêmes pour trouver le maximum absolu et le minimum absolu de f sur $[-2, 2]$.

On a $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Les points critiques de f sont $x = \pm 1$. Ces points critiques sont bien dans l'intervalle $[-2, 2]$. On a $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$ et $f(2) = 2$. Ainsi, le maximum absolu est 2 que f atteint à $x = -1$ et $x = 2$. Le minimum absolu est -2 que f atteint à $x = -1$ et $x = 2$.

Question 5.35

Question 5.36

Question 5.37

Solution:
Il faut minimiser la distance $\sqrt{x^2 + y^2}$ lorsque $y = 4x+7$. Comme le point (x, y) où $\sqrt{x^2 + y^2}$ atteint son minimum est aussi le point où $x^2 + y^2$ atteint son minimum (car la racine carrée est une fonction strictement croissante), on va minimiser $D(x) = x^2 + y^2$ lorsque $y = 4x + 7$. Donc, $D(x) = x^2 + (4x + 7)^2 = 17x^2 + 56x + 49$, $D'(x) = 34x + 56$ et $D''(x) = 34$. On a un seul point critique lorsque $x = -28/17$. Puisque $D''(x) > 0$ pour tout x, la fonction est convexe pour tout x et le point critique est un minimum absolu.

Donc la distance minimum est atteinte au point

$$(x, y) = (-28/17, 4(-28/17) + 7) = (-28/17, 7/17) \ .$$

La distance minimal est $\sqrt{(-28/17)^2 + (7/17)^2} = 7/\sqrt{17}$.

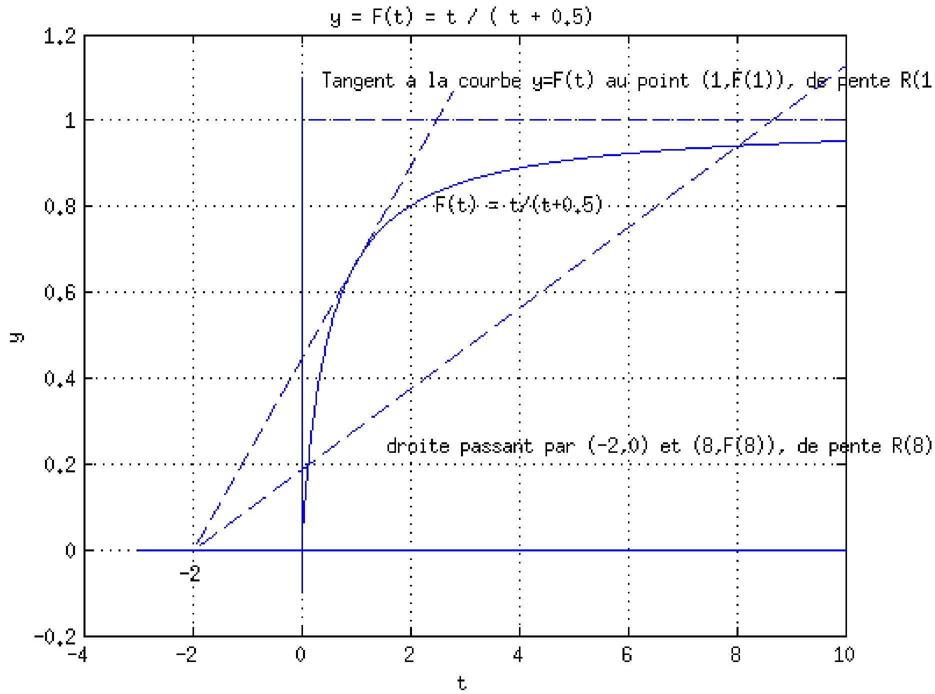
Question 5.38

Solution:
Le maximum absolu est $f(0) = 0$. Le minimum absolu est $f(-1) = -1$. C'est aussi un minimum local.

Question 5.39

Question 5.40

Solution:
On a $F(t) = \dfrac{\beta t}{t + \alpha}$ avec $\beta = 1$ et $\alpha = 0.5$. De plus, on a montré dans les notes que $T = \sqrt{\alpha\tau}$ où τ est le temps en minutes que prend une abeille pour se rendre d'une fleur à un autre fleur. Comme $T = 1$, on trouve $1 = \sqrt{0.5\tau}$ et donc $\tau = 2$ minutes.



Question 5.41

Solution:
Soit $f(q) = \dfrac{q}{P(q)} = \dfrac{q}{1+q^2}$. On a $q \geq 0$. On ne peut pas utiliser le théorème des valeurs extrême car l'intervalle n'est pas borné. On doit donc étudier le graphe de f sur l'intervalle $[0, \infty[$.

On a $f'(q) = \dfrac{1-q^2}{(1+q^2)^2}$. La fonction f a un seul point critique positif, c'est $q = 1$. De plus, $\displaystyle\lim_{q\to\infty} f(q) = 0$. On obtient le tableau suivant :

q	0	$0<q<1$	1	$1<q$	∞
$f(q)$	0	$+$	$1/2$	$+$	0
$f'(q)$	$+$	$+$	0	$-$	
	croît	croît	max. loc.	décroît	

Puisqu'il n'y a pas de points critiques autres que 1, le maximum local est aussi le maximum absolu (tracer le graphe de f pour vous en convaincre).

Question 5.42

Solution:
a) Considérons $f(x) = x^{2001}$. On cherche à estimer $f(1.002)$. L'approximation linéaire de f au voisinage de $x = 1$ est $p(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + 2001(x-1)$. Ainsi,

$$f(1.002) \approx p(1.002) = 2001(1.002 - 1) + 1 = 5.002 .$$

Ce n'est pas une bonne approximation car $1.002^{2001} \approx 54.489244196998690$.

b) Considérons $f(x) = \sin(x)$. On cherche à estimer $f(0.02)$. L'approximation linéaire de f au voisinage de l'origine est $p(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$. Ainsi,

$$f(0.02) \approx p(0.02) = 0.02 \ .$$

C'est une bonne approximation car $\sin(0.02) \approx 0.019998667$.

Question 5.43

Solution:
a) Considérons $f(x) = x^{2001}$. On cherche à estimer $f(1.002)$. L'approximation quadratique de f au voisinage de $x = 1$ est

$$\begin{aligned} p(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = 1 + 2001(x-1) + \frac{2001 \times 2000}{2}(x-1)^2 \\ &= 1 + 2001(x-1) + 2.001 \times 10^6 (x-1)^2 \ . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(1.002) \approx p(1.002) = 1 + 2001(1.002 - 1) + 2.001 \times 10^6 (1.002 - 1)^2 \approx 13.006 \ .$$

Ce n'est pas une bonne approximation de $1.002^{2001} \approx 54.489244196998690$ mais elle est meilleure que celle obtenue avec l'approximation linéaire.

b) Considérons $f(x) = \sin(x)$. On cherche à estimer $f(0.02)$. L'approximation quadratique de f au voisinage de $x = 0$ est

$$p(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-1)^2 = x$$

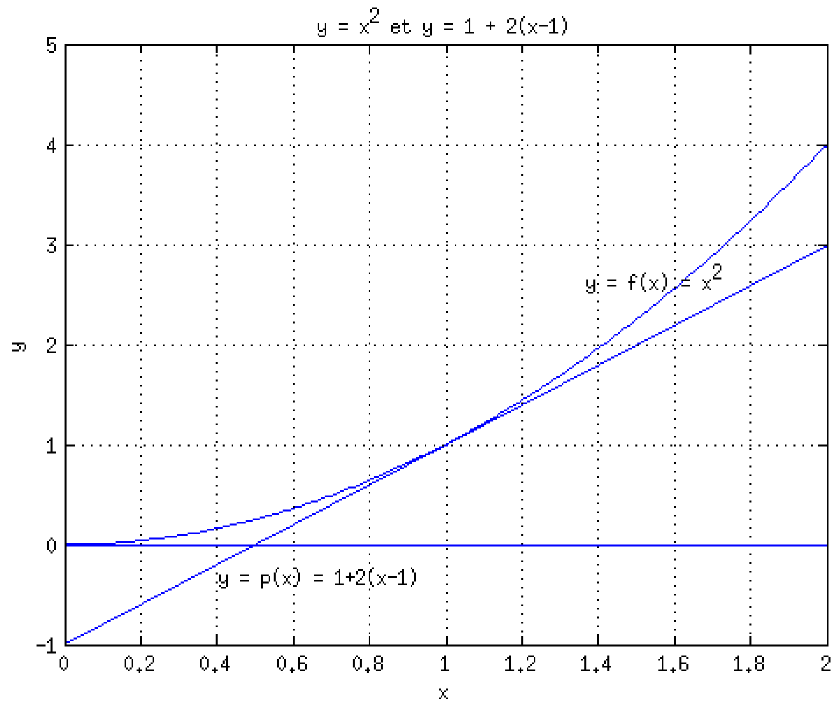
Il n'y a pas d'approximation quadratique de $\sin(x)$ pour x près de l'origine.

Question 5.44

Solution:
On utilise l'approximation linéaire de f au voisinage de $x = 1$.

$$f(x) \approx p(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + 2(x-1) \ .$$

On a donc $f(1.1) \approx 1 + 2(1.1 - 1) = 1.2$ et $f(0.9) \approx 1 + 2(0.9 - 1) = 0.8$.



Les approximations obtenues de l'approximation linéaire sous-estime les valeurs exactes de $f(0.9)$ et $f(1.1)$. Cela est dû au fait que f est convexe. Donc, la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ est en dessous de la courbe $y = f(x)$.

Question 5.45

Solution:
Comme le polynôme de Taylor d'une fonction au voisinage d'un point donné est unique, le polynôme de Taylor de p au voisinage de l'origine est p lui-même.

Question 5.46

Solution:
Le polynôme de Taylor de degré trois de h au voisinage de $x = 1$ est

$$p(x) = h(1) + h'(1)(x-1) + \frac{h''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{h'''(1)}{3!}(x-1)^3 \ .$$

Puisque $h(x) = \ln(x)$, $h'(x) = 1/x$, $h''(x) = -1/x^2$ et $h'''(x) = 2/x^3$, on obtient

$$p(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \ .$$

Question 5.47

Solution:
On utilise le polynôme de Taylor de degré trois de f au voisinage de $t = 3$. Puisque $f(t) = (1+t)^{-1/2}$, $f'(t) = -\dfrac{1}{2}(1+t)^{-3/2}$, $f''(t) = \dfrac{3}{4}(1+t)^{-5/2}$ et $f'''(t) = -\dfrac{15}{8}(1+t)^{-7/2}$, on obtient le polynôme de Taylor suivant :

$$\begin{aligned} p(t) &= f(3) + f'(3)(t-3) + \frac{f''(3)}{2}(t-3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!}(t-3)^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(t-3) + \frac{3}{128}(t-3)^2 - \frac{15}{2^{10}}(t-3)^3 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(3.1) \approx p(3.1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(3.1-3) + \frac{3}{128}(3.1-3)^2 - \frac{15}{2^{10}}(3.1-3)^3 \approx 0.49396972 \ .$$

Question 5.48

Solution:
a) L'approximation linéaire de $g(x) = \ln(x)$ au voisinage du point $x = 1$ est $p_1(x) = g'(1)(x-1) + g(1)$. Or, $g'(1) = \left.\dfrac{1}{x}\right|_{x=1} = 1$ et $g(1) = \ln(1) = 0$. Ainsi, $p_1(x) = x - 1$.
b) L'approximation linéaire de $h(x) = x^2 - 1$ au voisinage du point $x = 1$ est $p_2(x) = h'(1)(x-1) + h(1)$. Or, $h'(1) = 2x\big|_{x=1} = 2$ et $h(1) = 0$. Ainsi, $p_2(x) = 2(x-1)$.
c) On a

$$\lim_{x\to1} \frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{2x-2} = \lim_{x\to1} \frac{1-(1/x)}{2-(2/x)} = \frac{1-\lim_{x\to1}(1/x)}{2-\lim_{x\to1}(2/x)} = \frac{1}{2} \ .$$

De plus, grâce à la règle de l'Hospital, on obtient

$$\underbrace{\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x^2-1}}_{\text{forme } 0/0} = \lim_{x\to1} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2} \ .$$

Question 5.49

Solution:
Puisque $\dfrac{\mathrm{d}^9}{\mathrm{d}x^9}\left(x^k\right) = 0$ pour $k < 9$ et $\dfrac{\mathrm{d}^9}{\mathrm{d}x^9}\left(x^9\right) = 9!$, on a que $\dfrac{\mathrm{d}^9}{\mathrm{d}x^9}p(x) = 7 \times 9! > 0$ pour tout x.

Question 5.50

Solution:
L'approximation linéaire de f au voisinage de $x = 1$ est donnée par l'équation de la droite tangente au graphe de f au point $(1, f(1))$. On a

$$f(x) \approx y = p_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1)$$

pour x près de 1. Puisque $f'(x) = -3x^{-4}$, on obtient $f'(1) = -3$. Donc,

$$f(x) \approx y = p_1(x) = 1 - 3(x-1) = -3x + 4$$

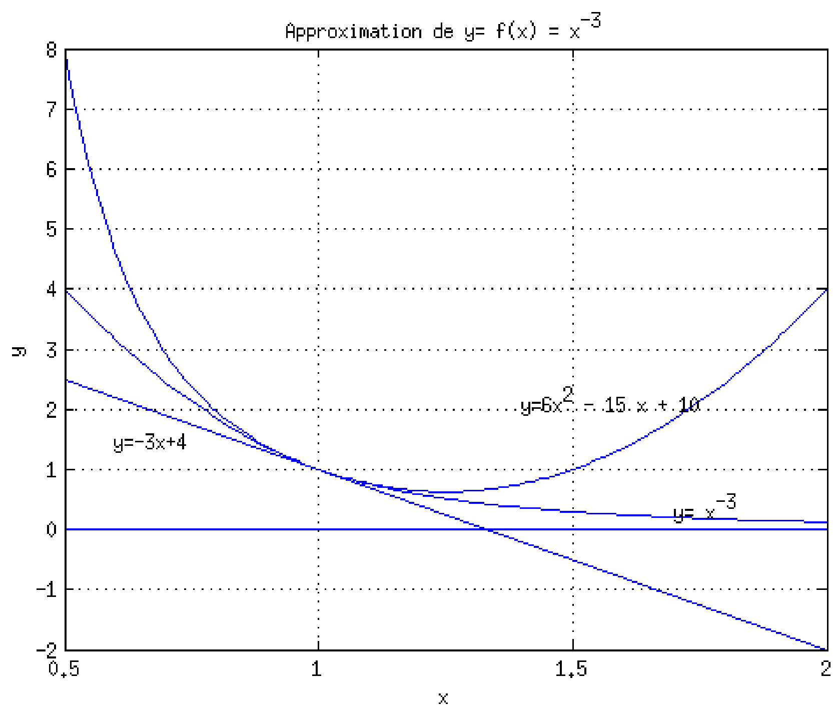
pour x près de 1 est l'approximation linéaire cherchée.

On cherche un polynôme $p_2(x) = a + bx + cx^2$ tel que $p_2(1) = f(1)$, $p_2'(1) = f'(1)$ et $p_2''(1) = f''(1)$. Puisque $p_2(1) = a + b + c$, $p_2'(1) = b + 2c$, $p_2''(1) = 2c$, $f(1) = 1$, $f'(1) = -3$ et $f''(1) = 12$, on obtient le système d'équations linéaires

$$a + b + c = 1 \quad , \quad b + 2c = -3 \quad , \quad 2c = 12 \ .$$

Si on résout ce système, on trouve $a = 10$, $b = -15$ et $c = 6$. Donc,

$$p_2(x) = 10 - 15x + 6x^2 \ .$$



Question 5.51

Question 5.52

Question 5.53

Question 5.54

Question 5.55

Question 5.56

Question 5.57

Question 5.58

Solution:
Pour répondre à cette question, nous utilisons la règle de l'Hospital.

a) On a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{0.1x^{0.5}}{30\ln(x)}}_{\text{forme }\infty/\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{0.05x^{-0.5}}{30/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{0.05x^{0.5}}{30} = +\infty\ .$$

Donc f croît plus rapidement que g.

b) On a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-2x}}{x^{-2}} = \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}}_{\text{forme }\infty/\infty} = \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2e^{2x}}}_{\text{forme }\infty/\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{4e^{2x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}e^{-2x} = 0$$

Donc f tend vers 0 plus rapidement que g.

c) On a $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\lim_{x\to0^+}\frac{x^{-1}}{-\ln(x)}}_{\text{forme }\infty/\infty} = \lim_{x\to0^+}\frac{-2x^{-2}}{-1/x} = \lim_{x\to0^+}\frac{2}{x} = \infty$$

Donc f tend vers $+\infty$ plus rapidement que g.

Question 5.59

Solution:

a) Puisque $f(t) = \dfrac{1+t+t^2}{1+t}$ est une fonction continue à $t=0$, on a

$$\lim_{t\to0}\frac{1+t+t^2}{1+t} = \lim_{t\to0} f(t) = f(0) = 1\ .$$

b) Puisque $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t^n} = 0$ pour $n>0$, on a

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1+t}{1+t+t^2} = \lim_{t\to\infty}\frac{(1/t^2)+(1/t)}{(1/t^2)+(1/t)+1} = \frac{\lim_{t\to\infty}(1/t^2)+\lim_{t\to\infty}(1/t)}{\lim_{t\to\infty}(1/t^2)+\lim_{t\to\infty}(1/t)+1} = \frac{0}{1} = 0\ .$$

c) Puisque $f(z) = \dfrac{3z}{1+\ln(1+z)}$ est continue au point $z = 0$, on a

$$\lim_{z\to 0} \frac{3z}{1+\ln(1+z)} = \lim_{z\to 0} f(z) = f(0) = \frac{0}{1+0} = 0 \ .$$

d) On utilise la règle de l'Hospital.

$$\underbrace{\lim_{z\to\infty} \frac{3z}{1+\ln(1+z)}}_{\text{forme } \infty/\infty} = \lim_{z\to\infty} \frac{3}{1/(1+z)} = \lim_{z\to\infty} 3(1+z) = \infty \ .$$

Question 5.60

Solution:
a) La limite est du type $0\cdot\infty$. Par contre,

$$\lim_{x\to\pi^+} \csc(5x)\sin(3x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$$

où la limite de droite est du type $0/0$. On peut donc utiliser la règle de l'Hospital pour obtenir.

$$\lim_{x\to\pi^+} \csc(5x)\sin(3x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{3\cos(3x)}{5\cos(5x)} = \frac{3\cos(3\pi)}{5\cos(5\pi)} = \frac{3}{5} \ .$$

b) On a une limite du type $\infty - \infty$. Par contre,

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)}$$

où la limite de droite est du type $0/0$. On peut utiliser la règle de l'Hospital pour obtenir

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x\cos(x)} \ .$$

Cette dernière limite est encore du type $0/0$. Un deuxième appel à la règle de l'Hospital donne

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)} = \frac{\sin(0)}{2\cos(0)-0\sin(0)} = 0 \ .\end{aligned}$$

Question 5.61

Solution:
$x_3 = 2.1148$

Question 5.62

Question 5.63

Solution:
$x = c$ est une solution de $e^x = x + 2$ si et seulement si $x = c$ est une solution de $f(x) = e^x - x - 2 = 0$. Pour répondre à la question. il suffit donc de trouver la solution de $f(x) = 0$. C'est le genre de problème que l'on peut résoudre numériquement à l'aide de la méthode de Newton.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

b) Pour choisir x_0 on remarque que $f(1) \approx -0.2817 < 0$ et $f(2) \approx 3.389 > 0$. Puisque f est une fonction continue sur l'intervalle $[1, 2]$, on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour conclure qu'il existe une valeur c entre 1 et 2 telle que $f(c) = 0$. On choisit donc $x_0 \in [1, 2]$.

c) Prenons $x_0 = 1.5$. On a les quatre itérations suivantes :

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{e^{n_0} - x_0 - 2}{e^{x_0} - 1} \approx 1.218042 \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{e^{n_1} - x_1 - 2}{e^{x_1} - 1} \approx 1.1497723 \\
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = x_2 - \frac{e^{n_2} - x_2 - 2}{e^{x_2} - 1} \approx 1.1462025 \\
x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = x_3 - \frac{e^{n_3} - x_3 - 2}{e^{x_3} - 1} \approx 1.1461932
\end{aligned}$$

Donc $c \approx 1.1461932$.

Question 5.64

Solution:
a) L'équation de la sécante qui passe par $(x_i, f(x_i)$ et $(x_{i-1}, f(x_{i-1})$ est

$$y = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}\,(x - x_i) + f(x_i)\ .$$

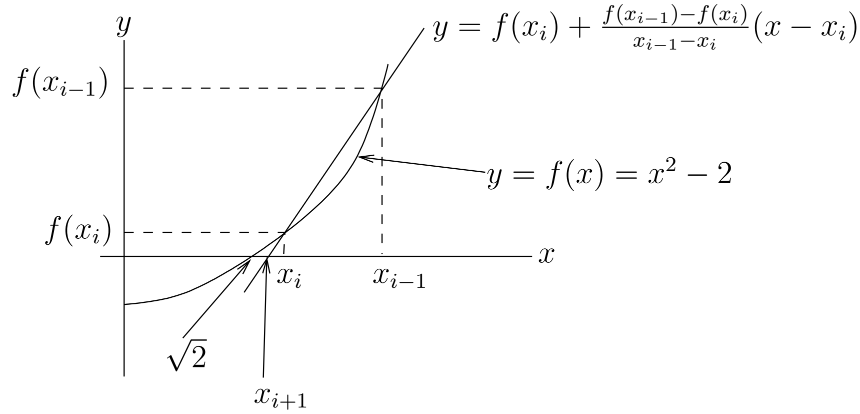
Lorsque cette droite coupe l'axe des x (c'est-à-dire, lorsque $y = 0$), on a

$$0 = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}\,(x - x_i) + f(x_i)\ .$$

Si on résout cette équation pour x, on trouve

$$x = x_i - f(x_i)\left(\frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}\right)^{-1} \quad .$$

C'est la formule qui donne x_{i+1}.



b) Comme à la question 63, on considère la fonction $f(x) = e^x - x - 2$. On choisit x_0 et x_1 dans l'intervalle $[1, 2]$ où f change de signe. Soit $x_0 = 1.6$ et $x_1 = 1.7$. On obtient les quatre itérations suivantes :

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - f(x_1)\left(\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right)^{-1} = f(1.7) - f(1.7)\left(\frac{f(1.7)-f(1.6)}{1.7-1.6}\right)^{-1} \\
&\approx 1.2785497 \\
x_3 &= x_2 - f(x_2)\left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right)^{-1} \approx 1.1882991 \\
x_4 &= x_3 - f(x_3)\left(\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\right)^{-1} \approx 1.150012 \\
x_5 &= x_4 - f(x_4)\left(\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}\right)^{-1} \approx 1.1463089
\end{aligned}$$

Donc $e^c = c + 2$ pour $c \approx 1.1463089$. On remarque que la méthode de la sécante tend vers la solution de $f(x) = 0$ plus lentement que la méthode de Newton.

Question 5.65

Solution:
La quantité de nectar récoltée par une abeille après t minutes sur une même fleur est $F(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ La vitesse moyenne à laquelle l'abeille aspire le nectar d'une fleur sur laquelle elle demeure pendant t minutes est $R(t) = \dfrac{F(t)}{t+1}$. Puisque

$$R(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)(t+1)} ,$$

on obtient

$$R'(t) = \frac{-t(t^3 - t - 2)}{(1+t^2)^2(1+t)^2} .$$

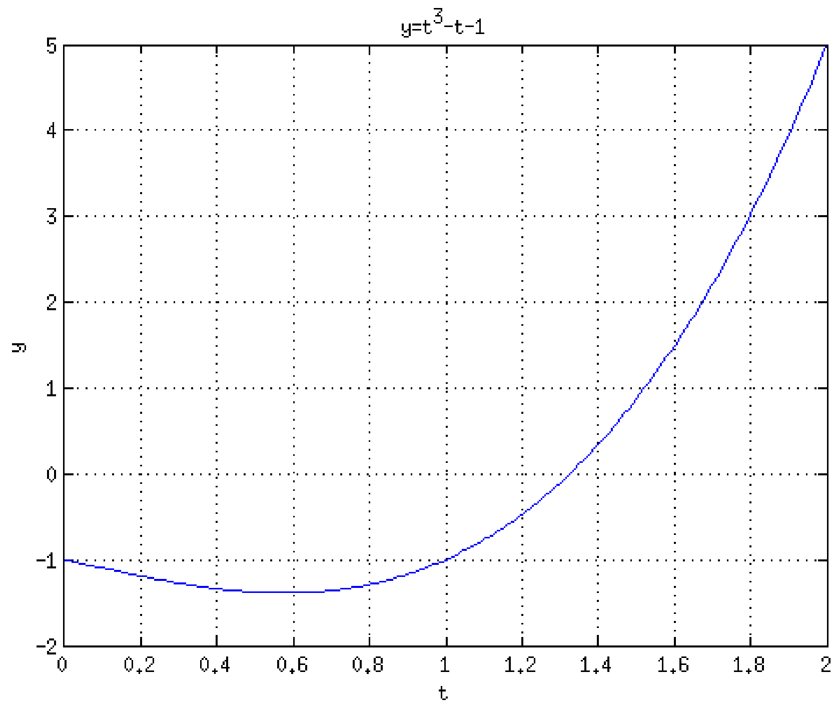
On doit trouver les points critiques positifs de R. Il faut donc trouver les racines du polynôme $p(t) = t^3 - t - 2$. Pour ce faire, on va utiliser la méthode de Newton. On a $p(1) = -2 < 0$ et $p(2) = 4 > 0$, il y a donc une racine entre 1 et 2. Avec $t_0 = 1.5$, on obtient

n	t_n	$t_{n+1} = t_n - \frac{p(t_n)}{p'(t_n)}$
0	1.5	1.347826086956522
1	1.347826086956522	1.325200398950907
2	1.325200398950907	1.324718173999054
3	1.324718173999054	1.324717957244790
4	1.324717957244790	1.324717957244746
5	1.324717957244746	1.324717957244746
6	1.324717957244746	1.324717957244746
7	1.324717957244746	

On trouve donc le point critique $T \approx 1.324717957244746$. Existe-t-il une autre racine positive de p et donc un autre point critique positif de R ? Non, car $p'(t) = 3t^2 - 1$ nous donne le tableau suivant :

t	0	$0 < t < 1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3} < t < T$	T	$T < t$	∞
$p(t)$	-1	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$p'(t)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
	décroît	décroît	min. loc.	croît	croît	croît	

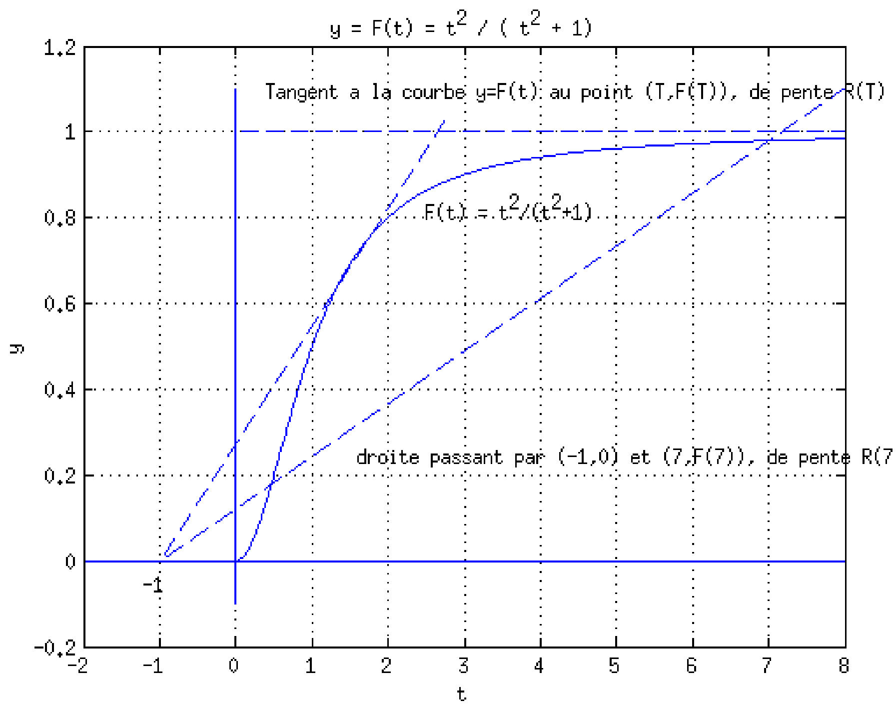
On obtient le graphe de p qui suit.



Montrons que R a un maximum absolu à $t = T$. On a le tableau suivant :

t	0	$0 < t < T$	T	$T < t < +\infty$	$+\infty$
$R(t)$	0	$+$	$T^2(1+T^2)^{-1}(1+T)^{-1}$	$+$	0
$R'(t)$	0	$+$	0	$-$	
	croît	croît	max. local	croît	

Donc, $t = T$ est le temps optimal pour maximiser la récolte de nectar.



Comme il est prédit par la règle des valeurs marginales, on a que $R(T) = F'(T)$.

Question 5.66

Solution:
Posons $f(x) = e^x + x^2 - x - 2$. f est une fonction continue sur la droite réelle. De plus, $f(0) = 1 - 2 = -1 < 0$ et $f(1) = e - 2 \approx 0.7182818 > 0$. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaire, il existe c entre 0 et 1 tel que $f(c) = 0$. C'est-à-dire, $e^c + c^2 - 2 = c$.

Question 5.67

Solution:
f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[0, 1]$. Donc, par le théorème des valeurs extrêmes, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) \geq f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. $f(c)$ est le maximum absolu de f sur l'intervalle $[0, 1]$.

On pourrait calculer la dérivée de f et résoudre $f'(x) = 0$ pour trouver les points critiques. Le maximum absolu est donné par $f(x)$ lorsque x égale un des points critiques, $x = 0$ ou

$x = 1$. Comme on ne demande pas la valeur du maximum absolu mais seulement s'il existe et est positif, on n'a pas à faire tout ce travail. Pour démontrer que le maximum absolu est positif, il suffit de noter que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8} > 0$. Donc, $f(c) \geq f(1/2) > 0$.

Question 5.68

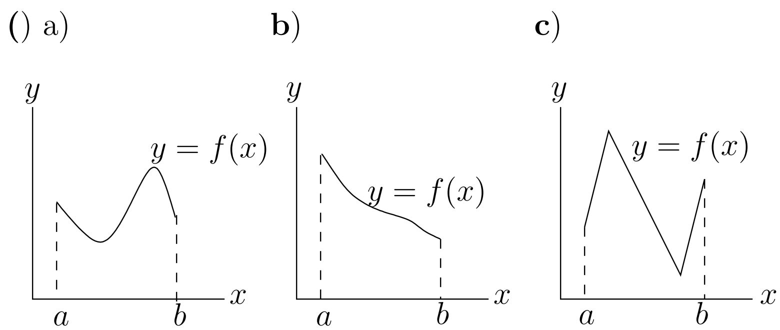
Solution:
On cherche $c \in [0, 2]$ tel que

$$2c = f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2 \ .$$

Donc $c = 1$. C'est la valeur c qui est prédite par le théorème de la moyenne.

Question 5.69

Solution:



La fonction en (**b**) est strictement décroissante.

Question 5.70

Solution:
Il est évident qu'il n'existe pas de valeur c telle que $H(c) = 0.5$ car 0.5 n'est même pas dans l'image de H.

La pente de la sécante entre les points $(-1, H(-1))$ et $(1, H(1))$ est $\dfrac{H(1) - H(-1)}{2} = \dfrac{1}{2}$. Puisque $H'(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$ et $H'(x)$ n'est pas défini à $x = 0$, il est alors clair que l'on ne peut pas trouver une valeur c telle que $H'(c) = 1/2$.

Le problème avec la fonction de Heaviside est qu'elle n'est pas continue à l'origine.

Question 5.71

Solution:
Si on suppose que le prix de l'essence varie de façon continue en fonction du temps, alors on

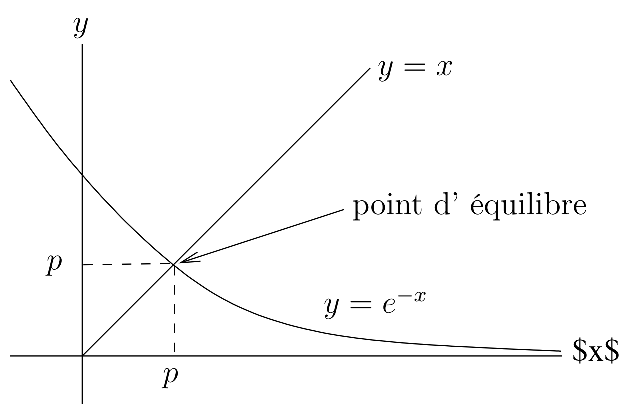
peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour conclure que le prix a été de $2.25 à un certain moment au cours de la semaine. Mais, est-ce vraiment réaliste ?

Question 5.72

Solution:
La fonction itérative est $f(x) = x^2 + 2$. On a $f(0) = 2$, $f(2) = 6$ et $f(4) = 18$.

Question 5.73

Solution:
Les points d'équilibre p sont les solutions de l'équation $p = f(p) = e^{-p}$. Malheureusement, on ne peut pas résoudre pour p. On peut quand même voir sur le graphique ci-dessous qu'il existe un point d'équilibre.



On va voir prochainement la méthode de Newton qui nous permettra d'estimer numériquement la valeur de p.

Question 5.74

Solution:
La solution du système dynamique discret est $v_n = 1.5^n v_0 = 1350 \times 1.5^n$. On cherche le plus petit entier n tel que $v_n \geq 3250$. Commençons par trouver n tel que $v_n = 1350 \times 1.5^n = 3250$.

$$\begin{aligned} 1350 \times 1.5^n = 3250 &\Leftrightarrow 1.5^n = \frac{3250}{1350} = \frac{65}{27} \Leftrightarrow \ln(1.5^n) = \ln\left(\frac{65}{27}\right) \\ &\Leftrightarrow n\ln(1.5) = \ln(65) - \ln(27) \Leftrightarrow n = \frac{\ln(65) - \ln(27)}{\ln(1.5)} = 2.1667719\ldots \end{aligned}$$

On est certain que le volume sera plus grand que 3250 μm^3 après trois heures.

Question 5.75

Solution:
a) On cherche p_9 tel que $10^8 < p_{10} = 2p_9 < 10^9$. Donc,

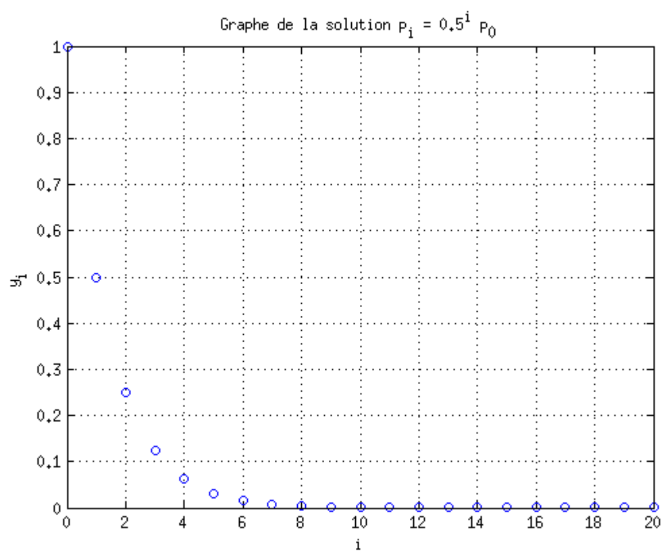
$$5 \times 10^5 = \frac{10^8}{2} < p_9 < \frac{10^9}{2} = 5 \times 10^9 \ .$$

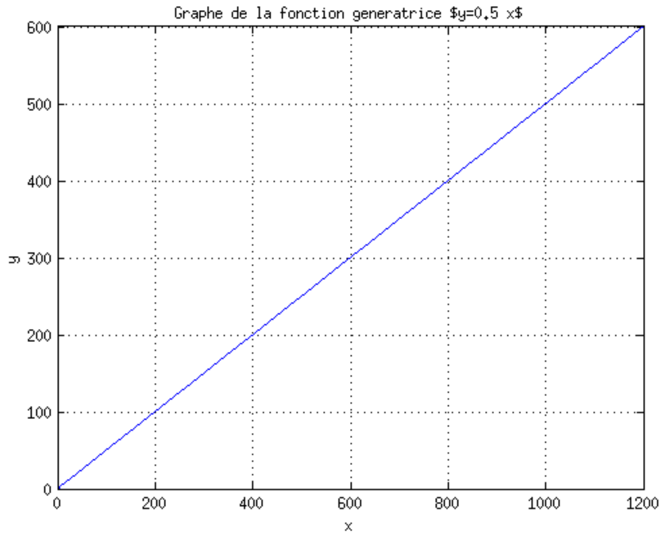
b) La solution du système dynamique discret est de la forme $p_n = 2^n p_0$ où p_0 est le nombre initial d'individus. On cherche p_0 tel que $10^8 < p_{10} = 2^{10} p_0 < 10^9$. Donc,

$$\frac{5^8}{4} = \frac{10^8}{2^{10}} < p_0 < \frac{10^9}{2^{10}} = \frac{5^9}{2} \ .$$

Question 5.76

Solution:
La solution est $y_i = 0.5^i y_0 = 1200.5^i$ et $y_{20} = 1200 \times 0.5^{20} = 0.00114440\ldots$





Notez que la fonction itérative est strictement croissante mais que la solution est strictement décroissante.

Question 5.77

Solution:
On a $x_0 = 1$, $x_1 = f(x_0) = \frac{1}{2}$, $x_2 == f(x_1) = \frac{1}{3}$, $x_3 == f(x_2) = \frac{1}{4}$, ... On peut conjecturer que la solution est $x_i = \frac{1}{i+1}$. Pour démontrer que notre conjecture est vrai, il faut vérifier que l'équation $x_{i+1} = \frac{x_i}{1+x_i}$ est satisfaite avec $x_i = \frac{1}{i+1}$. Effectivement,

$$\frac{x_i}{1+x_i} = \frac{1/(i+1)}{1+1/(i+1)} = \frac{1/(i+1)}{(i+2)/(i+1)} = \frac{1}{i+2} = x_{i+1} \ .$$

Question 5.78

Solution:
La fonction itérative est $f(x) = 4 - x$. On a $x_0 = 1$, $x_1 = 4 - x_0 = 3$, $x_2 = 4 - x_1 = 1$, $x_3 = 4 - x_2 = 3$, ... La solution est

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases} \ .$$

Question 5.79

Solution:
On a $h_0 = 1$, $h_1 = h_0 + 1 = 2$, $h_2 = h_1 + 1 = 3$, $h_3 = h_2 + 1 = 4$, $\ldots$ On trouve la solution $h_i = i + 1$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots$ Ainsi, $h_{20} = 21$.

Question 5.80

Solution:
La fonction itérative est $f(x) = 2x + 30$. Pour obtenir la solution, il faut trouver le point d'équilibre ; c'est-à-dire, p tel que $p = f(p)$.

$$p = f(p) \Leftrightarrow p = 2p + 30 \Leftrightarrow p = -30 \ .$$

La solution est

$$x_i = 2^i(x_0 - p) + p = 2^i(10 + 30) - 30 = 40 \times 2^i - 30 \ .$$

Question 5.81

Solution:
Le tableau nous donne plusieurs valeurs v_0 (colonne de gauche) et v_1 (colonne de droite). Ces valeurs doivent satisfaire $v_1 = av_0 + b$. Si on prend les deux premières pairs, on obtient les équations

$$\begin{aligned} 1830 &= 1220a + b \\ 2790 &= 1860a + b \end{aligned}$$

Si on résout pour a et b, on trouve $a = 3/2$ et $b = 0$. On a donc $v_{i+1} = \dfrac{3}{2}v_i$.

Pour compléter le tableau, on note que $v_1 = \dfrac{3}{2} \times 1420 = 2130$.

Si le volume initial est $v_0 = 1420$, le volume après une heure sera donné par v_6 car chaque itération représente 10 minutes, La solution du système dynamique discret $v_{i+1} = \dfrac{3}{2}v_i$ est $v_i = \left(\dfrac{3}{2}\right)^i v_0 = 1420 \left(\dfrac{3}{2}\right)^i$ et $v_6 = 1420 \left(\dfrac{3}{2}\right)^6 = 16174.6875$.

Pour une courte période de temps, le modèle peut être acceptable mais certainement pas pour une longue période de temps. Le volume de la cellule ne peut pas augmenter indéfiniment.

Question 5.82

Solution:
Le tableau nous donne g_0, g_1, g_2 et g_3. Ces valeurs doivent satisfaire $g_{i+1} = ag_i + b$. Si on utilise les valeurs g_0, g_1, g_2, on obtient les équations

$$16 = 20a + b$$

$$13 = 16a + b$$

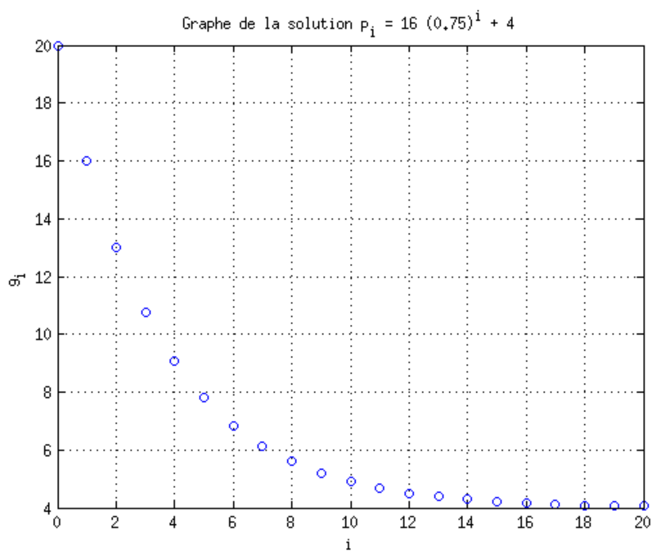
Si on résout pour a et b, on trouve $a = 3/4$ et $b = 1$. On a donc $g_{i+1} = \frac{3}{4}g_i + 1$.

La fonction itérative est $f(x) = \frac{3}{4}x + 1$. Pour obtenir la solution, il faut trouver le point d'équilibre ; c'est-à-dire, p tel que $p = f(p)$.

$$p = f(p) \Leftrightarrow p = \frac{3}{4}p + 1 \Leftrightarrow p = 4 \ .$$

La solution est

$$g_i = \left(\frac{3}{4}\right)^i (g_0 - p) + p = \left(\frac{3}{4}\right)^i (20-4) + 4 = 16 \times \left(\frac{3}{4}\right)^i + 4 \ .$$



Le modèle est réaliste. La concentration peut devenir nulle.

Question 5.83

Solution:
On a

$$\begin{aligned}
b_0 &= 5 \times 10^5 \\
b_1 &= 0.7b_0 = 0.7 \times 5 \times 10^5 \\
b_2 &= 0.7b_1 = 0.7^2 \times 5 \times 10^5 \\
b_3 &= 0.7b_2 = 0.7^3 \times 5 \times 10^5 \\
&\vdots \qquad \vdots \\
b_i &= 0.7^i \times 5 \times 10^5
\end{aligned}$$

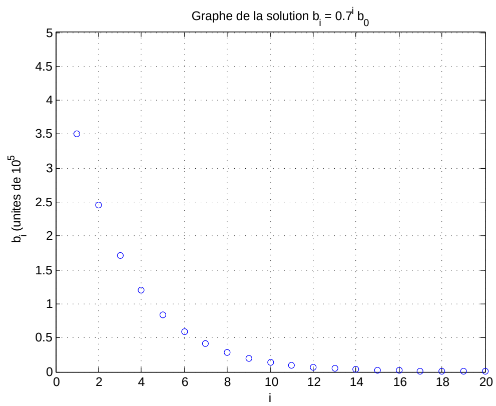


FIGURE 5.6 – Graphe de la solution du système dynamique discret $b_{i+1} = 0.7 b_i$ pour $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Si $b_i \approx 10^5$, on obtient

$$\begin{aligned} 0.7^i \times 5 \times 10^5 \approx 10^5 &\Longrightarrow 0.7^i \times 5 \approx 1 \Longrightarrow 0.7^i \approx \frac{1}{5} \\ &\Longrightarrow i \ln(0.7) = \ln(0.7^i) \approx \ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln(5)\ . \end{aligned}$$

Donc, $i \approx \dfrac{-\ln(5)}{\ln(0.7)} = 4.512338026$. On choisit l'entier le plus près de 4.512338026, soit $i = 5$.

On retrouve le graphe de la solution du système dynamique $b_{i+1} = 0.7 b_i$ à la figure 5.6.

Question 5.84

Solution:

a) On a

$$\begin{aligned}
M_0 &= 16\\
M_1 &= 0.75M_0 + 2 = 0.75 \times 16 + 2 = 14\\
M_2 &= 0.75M_1 + 2 = 0.75 \times 14 + 2 = 12.5\\
M_3 &= 0.75M_2 + 2 = 0.75 \times 12.5 + 2 = 11.375\\
M_4 &= 0.75M_3 + 2 = 0.75 \times 11.375 + 2 = 10.53125\\
M_5 &= 0.75M_4 + 2 = 0.75 \times 10.53125 + 2 = 9.8984375
\end{aligned}$$

b) Nous illustrons les deux méthodes qui donnent la solution du système dynamique discret (**??**).

i) Les premières valeurs de M_i sont

$$\begin{aligned}
M_1 &= 0.75M_0 + 2\\
M_2 &= 0.75M_1 + 2 = 0.75(0.75M_0 + 2) + 2 = 0.75^2M_0 + 0.75 \times 2 + 2\\
M_3 &= 0.75M_2 + 2 = 0.75(0.75^2M_0 + 0.75 \times 2 + 2) + 2\\
&= 0.75^3M_0 + 0.75^2 \times 2 + 0.75 \times 2 + 2\\
M_4 &= 0.75M_3 + 2 = 0.75(0.75^3M_0 + 0.75^2 \times 2 + 0.75 \times 2 + 2) + 2\\
&= 0.75^4M_0 + 0.75^3 \times 2 + 0.75^2 \times 2 + 0.75 \times 2 + 2\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Par induction, on trouve que

$$\begin{aligned}
M_i &= 0.75^iM_0 + 2\sum_{k=0}^{i-1} 0.75^k = 0.75^iM_0 + 2\left(\frac{1-0.75^i}{1-0.75}\right)\\
&= 0.75^i(M_0 - 8) + 8
\end{aligned}$$

Puisque 0.75^i approche 0 lorsque i devient de plus en plus grand, on a que M_i approche 8 lorsque i tend vers plus infini.

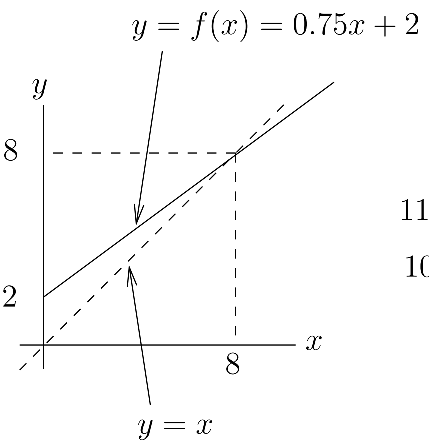
ii) On trouve le point fixe M pour le système dynamique discret (**??**) ; c'est-à-dire, on cherche M tel que $M = 0.75M + 2$. Si on résout cette équation, on trouve $M = 8$. Ainsi la solution est

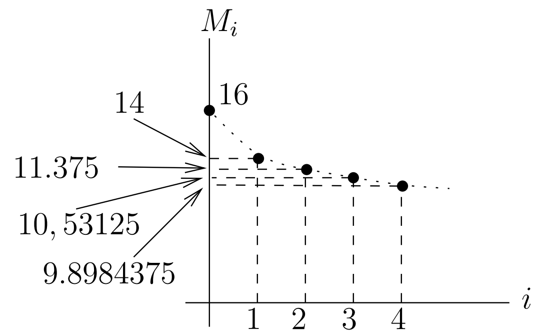
$$M_i = 0.75^i(M_0 - 8) + 8$$

c) On a donc $M_0 = 16$, $M_1 = 0.75(16-8)+8 = 14$, $M_2 = 0.75^2(16-8)+8 = 12.5$, $M_3 = 0.75^3(16-8)+8 = 11.375$, etc.

On retrouve le graphe de la solution du système (**??**) dans la figure ci-dessous.

d) Le graphe de la fonction itérative du système dynamique discret est aussi donné dans la figure ci-dessous.





e)

f) On utilise le résultat en (**b**) pour obtenir

$$M_{60} = 0.75^{60}(10 - 8) + 8 = 0.75^{60} \times 2 + 8 \approx 8.000000064 \ .$$

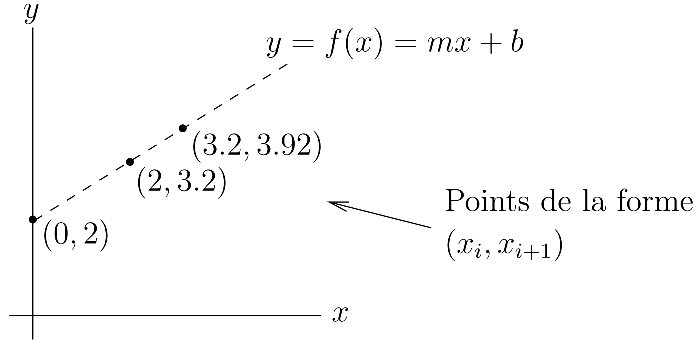
Question 5.85

Solution:
Le point d'équilibre x du système dynamique discret est donné par $x = 2x + 20$. Si on résout pour x, on trouve $x = -20$. La solution du système dynamique discret est donc $x_i = 2^i(x_0 + 20) - 20$.

Pour $x_0 = 10$, on obtient $x_i = 2^i \times 30 - 20$. On remarque que x_i augmente sans borne supérieure lorsque i augmente. Pour de petites valeurs de i, le système dynamique décrit bien la croissance du nombre de lézards mais ce modèle n'est pas valide pour les grandes valeurs de i.

Question 5.86

Solution:
Les trois premiers points sont (x_i, x_{i+1}) pour $i = 0$, 1 et 2. On retrouve ces trois points dans le graphe de la figure suivante



Le système dynamique discret est de la forme

$$x_{i+1} = f(x_i) = mx_i + b \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

où $f(x) = mx + b$ est la fonction itérative. On utilise les deux premiers points du graphe de f pour déterminer m et b. On doit résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 2 &= m \times 0 + b \\ 3.2 &= m \times 2 + b \end{aligned}$$

On trouve $m = 0.6$ et $b = 2$. Donc, $f(x) = 0.6x + 2$ est la fonction itérative. Le système dynamique discret est

$$x_{i+1} = 0.6x_i + 2 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Question 5.87

Solution:
Le nombre de bactéries x_i que l'on a après i heures satisfait le système dynamique discret

$$x_{i+1} = 2(x_i - 10^6) \tag{5.1.1}$$

En d'autres mots, avant de doubler le nombre de bactéries, on retire 10^6 bactéries.

Ainsi, si $x_0 = 3 \times 10^6$, on trouve

$$\begin{aligned} x_1 &= 2(x_0 - 10^6) = 4 \times 10^6 \\ x_2 &= 2(x_1 - 10^6) = 6 \times 10^6 \\ x_2 &= 2(x_2 - 10^6) = 10^7 \end{aligned}$$

On peut trouver la solution du système dynamique discret (5.1.1). Le point d'équilibre de ce système est donné par $x = 2(x - 10^6)$. D'où $x = 2 \times 10^6$. La solution du système dynamique discret (5.1.1) est donc

$$x_i = 2^i \left(x_0 - 2 \times 10^6\right) + 2 \times 10^6 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Question 5.88

Solution:
Le graphe de la fonction itérative est donné à la figure 5.7. On note que cette fonction itérative n'est pas linéaire.

Le point d'équilibre p que l'on cherche est la solution de l'équation $p = f(p) = p^2 - 1$ avec $0 \leq p \leq 2$. C'est-à-dire qu'il faut trouver les racines du polynôme $p^2 - p - 1 = 0$ avec

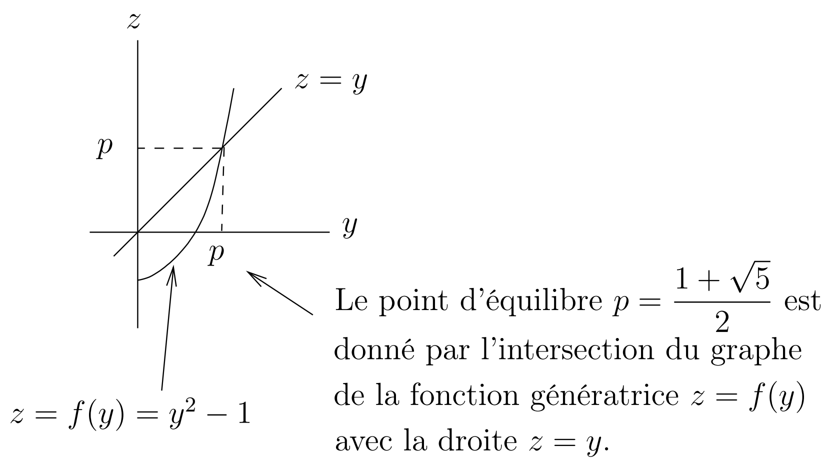


FIGURE 5.7 – le graphe de la fonction itérative $f(y) = y^2 - 1$ pour $0 \leq y \leq 2$.

$0 \leq p \leq 2$. Grâce à la formule pour trouver les racines d'un polynôme de degré deux, on obtient

$$p_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La seule racine p telle que $0 \leq p \leq 2$ est $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Question 5.89

Solution:
La fonction itérative est $y = f(x) = 2x - 5$. On donne le graphe de la fonction itérative à la figure 5.8.

Le point d'équilibre p du système dynamique discret est la solution de l'équation $p = 2p - 5$. C'est à dire $p = 5$. Le graphe de la fonction itérative est au-dessus de la droite $y = x$ pour $x > 5$ et en dessous de la droite $y = x$ pour $x < 5$.

Question 5.90

Solution:
Soit $f(x) = x - \cos(x)$. f est une fonction continue sur la droite réelle telle que $f(0) = 0 - \cos(0) = -1 < 0$ et $f(\pi/2) = \pi/2 - \cos(\pi/2) = \pi/2 > 0$. Donc, selon le théorème des valeurs intermédiaires, il existe p entre 0 et $\pi/2$ tel que $f(p) = p - \cos(p) =$. C'est-à-dire, $\cos(p) = p$. La figure suivante illustre ce fait. On peut montrer à l'aide d'une méthode numérique (e.g. méthode du point fixe) que $p \approx 0.73908513321$.

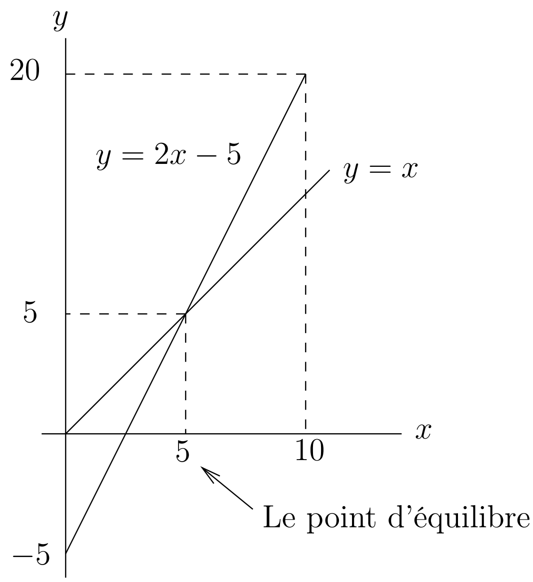
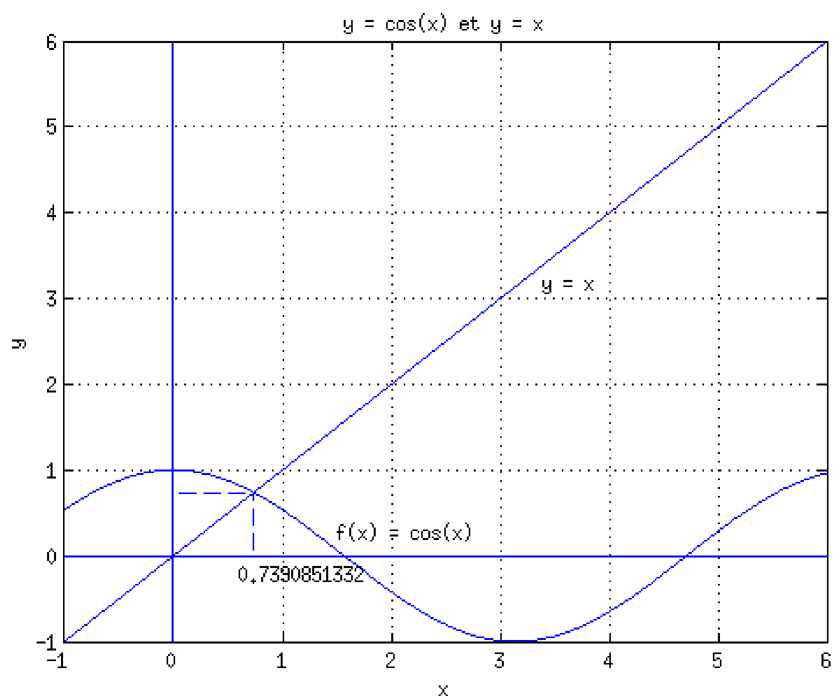


FIGURE 5.8 – Le graphe de la fonction itérative $f(y) = 2x - 5$ pour $0 \leq y \leq 10$.



Question 5.91

Solution:
La fonction itérative est $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ pour $x > 1$. Le point d'équilibre $p > 1$ du système

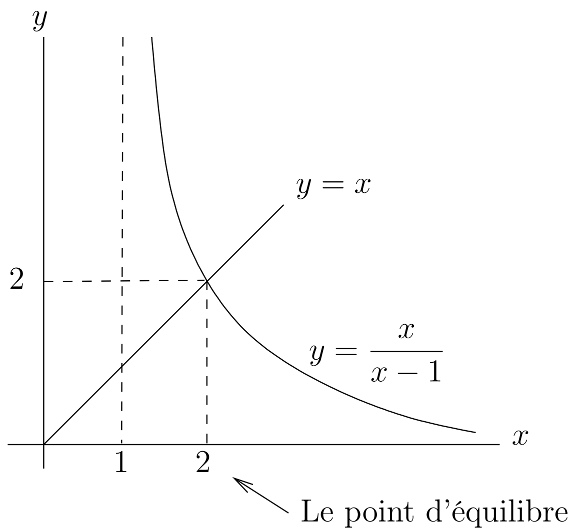


FIGURE 5.9 – le graphe de la fonction itérative $f(x) = x/(x-1)$ pour $x > 1$.

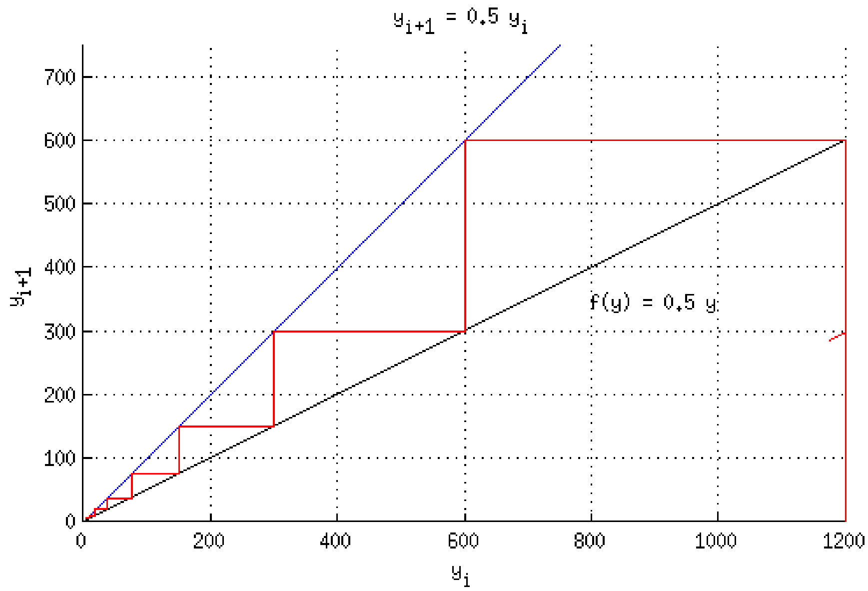
dynamique discret est une solution de l'équation $p = f(p) = \dfrac{p}{p-1}$. On peut récrire cette équation de la façon suivante :

$$p^2 - 2p = p(p-2) = 0 \ .$$

La seule solution pour $p > 1$ est $p = 2$. C'est notre point d'équilibre comme on peut voir à la figure 5.9.

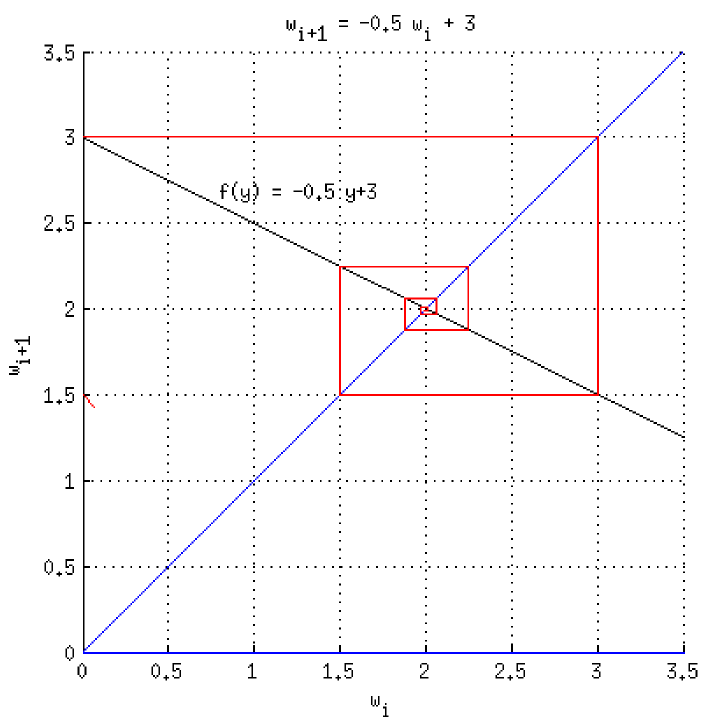
Question 5.92

Solution:



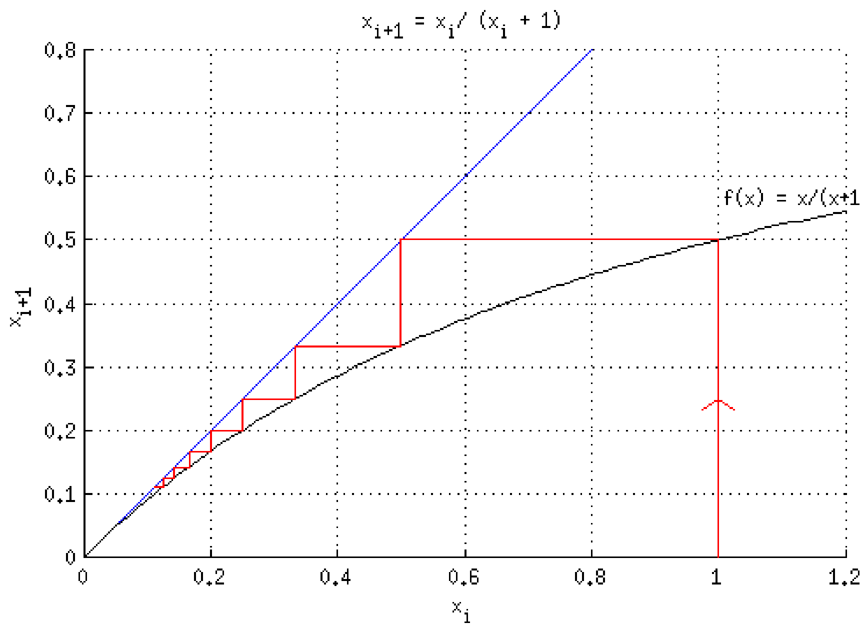
Question 5.93

Solution:
solLa fonction itérative est $f(w) = -0.5w + 3$.



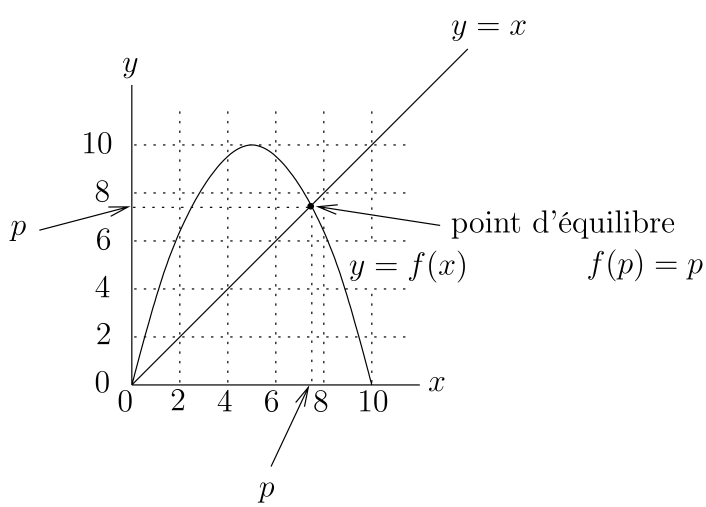
Question 5.94

Solution:
La fonction itérative est $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.



Question 5.95

Solution:



Question 5.96

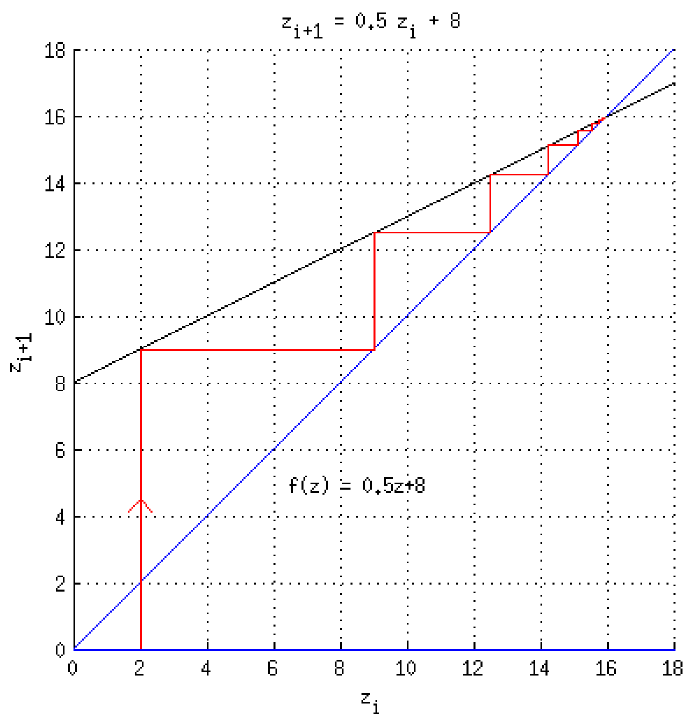
Solution:
La fonction itérative est $f(z) = 0.5z + 8$.

Pour obtenir la solution, il faut trouver le point d'équilibre ; c'est-à-dire, p tel que $p = f(p)$.

$$p = f(p) \Leftrightarrow p = 0.5p + 8 \Leftrightarrow p = 16 \ .$$

La solution est

$$z_i = 0.5^i(z_0 - p) + p = 0.5^i(2 - 16) + 16 = -14 \times 0.5^i + 16 \ .$$



Question 5.97

Solution:
La fonction itérative est $f(w) = -0.5w + 3$.

Pour obtenir la solution, il faut trouver le point d'équilibre ; c'est-à-dire, p tel que $p = f(p)$.

$$p = f(p) \Leftrightarrow p = -0.5p + 3 \Leftrightarrow p = 2 \ .$$

La solution est

$$w_i = (-0.5)^i(w_0 - p) + p = (-0.5)^i(0 - 2) + 2 = -2 \times (-0.5)^i + 2 \ .$$

Puisque $(-0.5)^i \to 0$ lorsque $i \to \infty$, il n'est pas surprenant que $w_i \to 2$ lorsque $i \to \infty$. On note que $-2 \times (-0.5)^i$ est positif pour i impair et négatif pour i pair. Cela explique pourquoi les x_i alternent entre plus petit et plus grand que 2.

Question 5.98

Solution:
p est un point d'équilibre si $p = f(p) = \dfrac{\alpha p}{p+1}$. Or,

$$p = \frac{\alpha p}{p+1} \Leftrightarrow p(p+1) = \alpha p \Leftrightarrow p^2 + (1-\alpha)p = 0 \Leftrightarrow p(p+1-\alpha) = 0 \ .$$

Donc, les points d'équilibre sont $p = 0$ et $p = \alpha - 1$. le système dynamique a toujours au moins un point d'équilibre ; c'est le point $p = 0$.

a) Il n'y pas de point d'équilibre autre que 0 quand $\alpha = 1$.

b) le système dynamique discret a un point d'équilibre négatif lorsque $\alpha < 1$; c'est le point $p = \alpha - 1$.

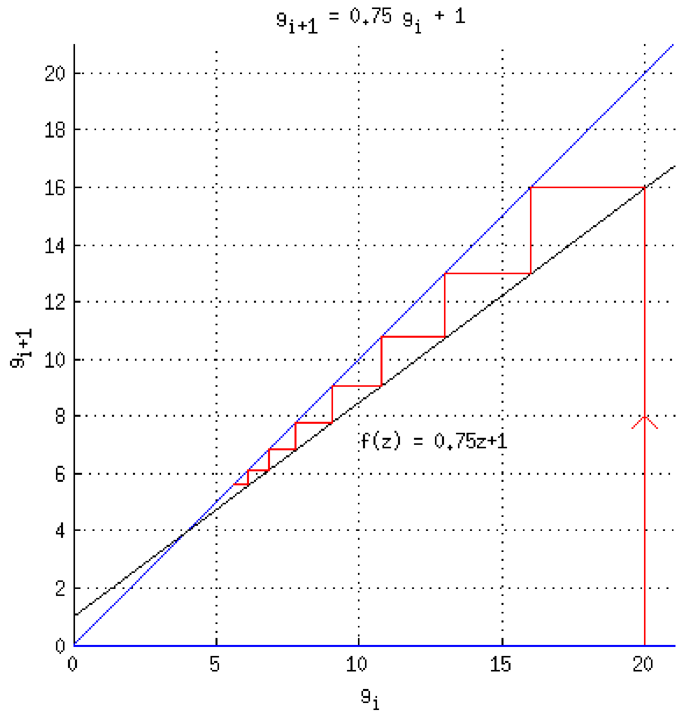
c) le système dynamique discret a un point d'équilibre positif lorsque $\alpha > 1$; c'est le point $p = \alpha - 1$.

Question 5.99

Solution:
On a trouver au problème de la section 1.5 que la concentration g_i d'un médicament après i jours satisfait le système dynamique discret $g_{i+1} = \dfrac{3}{4}g_i + 1$. On a aussi montré que $p = 4$ était le point d'équilibre et que la solution était

$$g_i = 16 \times \left(\frac{3}{4}\right)^i + 4 \ .$$

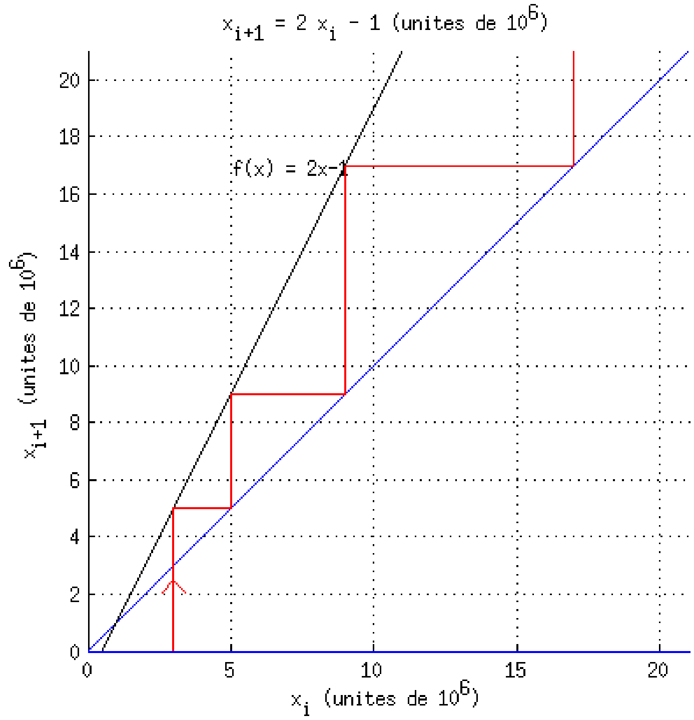
Le graphe en forme de toile d'araignée est donné dans la figure suivante :



Question 5.100

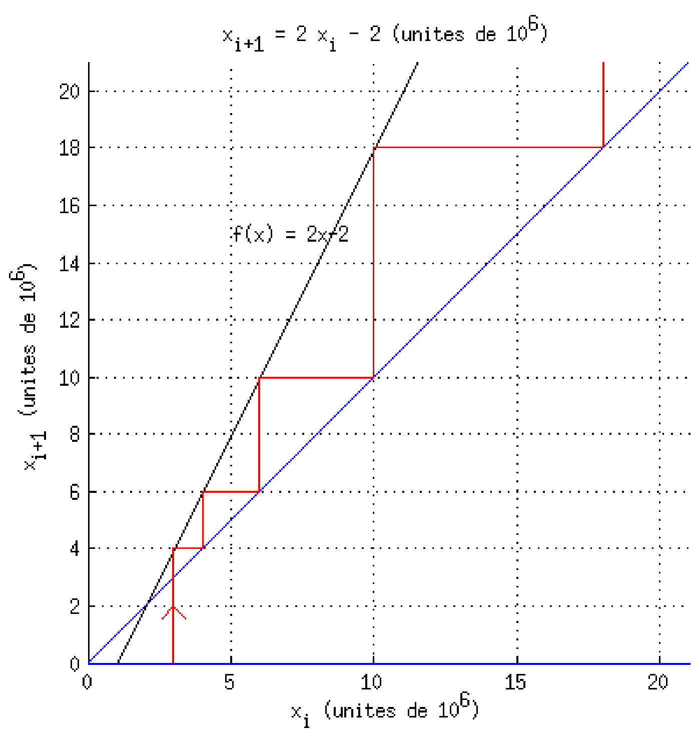
Solution:
Pour la première partie de la question, le système dynamique discret est

$$x_{n+1} = 2x_n - 10^6$$
$$x_0 = 3 \times 10^6$$



Pour la deuxième partie de la question, le système dynamique discret est

$$x_{n+1} = 2(x_n - 10^6) = 2x_n - 2 \times 10^6$$
$$x_0 = 3 \times 10^6$$



Les valeurs numériques changent un peu mais le comportement de la solution ne change pas. Dans les deux cas, $x_i \to \infty$ lorsque $i \to \infty$.

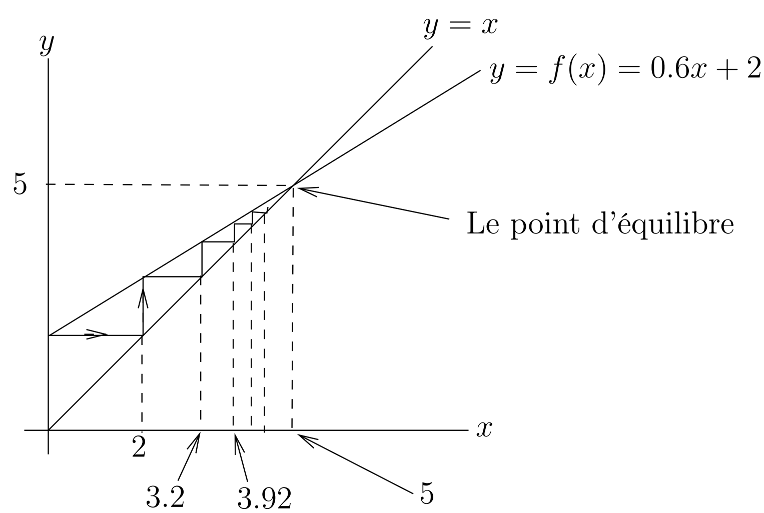
Question 5.101

Solution:
Le point d'équilibre du système dynamique discret

$$x_{i+1} = 0.6x_i + 2 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots \ ,$$

est la solution de l'équation $p = f(p) = 0.6p + 2$. On trouve $p = 5$.

Le graphe de la fonction itérative du système dynamique discret $x_{i+1} = 0.6x_i + 2$ avec le graphe en forme de toile d'araignée associé à la condition initiale $x_0 = 0$.



Question 5.102

Solution:

Question 5.103

Question 5.104

Solution:
On a que $x_n = 10^2\, 2.5^n$ et $y_n = 10^3\, 2^n$. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^3\, 2^n}{10^2\, 2.5^n} = \lim_{n\to\infty} 10 \left(\frac{2}{2.5}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 10 \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$$

car $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ pour $-1 < r < 1$. Donc, la population associée au système (**??**) tend plus rapidement vers plus l'infini que la population associée au système (**??**).

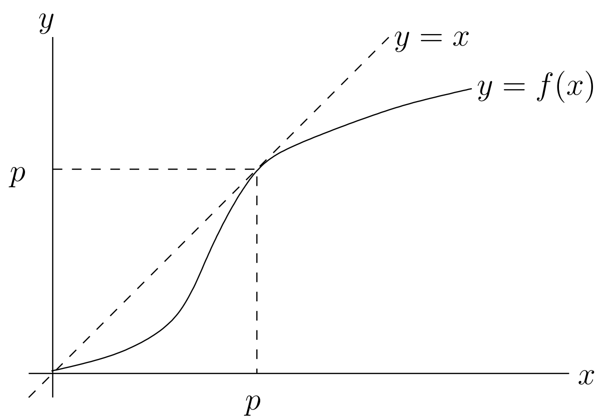


FIGURE 5.10 – Le graphe de f pour la question 102 dans sa position initiale.

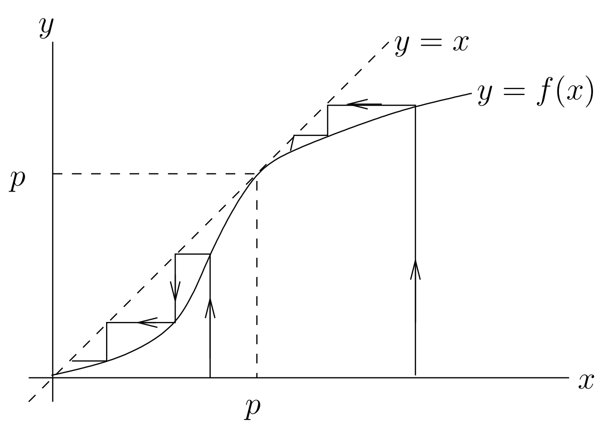
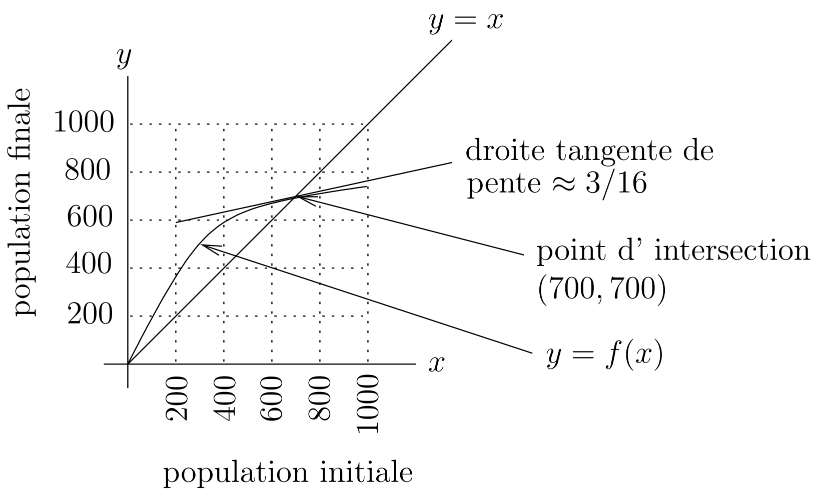


FIGURE 5.11 – Un graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret de la question 102 lorsque la fonction itérative f est dans sa position initiale.

Question 5.105

Solution:



Le point d'intersection (autre que l'origine) de la courbe $y = f(x)$ avec la droite $y = x$ est $(700, 700)$. Donc, $p = 700$ est le point d'équilibre du système dynamique discret $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

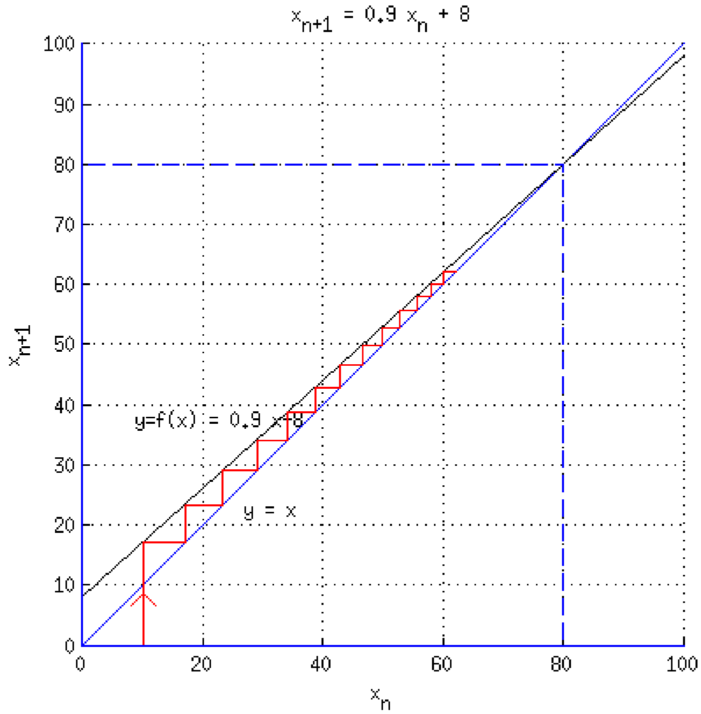
La pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(700, 700)$ est approximativement $m = 3/16$. Puisque $|m| < 1$, on obtient du théorème sur la stabilité des points d'équilibre que le point d'équilibre $p = 700$ est (asymptotiquement) stable .

Question 5.106

Solution:
La fonction itérative du système dynamique discret est $f(x) = 0.9x + 8$. le point d'équilibre est la solution de $p = 0.9p + 8$, soit $p = 80$.

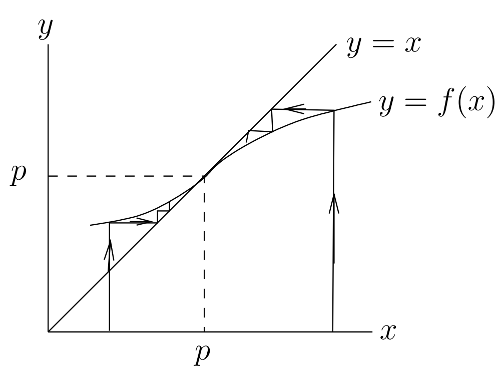
Puisque la pente de la droite $y = f(x)$ est entre -1 et 1, le point d'équilibre sera (asymptotiquement) stable d'après le théorème sur la stabilité des points d'équilibre.

On trace le graphe en forme de toile d'araignée pour $x_0 = 10$ ci-dessous. On voit bien que les orbites tendent vers le point d'équilibre.



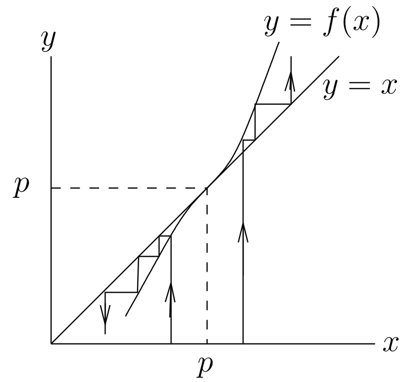
Question 5.107

Solution:
a)



Puisque $f'(p) = 1$ car la courbe $y = f(x)$ est tangente à la droite $y = x$ au point (p, p) par construction, on ne peut rien conclure à l'aide du théorème de stabilité pour les points d'équilibre. Par contre, le graphe en forme de toile d'araignée indique que le point d'équilibre p est stable.

b)



Comme précédemment, puisque $f'(p) = 1$ car la courbe $y = f(x)$ est tangente à la droite $y = x$ au point (p, p) par construction, on ne peut rien conclure à l'aide du théorème de stabilité pour les points d'équilibre. Par contre, le graphe en forme de toile d'araignée indique que le point d'équilibre p est instable.

Question 5.108

Solution:
La fonction itérative est $f(x) = \dfrac{1.5x}{1.5x + 2(1-x)} = \dfrac{1.5x}{2 - 0.5x}$. On a $f'(x) = \dfrac{3}{(2-0.5x)^2}$.

Noter que $p = 0$ et $p = 1$ sont des points d'équilibre car $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Puisque $f'(0) = 3/4$ est entre -1 et 1, 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable. Puisque $f'(1) = 4/3 > 1$, 1 est un point d'équilibre instable.

Question 5.109

Solution:
a) On a que

$$x_{i+1} = x_i t(x_i) = \frac{2x_i^2}{1 + x_i^2} \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

C'est le taux de croissance par individus multiplié par le nombre d'individus.

b) La fonction itérative est $f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(x) = x$. Donc,

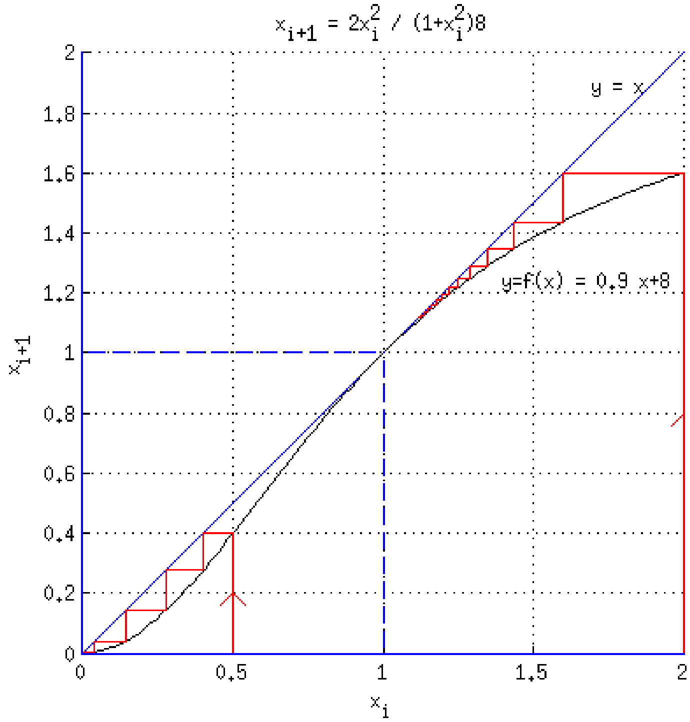
$$\frac{2x^2}{1+x^2} = x \Leftrightarrow 2x^2 = x + x^3 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2 = 0 \ .$$

Il y a deux points d'équilibre $p = 0$ et $p = 1$.

c) Le graphe de la fonctions itérative et le graphe en forme de toile d'araignée sont donnés ci-dessous.

d) Puisque $f'(x) = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$, on a que $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 1$. Grâce au théorème de stabilité des points d'équilibre, on peut dire que le point d'équilibre $p = 0$ est asymptotiquement stable car $|f'(0)| = 0 < 1$. Par contre, on ne peut rien conclure pour $p = 1$.

e) Si initialement le nombre d'individus est supérieur à 1, alors le nombre d'individus va tendre vers 1. Par contre, si initialement le nombre d'individus est supérieur à 0 mais inférieure à 1, alors le nombre d'individus va tendre vers 0 ; la population va disparaître.



Question 5.110

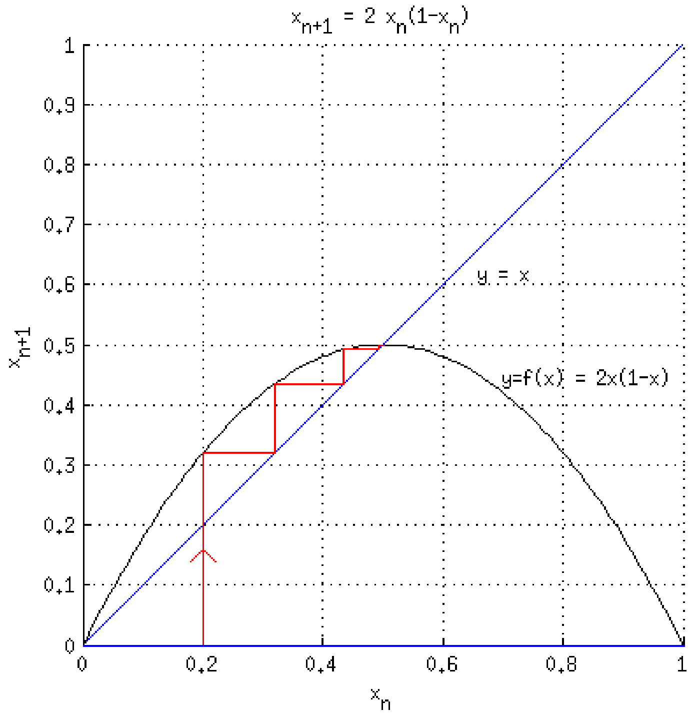
Question 5.111

Solution:
La fonction itérative est $f(x) = 2x(1-x)$. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(x) = x$. Ainsi, $x = 0$ ou $x = 1/2$. Le point d'équilibre non-nul est $p = 1/2$.

Puisque $f'(x) = 2 - 4x$, la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(1/2, 1/2)$ est $f'(1/2) = 0$.

Le point d'équilibre $p = 1/2$ est asymptotiquement stable car $|f'(1)| = 0 < 1$.

On trace le graphe en forme de toile d'araignée pour $x_0 = 0.2$.



Comme on peut le voir dans le graphe en forme de toile d'araignée, la convergence est très rapide. À partir de 0.2, il faut seulement quatre itérations pour être très près du point d'équilibre $p = 1/2$.

Question 5.112

Solution:
On a le système dynamique discret

$$M_{i+1} = M_i - \frac{M_i^2}{2+M_i} + 1 = \frac{2M_i}{2+M_i} + 1 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots ,$$

La fonction itérative est $g(M) = \dfrac{2M}{2+M} + 1$. Noter que $G(2) = 2$. Ce qui confirme que $M = 2$ est un point d'équilibre.

On a $g'(M) = \dfrac{4}{(2+M)^2}$. Ainsi, $g'(2) = 1/4$, Puisque $|g'(2)| < 1$, le point d'équilibre $M = 2$ est asymptotiquement stable. De plus, puisque $g'(2) > 0$, les orbites n'oscillent pas autour de $M = 2$.

Question 5.113

Solution:
a) La fonction itérative est $f(x) = 2x(1-x^2)$.

b) Les points d'équilibre sont les solutions de $x = f(x)$. Il découle de $2x(1-x^2) = x$ que

$x = 0$ ou $2(1 - x^2) = 1$ si $x \neq 0$. On a

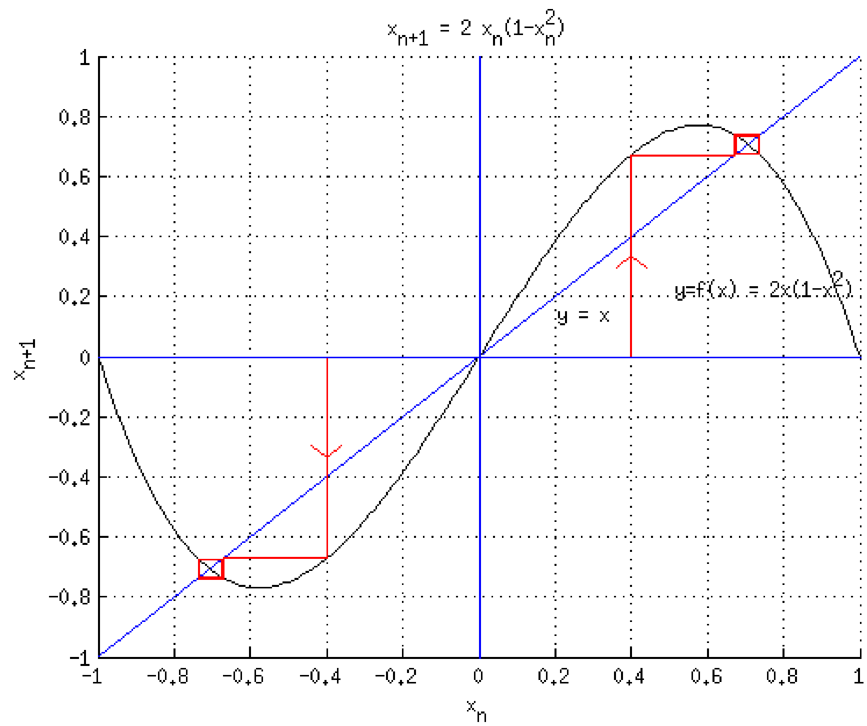
$$2(1 - x^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \ .$$

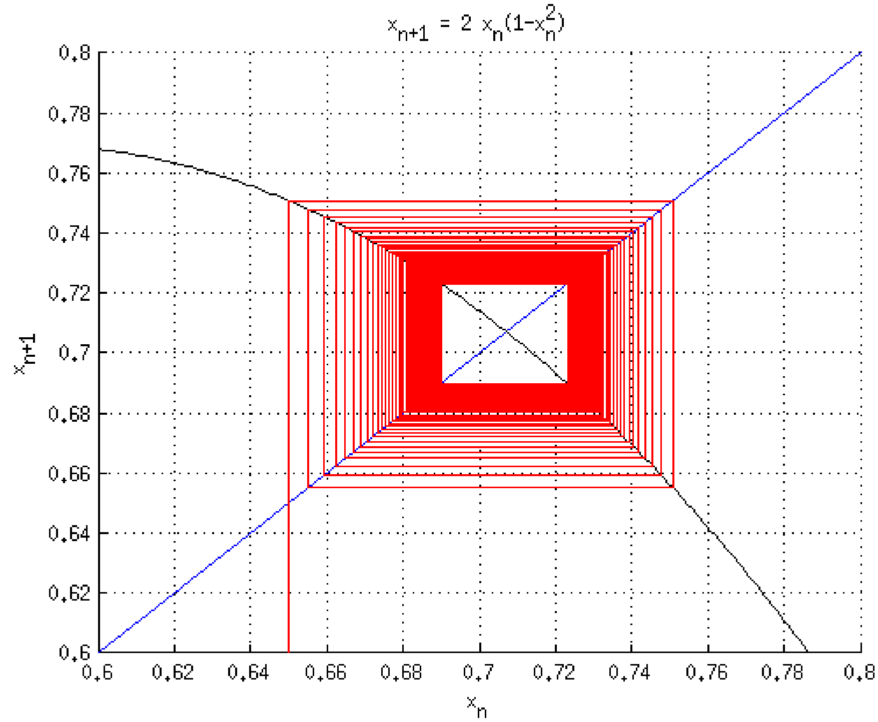
Donc, les trois points d'équilibre sont 0, 1 et -1.

c) On a $f'(x) = 2 - 6x^2$. Ainsi, $f'(-1/\sqrt{2}) = -1$, $f'(0) = 2$ et $f'(1/\sqrt{2}) = -1$. Puisque $|f'(0)| = 2 > 0$, le point d'équilibre $x = 0$ est instable.

Puisque $|f'(-1/\sqrt{2})| = |f'(1/\sqrt{2})| = 1$, on ne peut rien conclure à partir du théorème de stabilité des points d'équilibre. Il faut faire une analyse plus poussée pour déterminer la stabilité de ces points d'équilibre.

On retrouve ci-dessous deux graphe en forme de toile d'araignée. Dans le deuxième graphe, on a tracer le graphe au environ du point d'équilibre $1/\sqrt{2}$. On voit que les points d'équilibre $-1/\sqrt{2}$ et $1/\sqrt{2}$ sont stable mais la stabilité est très faible (i.e. il faut un très grand nombre d'itérations pour approcher légèrement le point d´équilibre).



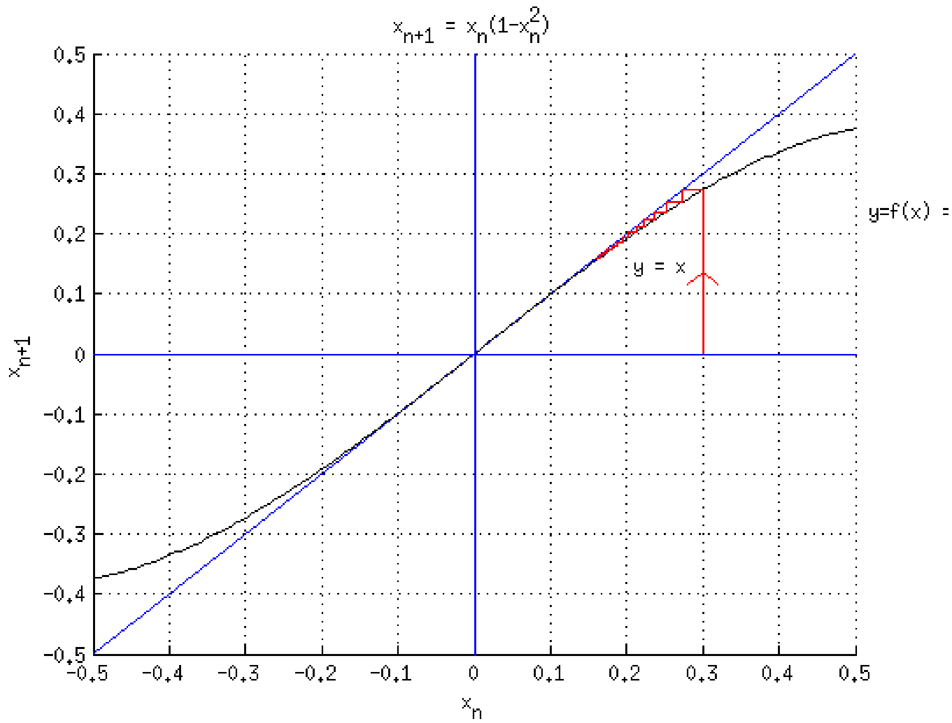


Question 5.114

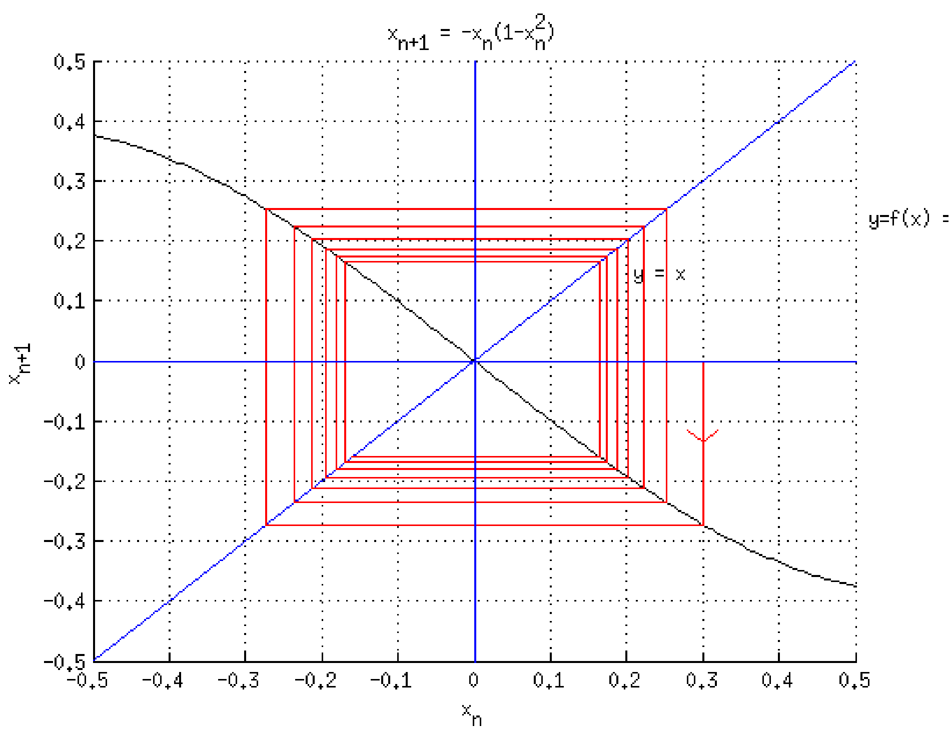
Solution:

a) La fonction itérative du système dynamique discret est $f(x) = \mu x(1-x^2)$. Ainsi, $f'(x) = \mu(1-3x^2)$ et $f'(0) = \mu$. Le point d'équilibre $x = 0$ est asymptotiquement stable si $|f'(0)| = |\mu| < 1$. Si $|\mu| > 1$, le point d'équilibre $x = 0$ est instable. Si $\mu = 1$ ou $\mu = -1$, il faut utiliser un graphe en forme de toile d'araignée pour déterminer la stabilité du point d'équilibre $x = 0$.

Pour $\mu = 1$, on obtient le graphe en forme de toile d'araignée suivant :



Pour $\mu = -1$, on obtient le graphe en forme de toile d'araignée suivant :



Dans les deux cas, l'origine est « faiblement »stable. Dans le cas $\mu = -1$, les orbites oscillent autour de l'origine.

b) Les points d'équilibre non nuls sont les solutions non nuls de l'équation $x = f(x) = \mu x(1-x^2)$. On peut diviser pas x des deux côtés de l'égalité car on assume que $x \neq 0$. On obtient $1 = \mu(1-x^2)$. Si on résout pour x, on trouve $x = \pm\sqrt{1-\dfrac{1}{\mu}}$ pour $\mu \geq 1$. Le point d'équilibre positif est donc $p = \sqrt{1-\dfrac{1}{\mu}}$ pour $\mu > 1$.

On a toujours $f'(x) = \mu(1-3x^2)$. Ainsi,

$$f'(p) = \mu\left(1-3p^2\right) = \mu\left(1-3\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\right) = -2\mu+3 \ .$$

Le point d'équilibre $x = p$ est asymptotiquement stable si $|f'(p)| = |3-2\mu| < 1$. On a

$$|3-2\mu| < 1 \Rightarrow -1 < 3-2\mu < 1 \Rightarrow 1 > 2\mu-3 > -1 \Rightarrow 4 > 2\mu > 2 \Rightarrow 2 > \mu > 1$$

Le point d'équilibre $x = p$ est instable si $|f'(p)| = |3-2\mu| > 1$. On a

$$\begin{aligned}|3-2\mu| > 1 &\Rightarrow 3-2\mu < -1 \text{ ou } 3-2\mu > 1 \Rightarrow 2\mu-3 > 1 \text{ ou } 2\mu-3 < -1 \\ &\Rightarrow 2\mu > 4 \text{ ou } 2\mu < 2 \Rightarrow \mu > 2 \text{ ou } \mu < 1\end{aligned}$$

Comme p est défini seulement pour $\mu > 1$, on conserve seulement $\mu > 2$. Si $\mu = 2$, il faut utiliser un graphe en forme de toile d'araignée pour déterminer la stabilité du point d'équilibre $x = p$. C'est ce qui a été fait à la question 113.

Question 5.115

Solution:
a) Si $N_0 = 20$, alors la taille des plantes l'année suivante sera $S_1 = \dfrac{100}{N_0} = \dfrac{100}{20} = 5$. Ces plantes produiront donc $N_1 = S_1 - 1 = \dfrac{100}{N_0} - 1 = 5 - 1 = 4$ nouvelles plantes.

b) On peut déduire le système dynamique discret suivant à partir du raisonnement que nous venons de donner pour obtenir N_1 à partir de N_0.

$$N_{i+1} = \frac{100}{N_i} - 1 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

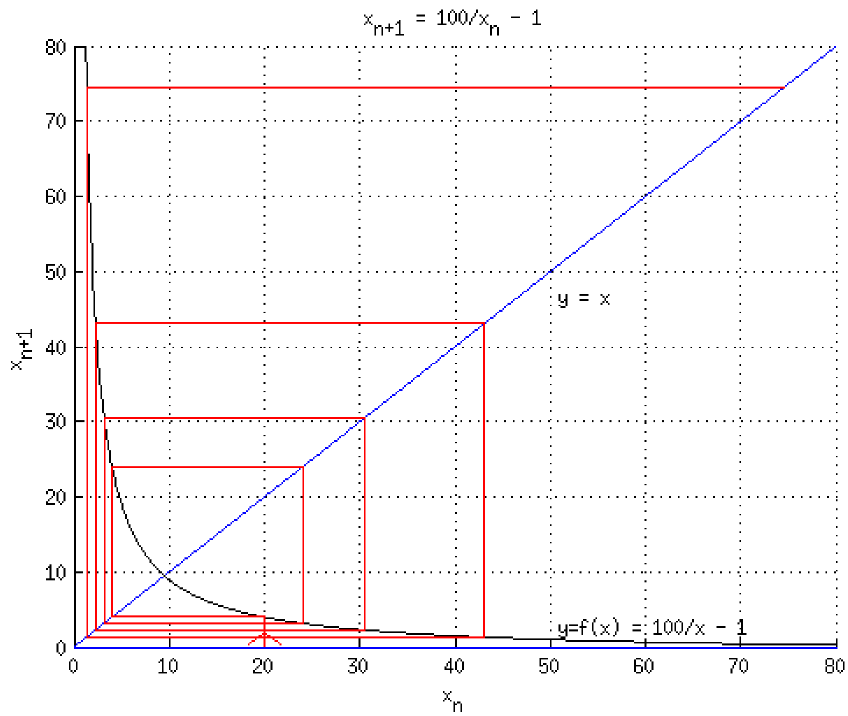
c) La fonction itérative de notre système dynamique discret est $f(x) = \dfrac{100}{x} - 1$. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(x) = x$.

$$\frac{100}{x} - 1 = x \Leftrightarrow 100 - x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 100 = 0 \ .$$

Les racines du polynôme $x^2 + x - 100$ sont $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{401}\right) \approx 9.5124921$ et $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(-1-\sqrt{401}\right)$. Puisque $x_2 < 0$, on peut l'ignorer car on ne peut pas avoir un nombre négatif de graines.

d) On a $f'(x) = -\dfrac{100}{x^2}$, donc $f'(x_1) = -\dfrac{100}{x_1^2} \approx -1.1051249$. Puisque $|f'(x_1)| > 1$, le point d'équilibre x_1 est instable.

e) Le graphe de la fonction itérative ainsi qu'un graphe en forme de toile d'araignée sont donnés dans la figure ci-dessous. Le graphe en forme de toile d'araignée montre que le point d'équilibre x_1 est instable. De plus, les orbites oscillent autour de ce point d'équilibre. Ce qui n'est pas surprenant car $f'(x_1) < 0$.



Question 5.116

Question 5.117

Question 5.118

Solution:

a) La fonction itérative du système dynamique discret est $f(x) = 2x(1-x) - hx$. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(x) = x$. $x = 0$ est une point d'équilibre. Si $x \neq 0$ alors on peut diviser les deux côtés de l'égalité $2x(1-x) - hx = x$ par x pour obtenir $2(1-x) - h = 1$. Si on résout pour x cette dernière équation, on obtient le deuxième point d'équilibre $x = p(h) = (1-h)/2$.

Pour que le point d´équilibre $p(h) = (1-h)/2$ soit positif, il faut avoir $h < 1$. Naturellement, le facteur d'efficacité h ne peut pas être négatif.

b) La récolte à long terme est

$$R(h) = h\,p(h) = h\left(\frac{1-h}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(h - h^2\right)\ ,\ 0 \leq h \leq 1\ .$$

c) Comme R est une fonction continue définie sur l'intervalle fermé $[0,1]$, on peut utiliser le théorème des valeurs extrêmes pour trouver le maximum absolu de R sur l'intervalle $[0,1]$.

Puisque $R'(h) = \dfrac{1}{2}(1-2h)$, il n'y a qu'un seul point critique et il est donné par la solution de $R'(h) = 0$. Ce point critique est $h = 1/2$.

On a $R(0) = R(1) = 0$ et $R(1/2) = 1/8$. Le maximum de R sur l'intervalle $[0,1]$ est donc $1/8$ lorsque $h = 1/2$.

d) La récolte est $R(1/2) = 1/8$.

Question 5.119

Solution:
a) La fonction itérative du système dynamique discret est $f(x) = 2.5x(1-x) - hx$. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(x) = x$. $x = 0$ est une point d'équilibre. Si $x \neq 0$ alors on peut diviser les deux côtés de l'égalité $2.5x(1-x) - hx = x$ par x pour obtenir $2.5(1-x) - h = 1$. Si on résout pour x cette dernière équation, on obtient le deuxième point d'équilibre $x = p(h) = (3-2h)/5$.

Pour que le point d´équilibre $p(h) = (3-2h)/5$ soit positif, il faut avoir $h < 3/2$. Naturellement, le facteur d'efficacité h ne peut pas être négatif.

b) La récolte à long terme est

$$R(h) = h\,p(h) = h\left(\frac{3-2h}{5}\right) = \frac{1}{5}\left(3h - 2h^2\right)\ ,\ 0 \leq h \leq 3/2\ .$$

c) Comme R est une fonction continue définie sur l'intervalle fermé $[0,3/2]$, on peut utiliser le théorème des valeurs extrêmes pour trouver le maximum absolu de R sur l'intervalle $[0,3/2]$.

Puisque $R'(h) = (3-4h)/5$, on a que $R'(h) = 0$ seulement pour $h = 3/4$. Le seul point critique est $h = 3/4$.

On a $R(0) = R(3/2) = 0$ et $R(3/4) = 9/40$. Le maximum de R sur l'intervalle $[0,3/2]$ est $9/40$ lorsque $h = 3/4$.

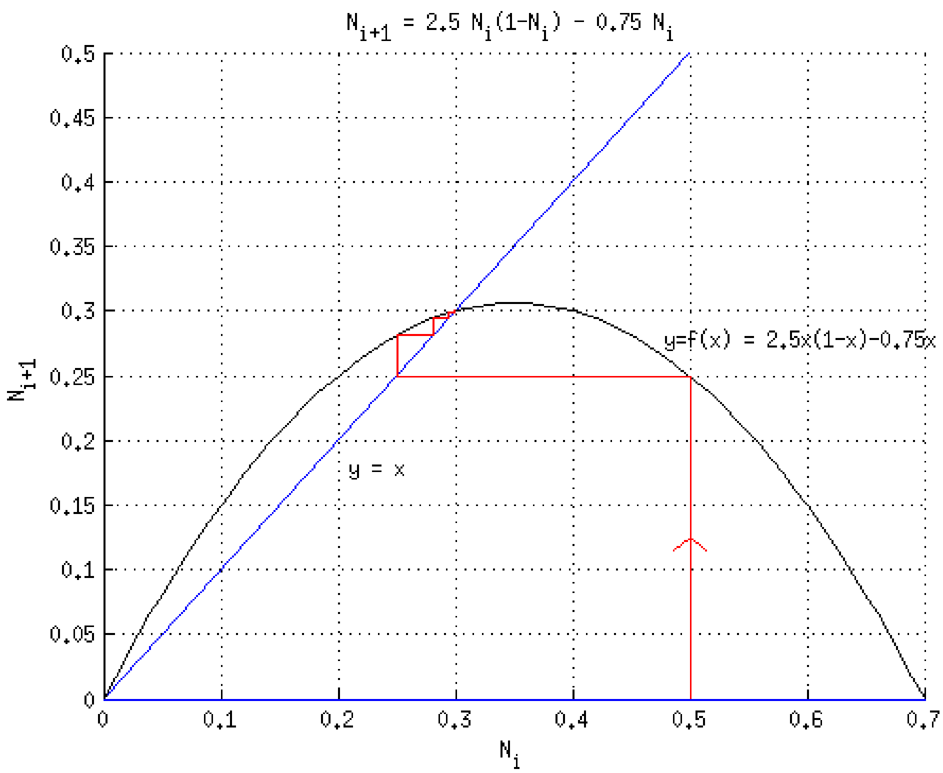
d) Pour $h = 3/4 = 0.75$, la fonction itérative est $f(x) = 2.5x(1-x) - hx = 2.5x(1-x) - 0.75x = 1.75x - 2.5x^2$ et le point d'équilibre positif du système dynamique discret $N_{i+1} = f(N_i) = 2.5N_1(1-N_i) - 0.75N_i$ est $p(3/4) = (3-2(3/4))/5 = 3/10 = 0.3$.

La dérivée de la fonction itérative est $f'(x) = 1.75 - 5x$. Ainsi,

$$|f'(0,3)| = |1.75 - 5 \times 0.3| = 0.25 < 1$$

et le point d'équilibre 0.3 est asymptotiquement stable.

e) Le graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique $N_{i+1} = f(N_i) = 2.5N_1(1 - N_i) - 0.75N_i$ est donné ci-dessous.



Question 5.120

Solution:
a) La fonction itérative du système dynamique discret est $f(x) = \dfrac{2.5x}{1+x} - hx$. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(x) = x$. $x = 0$ est une point d'équilibre. Si $x \neq 0$, alors on peut diviser les deux côtés de l'égalité $\dfrac{2.5x}{1+x} - hx = x$ par x pour obtenir $\dfrac{2.5}{1+x} - h = 1$. Si on résout pour x cette dernière équation, on obtient le deuxième point d'équilibre $x = p(h) = \dfrac{3-2h}{2+2h}$.

Pour que le point d´équilibre $p(h) = \dfrac{3-2h}{2+2h}$ soit positif, il faut avoir $h < 3/2$. Naturellement, le facteur d'efficacité h ne peut pas être négatif.

b) La récolte à long terme est

$$R(h) = h\,p(h) = h\left(\frac{3-2h}{2+2h}\right) = \frac{3h-2h^2}{2+2h}\ ,\ 0 \leq h \leq 3/2\ .$$

c) Comme R est une fonction continue définie sur l'intervalle fermé $[0, 3/2]$, on peut utiliser le théorème des valeurs extrêmes pour trouver le maximum absolu de R sur l'intervalle $[0, 3/2]$.

Puisque $R'(h) = \dfrac{-2h^2 - 4h + 3}{2(1+h)^2}$, on a que $R'(h) = 0$ si $-2h^2 - 4h + 3 = 0$. Les racines de ce polynôme sont $-1 \pm \sqrt{10}/2$. La seule racine qui appartient à l'intervalle $[0, 3/2]$ est $h_1 = -1 + \sqrt{10}/2 \approx 0.5811388$. C'est donc notre seul point critique dans l'intervalle $[0, 3/2]$.

On a $R(0) = R(3/2) = 0$ et $R(h_1) \approx 0.3377$. Le maximum de R sur l'intervalle $[0, 3/2]$ est approximativement 0.3377 lorsque $h = h_1$.

d) Pour $h = h_1$, la fonction itérative est $f(x) = \dfrac{2.5x}{1+x} - h_1 x$ et le point d'équilibre positif du système dynamique discret $N_{i+1} = f(N_i) = \dfrac{2.5N_1}{1+N_i} - h_1 N_i$ est $p(h_1) = \dfrac{3 - 2h_1}{2 + 2h_1} \approx 0.58113883$. (On remarque que $p(h_1) = h_1$. Pourquoi ?).

La dérivée de la fonction itérative est $f'(x) = \dfrac{2.5}{(1+x)^2} - h_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |f'(p(h_1))| &= \left| \frac{2.5}{(1+p(h_1))^2} - h_1 \right| \\ &\approx \left| \frac{2.5}{(1+0.58113883)^2} - 0.5811388 \right| \approx 0.418861 < 1 \end{aligned}$$

et le point d'équilibre $p(h_1) = 0.58113883$ est asymptotiquement stable.

Question 5.121

Question 5.122

Question 5.123

Solution:
a) La fonction itérative du système dynamique discret est $f(x) = 2.5xe^{-x} - hx$. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(x) = x$. Le point $x = 0$ est une point d'équilibre. Si $x \neq 0$ alors on peut diviser les deux côtés de l'égalité $2.5xe^{-x} - hx = x$ par x pour obtenir $2.5e^{-x} - h = 1$. Si on résout pour x cette dernière équation, on obtient le deuxième point d'équilibre $x = p(h) = \ln\left(\dfrac{5}{2+2h}\right)$.

Pour que le point d´équilibre $p(h) = \ln\left(\dfrac{5}{2+2h}\right)$ soit positif, il faut avoir $\dfrac{5}{2+2h} > 1$. Ce qui donne $h < 3/2$. Naturellement, le facteur d'efficacité h ne peut pas être négatif.

b) La récolte à long terme est

$$R(h) = h\,p(h) = h \ln\left(\frac{5}{2+2h}\right) \ , \ 0 \leq h \leq \frac{3}{2} \ .$$

c) Comme R est une fonction continue définie sur l'intervalle fermé $[0, 3/2]$, on peut utiliser le théorème des valeurs extrêmes pour trouver le maximum absolu de R sur l'intervalle $[0, 3/2]$.

On a

$$R'(h) = \ln\left(\frac{5}{2+2h}\right) - \frac{h}{1+h} \ , \ 0 \leq h \leq 3/2 \ .$$

Notons que $R'(0) = \ln(5/2) > 0$ et $R'(3/2) = -3/5 < 0$. Donc, il y a au moins un point critique positif pour R (une solution de $R'(h) = 0$) entre 0 et 3/2. De plus, puisque

$$R''(h) = -\frac{2}{1+h} + \frac{h}{(1+h)^2} = \frac{-2-h}{(1+h)^2} < 0$$

pour tout $h \in [0, 3/2]$, on a que R' est strictement décroissante. Donc, le point critique est unique ; R' ne peut pas couper l'axe des h plus d'une fois. Il est impossible de résoudre algébriquement $R'(h) = 0$. On doit donc utiliser la méthode de Newton avec $g(h) = R'(h)$. Si on prend $h_0 = 1 \in [0, 3/2]$, on obtient les résultats suivants.

n	h_n	$h_{n+1} = h_n - \frac{g(h_n)}{g'(h_n)}$
0	1	0.630858068418946
1	0.630858068418946	0.671659064055244
2	0.671659064055244	0.672372670703419
3	0.672372670703419	0.672372880075553
4	0.672372880075553	0.672372880075571
5	0.672372880075571	0.672372880075571

On trouve le point d'équilibre $H \approx 0.672372880075571$. Puisque $R(0) = R(3/2) = 0$ et $R(H) \approx 0.270325652399176 > 0$, La récolte à long terme est maximale lorsque $h = H$.

L'intégrale 6

6.1 Exercices

Question 6.1

Solution:
Puisque $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1}) = -x^{-2}$ pour $n = -1$. On peut prendre $h(x) = 1/x$.

Question 6.2

Solution:
La primitive générale est

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = 10\int x^{-9}\,\mathrm{d}x = 10\left(\frac{1}{-8}x^{-8}\right) + C = -\frac{5}{4x^8} + C$$

pour $x \neq 0$.

Question 6.3

Solution:
La primitive générale est

$$\begin{aligned} F(z) = \int f(z)\,\mathrm{d}z = 5\int z^{-1.2}\,\mathrm{d}z - 1.2\int 1\,\mathrm{d}z &= 5\left(\frac{z^{-0.2}}{-0.2}\right) - 1.2z + C \\ &= -25z^{-0.2} - 1.2z + C = -25z^{-1/5} - 1.2z + C \end{aligned}$$

pour $z \neq 0$.

Question 6.4

Solution:

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt[5]{t}} + 3t\right)\,\mathrm{d}t = \int\left(t^{-1/5} + 3t\right)\,\mathrm{d}t = \int t^{-1/5}\,\mathrm{d}t + \int 3t\,\mathrm{d}t = \frac{5}{4}\,t^{4/5} + \frac{3}{2}t^2 + C\ .$$

où C est une constante.

Question 6.5

Solution:

a) Si on pose $y = 2\pi(x-2)$, on obtient $\mathrm{d}y = 2\pi\,\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \cos(2\pi(x-2))\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int \cos(2\pi(x-2))\,2\pi\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int \cos(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi}\sin(y) + C = \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi(x-2)) + C\end{aligned}$$

b) Si on pose $y = 1+4t$, on obtient $\mathrm{d}y = 4\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{1+4t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+4t}\,4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\ln|y| + C = \frac{1}{4}\ln|1+4t| + C$$

c) Si on pose $y = 5-3x$, on obtient $\mathrm{d}y = -3\,\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{5-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{5-3x}(-3)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{3}\ln|y| + C = -\frac{1}{3}\ln|5-3x| + C\ .$$

d) Si on pose $u = 1+x+2x^2$, on obtient $\mathrm{d}u = (1+4x)\,\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\int \frac{1+4x}{\sqrt{1+x+2x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u = 2u^{1/2} + C = 2\sqrt{1+x+2x^2} + C\ .$$

e) Si on pose $y = x^3+1$, on obtient $\mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sqrt{x^3+1}\,(3x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int y^{1/2}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{9}y^{3/2} + C = \frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + C\ .$$

f) Si on pose $u = 1+e^t$, on obtient $\mathrm{d}u = e^t\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int e^t\left(1+e^t\right)^4\,\mathrm{d}t = \int \left(1+e^t\right)^4\,e^t\,\mathrm{d}t = \int u^4\,\mathrm{d}u = \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{5}(1+e^t)^5 + C\ .$$

g) Puisque $1-\cos^2(\theta) = \sin^2(\theta)$, on obtient

$$\int \frac{\cos(\theta)}{1-\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int \cot(\theta)\csc(\theta)\,\mathrm{d}\theta = -csc(\theta) + C\ .$$

Pour ceux qui auraient oublié que la dérivée de $\csc(\theta)$ est $-\cot(\theta)\csc(\theta)$, il est toujours possible d'utiliser la règle de substitution.

$$\int \frac{\cos(\theta)}{1-\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\ .$$

Si on pose $u = \sin(\theta)$, on obtient $\mathrm{d}u = \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Ainsi,

$$\int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int u^{-2}\,\mathrm{d}u = -u^{-1} + C = -\frac{1}{\sin(\theta)} + C = -\csc(\theta) + C\ .$$

h) Puisque $1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$, on obtient

$$\int \frac{\sin(\theta)}{1-\sin^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int \tan(\theta)\sec(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sec(\theta) + C\ .$$

Pour ceux qui auraient oublié que la dérivée de $\sec(\theta)$ est $\tan(\theta)\sec(\theta)$, il est toujours possible d'utiliser la règle de substitution.

$$\int \frac{\sin(\theta)}{1-\sin^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\ .$$

Si on pose $u = \cos(\theta)$, on obtient $\mathrm{d}u = -\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Ainsi,

$$\int \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = -\int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\int u^{-2}\,\mathrm{d}u = u^{-1} + C = \frac{1}{\cos(\theta)} + C = \sec(\theta) + C\ .$$

i) Si on pose $y = x^{3/2} + 1$, on obtient $\mathrm{d}y = (3/2)x^{1/2}\,\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\,\sin(x^{3/2}+1)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\int \sin(x^{3/2}+1)\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \sin(y)\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{2}{3}\cos(y) + C = -\frac{2}{3}\cos\left(x^{3/2}+1\right) + C\ .\end{aligned}$$

j) Avec la substitution $u = 1/t$, on obtient $\mathrm{d}u = -(1/t^2)\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(1/t)}{t^2}\,\mathrm{d}t &= -\int \cos\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t = -\int \cos(u)\,\mathrm{d}u \\ &= -\sin(u) + C = -\sin\left(\frac{1}{t}\right) + C\ .\end{aligned}$$

k) Si on pose $y = 1 + x^{1/2}$, on obtient $\mathrm{d}y = (1/2)x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{11}}\,\mathrm{d}x &= 2\int (1+\sqrt{x})^{-11}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)\,\mathrm{d}x = 2\int y^{-11}\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{5}y^{-10} + C = -\frac{1}{5}(1+x^{1/2})^{-10} + C\ .\end{aligned}$$

l) Si on pose $u = 1/t$, on obtient $\mathrm{d}u = -(1/t^2)\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int e^{1/t}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t = -\int e^u\,\mathrm{d}u = -e^u + C = -e^{1/t} + C\ .$$

Question 6.6

Solution:
a) Grâce aux propriétés du logarithme, on a

$$\int \ln\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x = \int \ln\left(x^{1/2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on utilise la méthode d'intégration par parties. On a $\ln(x) = f(x)g'(x)$ où $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = 1$. Ainsi, $f'(x) = 1/x$, $g(x) = x$ et

$$\frac{1}{2}\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\ln(x) - \int \mathrm{d}x\right) = \frac{x\ln(x)}{2} - \frac{C}{2} = \frac{x\ln(x)}{2} - D \ ,$$

où $D = C/2$

b) On a $\dfrac{\ln(x)}{x} = f(x)g'(x)$ où $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = x^{-1}$. Ainsi $f'(x) = x^{-1}$ et $g(x) = \ln(x)$. Donc,

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = (\ln(x))^2 - \int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

et, après avoir isolé l'intégrale du côté gauche, on obtient

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + C \ .$$

c) Puisque $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2^x\right) = 2^x\ln(2)$, on a

$$\int 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln(2)} + C \ .$$

On pourrait aussi évaluer cette intégrale sans avoir recours à la règle pour dériver expressions de la forme a^x où $a > 0$. On note que

$$\int 2^x\,\mathrm{d}x = \int e^{x\ln(2)}\,\mathrm{d}x \ .$$

Si on pose $y = x\ln(2)$, on a $\mathrm{d}y = \ln(2)\,\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int 2^x\,\mathrm{d}x = \int e^{x\ln(2)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\ln(2)}\int e^{x\ln(2)}\ln(2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(2)}\int e^y\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\ln(2)}\left(e^y + C\right) = \frac{1}{\ln(2)}e^{x\ln(2)} + D = 2^x + D \ ,\end{aligned}$$

où $D = C/\ln(2)$.

d) Puisque

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int \frac{1}{(x/3)^2+1}\,\mathrm{d}x \ ,$$

on pose $u = x/3$. Ainsi, $\mathrm{d}u = (1/3)\,\mathrm{d}x$ et

$$\begin{aligned}\frac{1}{9}\int \frac{1}{(x/3)^2+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x/3)^2+1}\left(\frac{1}{3}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{3}\left(\arctan(u)+C\right) = \frac{1}{3}\arctan(x/3)+D\ ,\end{aligned}$$

où $D = C/3$.

e) Puisque $x^2-9=(x-3)(x+3)$, on obtient

$$\int \frac{x+3}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+3}{(x-3)(x+3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x = \ln|x-3|+C\ .$$

où la dernière intégrale est calculée à l'aide de la substitution $u = x-3$.

f) Puisque le degré du numérateur est plus grand ou égale au degré du dénominateur, il faut diviser x^3+1 par x^2+3.

$$\frac{x^3+1}{x^2+3} = x + \frac{-3x+1}{x^2+3} = x + \frac{-3x}{x^2+3} + \frac{1}{x^2+3}\ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}I &= \int x\,\mathrm{d}x - \int \frac{3x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} - \int \frac{3x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Pour calculer

$$\int \frac{3x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x\ ,$$

on utilise la substitution $u = x^2+3$. Donc, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ et

$$\int \frac{3x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+3}\,(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\ln|u|+C_1 = \frac{3}{2}\ln(x^2+3)+C_1\ .$$

Pour calculer

$$\int \frac{1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(x/\sqrt{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x\ ,$$

on utilise la substitution $u = x/\sqrt{3}$. Donc, $\mathrm{d}u = 1/\sqrt{3}\ \mathrm{d}x$ et

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(x/\sqrt{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{\left(x/\sqrt{3}\right)^2+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(u)+C_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C_2\ .\end{aligned}$$

Donc,

$$I = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}\ln(x^2+3) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

où $C = C_1 + C_2$.

g) Puisque

$$\int e^t \left(2 + e^{2t}\right)\,\mathrm{d}t = \int \left(2e^t + e^{3t}\right)\,\mathrm{d}t = 2\int e^t\,\mathrm{d}t + \int e^{3t}\,\mathrm{d}t = 2e^t + \int e^{3t}\,\mathrm{d}t\ ,$$

il n'y a qu'une simple intégrale à calculer. Si on pose $y = 3t$, on obtient $\mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int e^{3t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int e^{3t}\,(3)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int e^y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}e^y + C = \frac{1}{3}e^{3t} + C\ .$$

Donc,

$$\int e^t \left(2 + e^{2t}\right)\,\mathrm{d}t = 2e^t + \frac{1}{3}e^{3t} + C\ .$$

h) On a

$$\int \frac{x}{e^{3x}}\,\mathrm{d}x = \int x e^{-3x}\,\mathrm{d}x\ .$$

Ainsi, $f(x)g'(x) = xe^{-3x}$ avec $f(x) = x$ et $g'(x) = e^{-3x}$. Donc, $f'(x) = 1$, $g(x) = -e^{-3x}/3$ et

$$\begin{aligned}\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x &= \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{xe^{-3x}}{3} + \int \frac{e^{-3x}}{3}\,\mathrm{d}x = -\frac{xe^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9} + C\ .\end{aligned}$$

i) On utilise la méthode d'intégration par parties. On a $f(x)g'(x) = x^2e^{-x}$ avec $f(x) = x^2$ et $g'(x) = e^{-x}$. Donc, $f'(x) = 2x$, $g(x) = -e^{-x}$ et

$$\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}t = \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}\,\mathrm{d}x\ .$$

On utilise la méthode d'intégration par parties une deuxième fois. On a $f(x)g'(x) = 2xe^{-x}$ avec $f(x) = 2x$ et $g'(x) = e^{-x}$. Donc, $f'(x) = 2$, $g(x) = -e^{-x}$ et

$$\begin{aligned}\int 2xe^{-x}\,\mathrm{d}t &= \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -2xe^{-x} + \int 2e^{-x}\,\mathrm{d}x = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C\ .\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int x^2e^{-x}\,\mathrm{d}t = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C\ .$$

j) Si on pose $y = x^2$, on obtient $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\int x^3\,e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x^2\,e^{x^2}(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int ye^y\,\mathrm{d}y\ .$$

Il suffit donc de calculer cette dernière intégrale à l'aide de la méthode d'intégration par parties. On a $f(y)g'(y) = ye^y$ avec $f(y) = y$ et $g'(y) = e^y$. Donc, $f'(y) = 1$, $g(y) = e^y$ et

$$\int ye^y \,\mathrm{d}y = \int f(y)g'(y)\,\mathrm{d}y = f(y)g(y) - \int f'(y)g(y)\,\mathrm{d}y = ye^y - \int e^y\,\mathrm{d}y = ye^y - e^y + C \ .$$

Finalement,

$$\int x^3\, e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C\right) = \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + D \ ,$$

où $D = C/2$.

k) On commence avec la substitution $y = \pi\theta$. On obtient $\mathrm{d}y = \pi\,\mathrm{d}\theta$. Ainsi,

$$\int \theta\cos(\pi\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi^2}\int (\pi\theta)\cos(\pi\theta)\;\pi\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi^2}\int y\cos(y)\,\mathrm{d}y \ .$$

On utilise la méthode d'intégration par parties pour évaluer cette dernière intégrale. On a $f(y)g'(y) = y\cos(y)$ avec $f(y) = y$ et $g'(y) = \cos(y)$. Donc, $f'(y) = 1$, $g(y) = \sin(y)$ et

$$\begin{aligned}\int y\cos(y)\,\mathrm{d}y &= \int f(y)g'(y)\,\mathrm{d}y = f(y)g(y) - \int f'(y)g(y)\,\mathrm{d}y \\ &= y\sin(y) - \int \sin(y)\,\mathrm{d}y = y\sin(y) + \cos(y) + C \ .\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\int \theta\cos(\pi\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi^2}\left(\pi\theta\sin(\pi\theta) + \cos(\pi\theta) + C\right) = \frac{1}{\pi}\theta\sin(\pi\theta) + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi\theta) + D \ ,$$

où $D = C/\pi^2$.

l) On utilise la méthode d'intégration par parties pour évaluer cette intégrale.
On a $f(x)g'(x) = (x^2 + x^6)\ln(x)$ avec $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = (x^2 + x^6)$. Donc, $f'(x) = 1/x$, $g(x) = x^3/3 + x^7/7$ et

$$\begin{aligned}\int (x^2 + x^6)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7}\right)\ln(x) - \int\left(\frac{x^2}{3} + \frac{x^6}{7}\right)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7}\right)\ln(x) - \left(\frac{x^3}{9} + \frac{x^7}{49}\right) + C \ .\end{aligned}$$

Question 6.7

Solution:
On a

$$f'(x) = \int f''(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(1 + x^{4/5}\right)\,\mathrm{d}x = x + \frac{5x^{9/5}}{9} + C$$

et

$$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(x + \frac{5x^{9/5}}{9} + C\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{25}{126}x^{14/5} + Cx + D \ ,$$

où C et D sont deux constantes quelconques.

Question 6.8

Solution:
a)

$$\int \left(e^x + \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x = \int e^x \,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = e^x + \ln|x| + C \ .$$

b) On pose $y = 3x/7$. Alors $\mathrm{d}y = \dfrac{3}{7}\,\mathrm{d}x$ et

$$\int 3e^{3x/7} \,\mathrm{d}x = 7 \int e^{3x/7} \left(\frac{3}{7}\right) \,\mathrm{d}x = 7 \int e^y \,\mathrm{d}y\Big|_{y=3x/7} = 7e^y\Big|_{y=3x/7} + C = 7e^{3x/7} + C \ .$$

c) On pose $y = 1 + \dfrac{t}{3}$. Alors $\mathrm{d}y = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}t$ et

$$\begin{aligned}\int \left(1 + \frac{t}{3}\right)^7 \mathrm{d}t &= 3 \int \left(1 + \frac{t}{3}\right)^7 \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t = 3 \int y^7 \,\mathrm{d}y\Big|_{y=1+\frac{t}{3}} \\ &= \frac{3}{8} y^8\Big|_{y=1+\frac{t}{3}} + C = \frac{3}{8}\left(1 + \frac{t}{3}\right)^8 + C \ .\end{aligned}$$

d) On pose $y = 1 + e^z$. Alors $\mathrm{d}y = e^z\,\mathrm{d}z$ et

$$\int \frac{e^z}{1+e^z} \,\mathrm{d}z = \int \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y\Big|_{y=1+e^z} = \ln|y|\,\Big|_{y=1+e^z} + C = \ln|1+e^z| + C \ .$$

e) On pose $u = 1 + y^2$. Alors $\mathrm{d}u = 2y\,\mathrm{d}y$ et

$$\begin{aligned}\int 3y\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y &= \frac{3}{2} \int \sqrt{1+y^2}\,(2y)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2} \int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u\Big|_{u=1+y^2} \\ &= u^{3/2}\Big|_{u=1+y^2} + C = (1+y^2)^{3/2} + C \ .\end{aligned}$$

f) On pose $u = \ln(x)$. Alors $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}y$ et

$$\int \frac{1}{x\ln(x)} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln(x)} \left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\Big|_{u=\ln(x)} = \ln|u|\Big|_{u=\ln(x)} + C = \ln|\ln(x)| + C \ .$$

g) On a $x^2e^x = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = x^2$ et $g'(x) = e^x$. Donc, $g(x) = e^x$ et $f'(x) = 2x$. Ainsi,

$$\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x = \int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2\int xe^x\,\mathrm{d}x \ .$$

On doit encore utiliser la méthode d'intégration par parties pour évaluer $\int xe^x \,\mathrm{d}x$. On a $xe^x = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = x$ et $g'(x) = e^x$. Donc, $g(x) = e^x$ et $f'(x) = 1$. Ainsi,

$$\int xe^x \,\mathrm{d}x = \int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C \;.$$

On obtient donc

$$\int x^2e^x \,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2\int xe^x \,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2\,(xe^x - e^x + C) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + D$$

où $D = -2C$.

h) Posons

$$I = \int e^x \sin(x) \,\mathrm{d}x \;.$$

On a $e^x \sin(x) = f(x)\,g'(x)$ pour $f(x) = e^x$ et $g'(x) = \sin(x)$. Donc, $f'(x) = e^x$, $g(x) = -\cos(x)$ et

$$\begin{aligned} I = \int e^x \sin(x) \,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -e^x\cos(x) + \int e^x\cos(x)\,\mathrm{d}x \;. \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Utilisons une seconde fois la méthode d'intégration par parties pour évaluer l'intégrale

$$\int e^x \cos(x) \,\mathrm{d}x \;.$$

On a $e^x \cos(x) = f(x)\,g'(x)$ pour $f(x) = e^x$ et $g'(x) = \cos(x)$. Donc, $f'(x) = e^x$, $g(x) = \sin(x)$ et

$$\begin{aligned} \int e^x \cos(x) \,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x)\,\mathrm{d}x = e^x\sin(x) - I \;. \end{aligned}$$

Si on substitue cette expression dans (6.1.1), on obtient

$$I = -e^x\cos(x) + (e^x\sin(x) - I)$$

et, après avoir isolé I, on trouve

$$I = \frac{1}{2}\left(e^x\sin(x) - e^x\cos(x)\right) \;,$$

une primitive de $\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^x\sin(x) - e^x\cos(x)\right) + C \;.$$

i) On pose $t = u^5$. Alors $\mathrm{d}t = 5u^4\,\mathrm{d}u$ et

$$\int \frac{t^{3/5}}{1+t^{2/5}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{u^3}{1+u^2}\left(5u^4\right)\,\mathrm{d}u = \int \frac{5u^7}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \ .$$

Si on divise $5u^7$ par $1+u^2$, on obtient

$$\frac{5u^7}{1+u^2} = 5u^5 - 5u^3 + 5u - \frac{5u}{1+u^2} \ .$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int \frac{t^{3/5}}{1+t^{2/5}}\,\mathrm{d}t &= \int \frac{5u^7}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int \left(5u^5 - 5u^3 + 5u - \frac{5u}{1+u^2}\right)\,\mathrm{d}u \\ &= 5\int u^5\,\mathrm{d}u - 5\int u^3\,\mathrm{d}u + 5\int u\,\mathrm{d}u - 5\int \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{5u^6}{6} - \frac{5u^4}{4} + \frac{5u^2}{2} - 5\int \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \ .\end{aligned}$$

Pour évaluer $\displaystyle\int \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$, on pose $v = 1+u^2$. On a

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = 2u \Rightarrow \frac{1}{2}\,\mathrm{d}v = u\,\mathrm{d}u \ .$$

Ainsi,

$$\int \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\ln|v| + C = \frac{1}{2}\ln|1+u^2| + C \ .$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}\int \frac{t^{3/5}}{1+t^{2/5}}\,\mathrm{d}t &= \frac{5u^6}{6} - \frac{5u^4}{4} + \frac{5u^2}{2} - 5\int \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{5u^6}{6} - \frac{5u^4}{4} + \frac{5u^2}{2} - \frac{5}{2}\ln|1+u^2| - 5C \\ &= \frac{5t^{6/5}}{6} - \frac{5t^{4/5}}{4} + \frac{5t^{2/5}}{2} - \frac{5}{2}\ln|1+t^{2/5}| + D\end{aligned}$$

où $D = -5C$ car $u = t^{1/5}$.

Question 6.9

Solution:
a) Puisque le degré du numérateur est plus grand ou égale au degré du dénominateur, il faut diviser x^4+3 par x^2-4x+3.

$$\frac{x^4+3}{x^2-4x+3} = x^2 + 4x + 13 + \frac{40x-36}{x^2-4x+3} \ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+3}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x &= \int (x^2+4x+13)\,\mathrm{d}x + \int \frac{40x-36}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 13x + \int \frac{40x-36}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Pour évaluer la dernière intégrale, on note que $x^2-4x+3 = (x-3)(x-1)$. Ainsi,

$$\frac{40x-36}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} \ .$$

Comme on a des racines réelles distinctes, on peut utiliser la technique suivante pour déterminer la valeur de A et de B. Si on met sur un même dénominateur commun on obtient

$$40x-36 = A(x-1) + B(x-3) \ .$$

Si $x=1$, on obtient $4=-2B$ et ainsi $B=-2$. Si $x=3$, on obtient $84=2A$ et ainsi $A=42$. Donc,

$$\frac{40x-36}{x^2-4x+3} = \frac{42}{x-3} + \frac{-2}{x-1}$$

et

$$\int \frac{40x-36}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{42}{x-3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-2}{x-1}\,\mathrm{d}x = 42\ln|x-3| - 2\ln|x-1| + C \ .$$

On obtient finalement,

$$\int \frac{x^4+3}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 13x + 42\ln|x-3| - 2\ln|x-1| + C \ .$$

b) Puisque le degré du numérateur, $x-9$, est plus petit que le degré du dénominateur, $(x+5)(x-2)$, on n'a pas a diviser. le dénominateur est déjà factorisé. On a

$$\begin{aligned}\frac{x-9}{(x+5)(x-2)} &= \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+5)}{(x+5)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B)x + (5B-2A)}{(x+5)(x-2)}\end{aligned}$$

De $A+B=1$, on obtient $B=1-A$ que l'on substitue dans $5B-2A=-9$ pour obtenir $5(1-A)-2A=-9$. Donc $A=2$ et $B=1-A=-1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{2}{x+5} + \frac{-1}{x-2}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(x+5) - \ln(x-2) + C \ .\end{aligned}$$

c) Puisque le degré du numérateur, 1, est plus petit que le degré du dénominateur, x^2+x+1, on n'a pas a diviser. Le polynôme x^2+x+1 n'a pas de racines réelles. Donc, on ne peut pas utiliser pas la méthode d'intégration par fractions partielles. On complète le carré du polynôme $x^2 + x + 1$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\,\mathrm{d}x\ .$$

Si on pose $u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$, on obtient $\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x$ et

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(u) + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C\ .\end{aligned}$$

d) Puisque le degré du numérateur, 1, est plus petit que le degré du dénominateur, t^2+6t+8, on n'a pas a diviser. Le dénominateur peut être factorisé. On a $t^2+6t+8 = (t+2)(t+4)$. On utilise donc la méthode d'intégration par fractions partielles. On a

$$\frac{1}{(t+2)(t+4)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+4} = \frac{A(t+4)+B(t+2)}{(t+2)(t+4)} = \frac{(A+B)t+(4A+2B)}{(t+2)(t+4)}\ .$$

Donc $A+B=0$ et $4A+2B=1$. On trouve $A = -B = 1/2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^2+6t+8}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(t+2)(t+4)}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+4}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln|t+2| - \frac{1}{2}\ln|t+4| + C\ .\end{aligned}$$

e) Puisque le degré du numérateur, 1, est plus petit que le degré du dénominateur, $x^2 - 4x + 13$, on n'a pas a diviser. Le polynôme $x^2 - 4x + 13$ n'a pas de racines réelles. Donc, on ne peut pas utiliser la méthode d'intégration par fractions partielles. On complète le carré du polynôme $x^2 - 4x + 13$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{x^2-4x+13}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-2)^2+9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x\ .$$

Si on pose $u = \dfrac{x-2}{3}$, on obtient $\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x$ et

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-4x+13}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}\left(\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{3}\arctan(u) + C = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C\ .\end{aligned}$$

f) Puisque le degré du numérateur, 1, est plus petit que le degré du dénominateur, $x^2 - 9$, on n'a pas a diviser. Le dénominateur peut être factorisé. On a $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. On utilise donc la méthode d'intégration par fractions partielles. On a

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A-3B)}{(x-3)(x+3)}\ .$$

Donc $A+B=0$ et $3A-3B=1$. On trouve $A=-B=1/6$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x-3)(x+3)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{6}\ln|x-3| - \frac{1}{6}\ln|x+3| + C\ .\end{aligned}$$

g) Puisque le degré du numérateur, 1, est plus petit que le degré du dénominateur, x^2-x-2, on n'a pas a diviser. Le dénominateur peut être factorisé. On a $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$. On utilise donc la méthode d'intégration par fractions partielles. On a

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{(A+B)x+(A-2B)}{(x-2)(x+1)}\ .$$

Donc $A+B=0$ et $A-2B=1$. On trouve $A=-B=1/3$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x-2)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C\ .\end{aligned}$$

h) Puisque le degré du numérateur est plus grand ou égale au degré du dénominateur, il faut diviser t^2+1 par t^2+3t+2.

$$\frac{t^2+1}{t^2+3t+2} = 1 - \frac{3t+1}{t^2+3t+2}\ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2+1}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t &= \int 1\,\mathrm{d}t + \int \frac{3t+1}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t \\ &= t + \int \frac{3t+1}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Pour évaluer la dernière intégrale, on note que $t^2+3t+2=(t+2)(t+1)$. Ainsi,

$$\frac{3t+1}{t^2+3t+2} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+1}\ .$$

Comme on a des racines réelles distinctes, on peut utiliser la technique suivante pour déterminer la valeur de A et de B. Si on met sur un même dénominateur commun on obtient

$$3t+1 = A(t+1) + B(t+2)\ .$$

Si $t=-1$, on obtient $-2=B$ et ainsi $B=-2$. Si $t=-2$, on obtient $-5=-A$ et ainsi $A=5$. Donc,

$$\frac{3t+1}{t^2+3t+2} = \frac{5}{t+2} - \frac{2}{t+1}$$

et
$$\int \frac{3t+1}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{5}{t+2}\,\mathrm{d}t - \int \frac{2}{t+1}\,\mathrm{d}t = 5\ln|t+2| - \ln|t+1| + C\ .$$
On obtient finalement,
$$\int \frac{t^2+1}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t = t + 5\ln|t+2| - \ln|t+1| + C\ .$$

Question 6.10

Solution:
On a $\Delta t = 1/5$ et $t_i = 0 + i\Delta t = i/5$ pour $i = 0$, 1, 2, 3, 4 et 5. On a cinq intervalles de la forme $[t_i, t_{i+1}]$ pour $i = 0$, 1, 2, 3 et 4 ; c'est-à-dire, on a $[0, 1/5]$, $1/5, 2/5]$, ..., et $[4/5, 5/5]$.

La somme de Riemann à gauche est donnée par $t_i^* = t_i = i/5$ pour $i = 0$, 1, 2, 3 et 4. Ainsi,
$$\begin{aligned} G_5 &= \sum_{i=0}^{4} f(t_i^*)\Delta t = \sum_{i=0}^{4} \left(1 + \left(\frac{i}{5}\right)^3\right)\left(\frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{1}{5}(1+0^3) + \frac{1}{5}\left(1 + \left(\frac{1}{5}\right)^3\right) + \frac{1}{5}\left(1 + \left(\frac{2}{5}\right)^3\right) \\ &\quad + \frac{1}{5}\left(1 + \left(\frac{3}{5}\right)^3\right) + \frac{1}{5}\left(1 + \left(\frac{4}{5}\right)^3\right) = \frac{29}{25} \end{aligned}$$

La somme de Riemann à droite est donnée par $t_i^* = t_{i+1} = (i+1)/5$ pour $i = 0$, 1, 2, 3 et 4. Ainsi,
$$\begin{aligned} D_5 &= \sum_{i=0}^{4} f(t_i^*)\Delta t = \sum_{i=0}^{4} \left(1 + \left(\frac{i+1}{5}\right)^3\right)\left(\frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(1 + \left(\frac{1}{5}\right)^3\right) + \frac{1}{5}\left(1 + \left(\frac{2}{5}\right)^3\right) + \frac{1}{5}\left(1 + \left(\frac{3}{5}\right)^3\right) \\ &\quad + \frac{1}{5}\left(1 + \left(\frac{4}{5}\right)^3\right) + \frac{1}{5}\left(1 + \left(\frac{5}{5}\right)^3\right) = \frac{34}{25} \end{aligned}$$

Question 6.11

Solution:
La distance parcourue est $\displaystyle\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t$. C'est cette intégrale que l'on va estimer à l'aide des sommes de Riemann.

On a $\Delta t = 5$ et $t_i = 0 + 5i$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$. La somme de Riemann à droite est

$$\begin{aligned} D_{10} &= \sum_{i=1}^{10} v(t_i)\Delta t \\ &= (12.2 + 11.8 + 11.5 + 11.3 + 11.2 + 11.2 + 11.3 + 11.6 + 12.0 + 12.5)\,(5) = 583 \text{ m} \end{aligned}$$

La somme de Riemann à gauche est

$$\begin{aligned} G_{10} &= \sum_{i=0}^{9} v(t_i)\Delta t \\ &= (12.7 + 12.2 + 11.8 + 11.5 + 11.3 + 11.2 + 11.2 + 11.3 + 11.6 + 12.0)\,(5) = 584 \text{ m} \end{aligned}$$

Question 6.12

Solution:
Pour $n = 3$, on a $\Delta x = (2 - (-1))/3 = 1$ et $x_i = -1 + i\Delta x = -1 + i$ pour $i = 0, 1, 2$ et 3. On a les trois intervalles $[-1, 0]$, $[0, 1]$ et $[1, 2]$.

Pour $n = 6$, on a $\Delta x = (2 - (-1))/6 = 1/2$ et $x_i = -1 + i\Delta x = -1 + i/2$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots,$ et 6. On a les six intervalles $[-1, -0.5]$, $[-0.5, 0]$, $\ldots$, et $[1.5, 2]$.

a) La somme à droite avec $n = 3$ est

$$D_3 = (f(0) + f(1) + f(2))(1) \approx 8 \ .$$

Donc $\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,\mathrm{d}x \approx D_3 = 8$.

La somme à droite avec $n = 6$ est

$$D_6 = (f(-0.5) + f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5) + f(2))(0.5) = 6.875 \ .$$

Donc $\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,\mathrm{d}x \approx D_6 = 6.875$.

b) La somme à gauche avec $n = 3$ est

$$G_3 = (f(-1) + f(0) + f(1))(1) = 5 \ .$$

Donc $\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,\mathrm{d}x \approx G_3 = 5$.

La somme à gauche avec $n = 6$ est

$$G_6 = (f(-1) + f(-0.5) + f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5))(0.5) = 5.375 \ .$$

Donc $\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,\mathrm{d}x \approx G_6 = 5.375$.

c) La somme de Riemann où les points au choix sont les points milieux des intervalles et $n = 3$ est

$$S_3 = 1 \times (f(-0.5) + f(0.5) + f(1.5)) = 5.75 \ .$$

Donc $\int_{-1}^{2}(1+x^2)\,\mathrm{d}x \approx S_3 = 5.75$.

La somme de Riemann où les points au choix sont les points milieux des intervalles et $n=6$ est

$$S_6 = 0.5(f(-0.75)+f(-0.25)+f(0.25)+f(0.75)+f(1.25)+f(1.75)) = 5.9375\ .$$

Donc $\int_{-1}^{2}(1+x^2)\,\mathrm{d}x \approx S_6 = 5.9375$.

d) La meilleure approximation est donnée par la somme S_6.

Question 6.13

Solution:
On choisit des intervalles de longueur $\Delta t = 2/5$. On obtient une partition de l'intervalle $[0,2]$ en sous-intervalles de la forme $[t_i, t_{i+1}]$ où $t_i = 0 + i\,\Delta t = 2i/5$ pour $i = 0$, 1, 2, 3, 4 et 5.

La somme de Riemann à droite est

$$D_5 = \sum_{i=1}^{5} f(t_i)\Delta t = \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{10}{5}\right)^2\right)\left(\frac{2}{5}\right) = 3.52\ .$$

La somme de Riemann à gauche est

$$G_5 = \sum_{i=0}^{4} f(t_i)\Delta t = \left(\left(\frac{0}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2\right)\left(\frac{2}{5}\right) = 1.92\ .$$

Question 6.14

Solution:
On a $\Delta x = (6-1)/5 = 1$ et $x_i = 1 + i\Delta x = 1 + i$ pour $i = 0$, 1, 2, 3, 4 et 5. On a les cinq intervalles $[1,2]$, $[2,3]$, ..., et $[4,5]$.

La somme de Riemann où les points au choix sont les points milieux des intervalles est

$$\begin{aligned} S_5 &= \Big((\sqrt{1.5}-2)+(\sqrt{2.5}-2)+(\sqrt{3.5}-2)+(\sqrt{4.5}-2)+(\sqrt{5.5}-2)\Big)(1) \\ &\approx -0.856759\ . \end{aligned}$$

Donc $\int_{1}^{6}(\sqrt{x}-2)\,\mathrm{d}x \approx -0.856759$.

Question 6.15

Solution:
On a $\Delta x = (10-2.5)/5 = 1.5$ et $x_i = 2.5 + i\Delta x = 2.5 + 1.5i$ pour $i = 0$, 1, 2, 3, 4 et 5. On a les cinq intervalles $[2.5,4]$, $[4,5.5]$, $[5.5,7]$, $7, 8.5]$ et $[8.5,10]$ qui possèdent les points milieux 3.25, 4.75, 6.25, 7.75 et 9.25 respectivement.

$$\begin{aligned}&\int_{2.5}^{10} \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x \approx S_5 \\ &= \big(\sin(\sqrt{3.25}) + \sin(\sqrt{4.75}) + \sin(\sqrt{6.25}) + \sin(\sqrt{7.75}) + \sin(\sqrt{9.25})\big)(1.5) \approx 4.2634178\ .\end{aligned}$$

Question 6.16

Solution:
On a $\Delta x = 5$ et $x_i = i\Delta x = 5i$ pour $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ et 5. On a les cinq intervalles $[0,5]$, $[5,10]$, $\ldots$, et $[20,25]$.

La somme de Riemann à gauche est

$$G_5 = (f(0) + f(5) + f(10) + f(15) + f(20))(5) = -475$$

La somme de Riemann à droite est

$$D_5 = (f(5) + f(10) + f(15) + f(20) + f(25))(5) = -85$$

Puisque f est une fonction croissante, $-475 = G_5 \leq \int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x \leq D_5 = -85$.

Question 6.17

Solution:
C'est la somme de Riemann à droite pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\ \mathrm{d}x$. On a $\Delta x = \pi/n$ et $x_j = 0 + \pi j/n$ pour $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Question 6.18

Solution:
Entre $t = 0$ et $t = 20$ la pente est négative (i.e. $V'(t) < 0$ et V est décroissante) mais de moins en moins négative (i.e. V est convexe). La pente est nulle à $t = 20$. Entre $t = 20$ et $t = 60$, la pente est positive (i.e. $V'(t) > 0$ et V est croissante) et de plus en plus positive (i.e. convexe). Entre $t = 60$ et $t = 100$, la pente est toujours positive (i.e. $V'(t) > 0$ et V est croissante) mais elle est de moins en moins positive (i.e. concave).

Si on utilise le Théorème fondamental du calcul, on a que

$$V(b) - V(a) = \int_a^b V'(s)\,\mathrm{d}s$$

L'aire entre la courbe $y = V'(t)$, l'axe des t et les droites $t = 0$ et $t = 20$ est environ 500. Donc,

$$V(20) = V(0) + \int_0^{20} V'(s)\,\mathrm{d}s \approx 1000 - 500 = 500$$

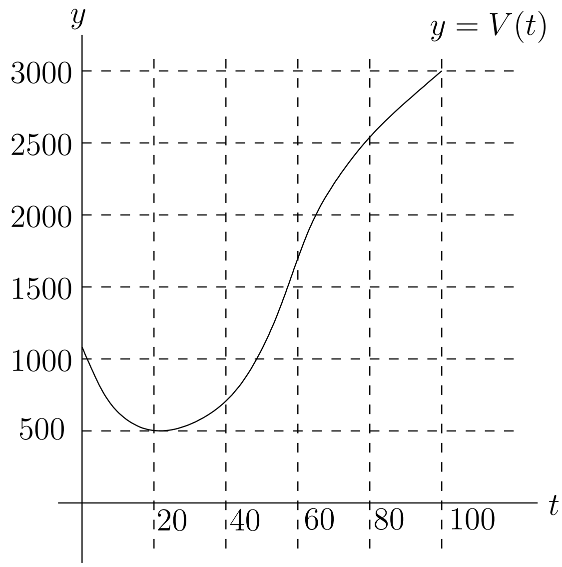
L'aire entre la courbe $y = V'(t)$, l'axe des t et les droites $t = 20$ et $t = 60$ est environ 1200. Donc,

$$V(60) = V(20) + \int_{20}^{60} V'(s)\,\mathrm{d}s \approx 500 + 1200 = 1700$$

Finalement, L'aire entre la courbe $y = V'(t)$, l'axe des t et les droites $t = 60$ et $t = 100$ est environ 1300. Donc,

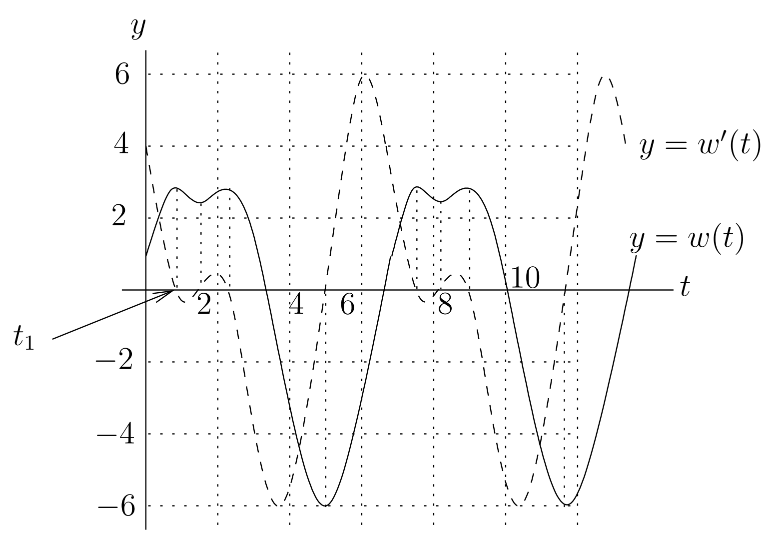
$$V(100) = V(60) + \int_{60}^{100} V'(s)\,\mathrm{d}s \approx 1700 + 1300 = 3000$$

On obtient la figure suivante :



Question 6.19

Solution:
On obtient le graphe suivant :



On a utiliser le théorème fondamental du calcul pour estimer $w(t)$ à certaines valeur de t. Par exemple, pour $0 \leq t < t_1$ (voir la figure ci-dessus), on a que $w'(t) > 0$. Donc w est une fonction croissante sur l'intervalle $[0, t_1[$. De plus, grâce au théorème fondamental du calcul, on a que

$$w(t_1) = w(0) + \int_0^{t_1} w'(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^{t_1} w'(t)\,\mathrm{d}t \approx 3 \ .$$

On estime la valeur de l'intégrale à l'aide de l'aire sous la courbe $y = w'(t)$ pour $0 \leq t < t_1$.

Question 6.20

Solution:
On a $f(z) = f(0) + \int_0^z f'(x)\,\mathrm{d}x = 1 + \int_0^z f'(x)\,\mathrm{d}x$.

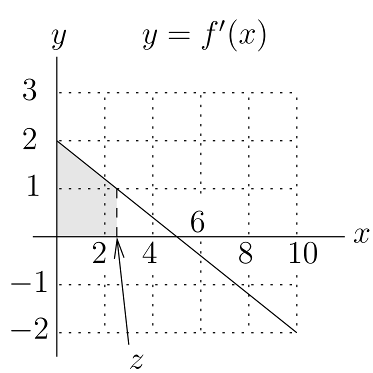
Lorsque z augmente de 0 à 5, l'aire sous la courbe $y = f'(x)$ et au-dessus de l'axe des x pour $0 \leq x \leq z$ augmente (voir figure ci-dessous). L'aire croît rapidement au début, lorsque z est près de l'origine, et de moins en moins rapidement lorsque z approche 5. L'aire sous la courbe $y = f'(x)$ pour $0 \leq x \leq 5$ est 5. Donc,

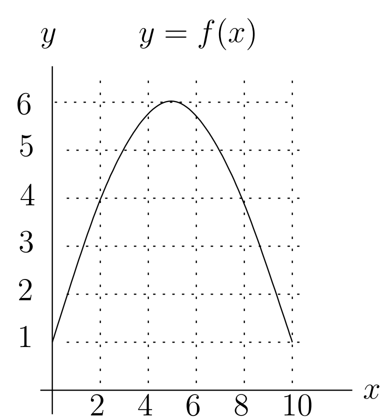
$$f(5) = f(0) + \int_0^5 f'(x)\,\mathrm{d}x = 1 + \int_0^5 f'(x)\,\mathrm{d}x = 1 + 5 = 6 \ .$$

Lorsque z augmente de 5 à 10, l'aire entre la courbe $y = f'(x)$ et l'axe des x pour $5 \leq x \leq z$ augmente. Cependant, comme $f'(x) < 0$ pour $5 < x \leq 10$, la valeur de l'intégrale $\int_0^z f'(x)\,\mathrm{d}x$ diminue. La valeur de l'intégrale décroît lentement lorsque $z > 5$ est près de 5 et de plus en plus rapidement lorsque z approche 10.

De plus, on remarque que l'aire entre la courbe $y = f'(x)$ et l'axe des x pour $0 \leq x \leq 5$ est égale à l'aire entre la courbe $y = f'(x)$ et l'axe des x pour $5 \leq x \leq 10$. Ainsi, $\int_0^{10} f'(s)\,\mathrm{d}s = 0$ et on obtient

$$f(10) = f(0) + \int_0^{10} f'(x)\,\mathrm{d}x = 1 \ .$$



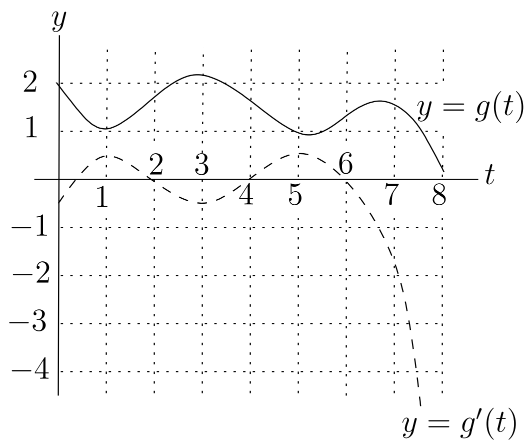


Question 6.21

Solution:
On a $g(s) = g(0) + \int_0^s g'(t)\,\mathrm{d}t = 2 + \int_0^s g'(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Si $g'(t) < 0$ pour $a \leq t \leq b$ alors $\int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t$ est moins l'aire entre la courbe $y = g'(t)$ et l'axe des t pour $a \leq t \leq b$.
2. Si $g'(t) > 0$ pour $a \leq t \leq b$ alors $\int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire entre la courbe $y = g'(t)$ et l'axe des t pour $a \leq t \leq b$.

Si on utilise ces deux propriétés, on peut tracer le graphe de g suivant.

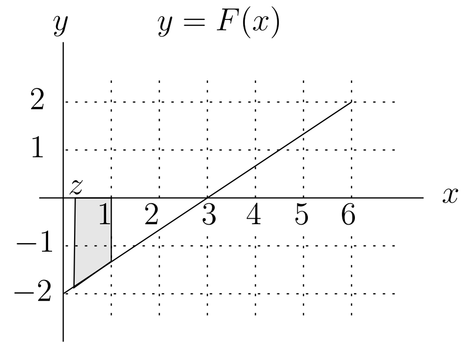


Question 6.22

Solution:
Puisque $f'(x) = F(x)$ pour tout x, on a

$$f(z) = f(1) + \int_1^z F(x)\,\mathrm{d}x = 3 + \int_1^z F(x)\,\mathrm{d}x \quad . \tag{6.1.2}$$

Pour $0 \leq z \leq 1$. $\int_1^z F(x)\,\mathrm{d}x = -\int_z^1 F(x)\,\mathrm{d}x$. Cependant, comme $F(x) < 0$ pour $0 \leq x \leq 3$, la valeur de l'intégrale est négative.

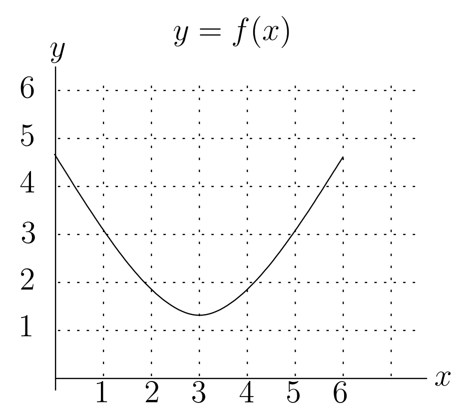


Ainsi, on déduit de (6.1.2) que $f(0) = 3-(-5/3)) = 14/3$ car l'aire entre la courbe $y = F(x)$ et l'axe des x pour $0 \leq x \leq 1$ est $5/3$. Lorsque $z < 1$ augmente, l'aire entre la courbe $y = F(x)$ et l'axe des x pour $z \leq x \leq 1$ diminue de plus en plus lentement. Donc, $\displaystyle\int_1^z F(x)\,\mathrm{d}x > 0$ diminue de plus en plus lentement jusqu'à la valeur 0 lorsque $z = 1$.

Pour $1 \leq z \leq 3$. On a $\displaystyle\int_1^z F(x)\,\mathrm{d}x < 0$ car $F(x) < 0$ pour $0 \leq x \leq 3$. $\displaystyle\int_1^z F(s)\,\mathrm{d}s < 0$ décroît de plus en plus lentement lorsque z approche 3. On déduit de (6.1.2) que $f(3) = 3-(4/3) = 5/3$ car l'aire entre la courbe $y = F(x)$ et l'axe des x pour $1 \leq x \leq 3$ est $4/3$.

Finalement, pour $3 \leq z \leq 6$. On a $\displaystyle\int_1^z F(x)\,\mathrm{d}x > 0$ car $F(x) > 0$ pour $3 < x \leq 6$. $\displaystyle\int_1^z F(x)\,\mathrm{d}x > 0$ croit de plus en plus rapidement lorsque z approche 6. On déduit de (6.1.2) que $f(6) = 3-(4/3)+3 = 14/3$ car l'aire entre la courbe $y = F(x)$ et l'axe des x pour $1 \leq x \leq 3$ est $4/3$ et l'aire entre la courbe $y = F(x)$ et l'axe des x pour $3 \leq x \leq 6$ est 3.

On obtient le graphe suivant pour $y = f(x)$.

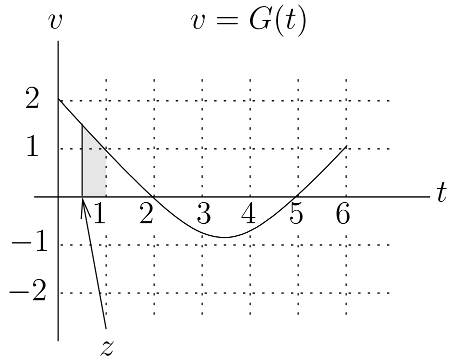


Question 6.23

Solution:
Puisque $g'(x) = G(x)$ pour tout x, on a

$$g(z) = g(1) + \int_1^z G(x)\,\mathrm{d}x = 10 + \int_1^z G(x)\,\mathrm{d}x \ . \tag{6.1.3}$$

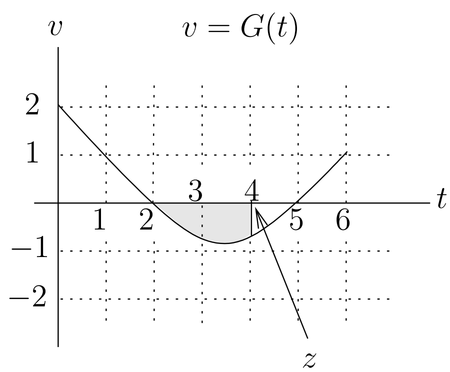
Pour $0 \leq z \leq 1$. $\displaystyle\int_1^z G(x)\,\mathrm{d}x = -\int_z^1 G(x)\,\mathrm{d}x$. Lorsque $z < 1$ augmente, l'aire entre la courbe $y = G(x)$ et l'axe des x pour $z \leq x \leq 1$ diminue de plus en plus lentement. Donc, $\displaystyle\int_1^z G(x)\,\mathrm{d}x < 0$ augmente de plus en plus lentement jusqu'à la valeur 0 lorsque $z = 1$.



On déduit de (6.1.3) que $g(0) \approx 10 - 1.5 = 8.5$ car l'aire entre la courbe $y = G(x)$ et l'axe des x pour $0 \leq x \leq 1$ est approximativement 1.5.

Pour $1 \leq z \leq 2$. On a $\displaystyle\int_1^z G(x)\,\mathrm{d}x > 0$ car $G(x) > 0$ pour $0 < x < 2$. Donc, $\displaystyle\int_1^z G(x)\,\mathrm{d}x > 0$ croit de plus en plus lentement lorsque z approche 2. On déduit de (6.1.3) que $g(2) \approx 10 + 0.5 = 10.5$ car l'aire entre la courbe $y = G(x)$ et l'axe des x pour $1 \leq x \leq 2$ est approximativement 0.5.

Pour $2 \leq z \leq 5$. On a $\displaystyle\int_2^z G(x)\,\mathrm{d}x < 0$ car $G(x) < 0$ pour $2 < x < 5$. Donc, $\displaystyle\int_2^z G(x)\,\mathrm{d}x < 0$ décroît de plus en plus rapidement lorsque z varie de 2 à 3.5 et $\displaystyle\int_2^z G(x)\,\mathrm{d}x < 0$ décroît de plus en plus lentement lorsque z varie de 3.5 à 5.



Puisque

$$g(z) = g(1) + \int_1^2 G(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^z G(x)\,\mathrm{d}x$$

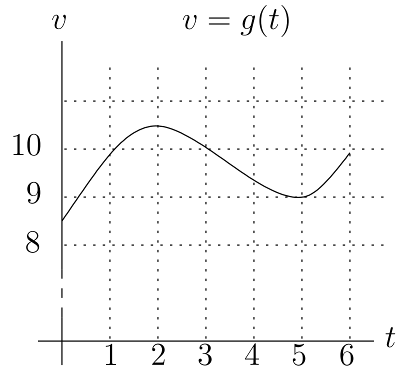
pour $z > 2$, on a $g(5) \approx 10 + 0.5 - 1.5 = 9$ car l'aire entre la courbe $y = G(x)$ et l'axe des x pour $1 \leq x \leq 2$ est approximativement 0.5 et l'aire entre la courbe $y = G(x)$ et l'axe des x pour $2 \leq x \leq 5$ est approximativement 1.5.

Finalement, pour $5 \leq z \leq 6$. On a $\displaystyle \int_5^z G(x)\,\mathrm{d}x > 0$ car $G(x) > 0$ pour $5 < x \leq 6$. Donc, $\displaystyle \int_5^z G(x)\,\mathrm{d}x > 0$ croit de plus en plus rapidement lorsque $z > 5$ augmente. Puisque

$$g(z) = g(1) + \int_1^2 G(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^5 G(x)\,\mathrm{d}x + \int_5^z G(x)\,\mathrm{d}x$$

pour $z > 5$, on a $g(6) \approx 10+0.5-1.5+0.9 = 9.9$ car l'aire entre la courbe $y = G(x)$ et l'axe des x pour $5 \leq x \leq 6$ est approximativement 0.9.

On obtient le graphe suivant pour $y = g(x)$.



Question 6.24

Solution:
Pour calculer les intégrales, on utilise le théorème fondamental du calcul.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t &= \int_1^2 \left(2t^{-1} + \frac{1}{2}t\right)\,\mathrm{d}t = \left(2\ln(t) + \frac{1}{4}t^2\right)\Big|_{t=1}^{2} \\ &= (2\ln(2) + 1) - \left(2\ln(1) + \frac{1}{4}\right) = 2\ln(2) + \frac{3}{4}\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_2^3 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t &= \int_2^3 \left(2t^{-1} + \frac{1}{2}t\right)\,\mathrm{d}t = \left(2\ln(t) + \frac{1}{4}t^2\right)\Big|_{t=2}^{3} \\ &= \left(2\ln(3) + \frac{9}{4}\right) - (2\ln(2) + 1) = 2\ln(3/2) + \frac{5}{4}\ .\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_1^3 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t + \int_2^3 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\ln(2) + \frac{3}{4} + 2\ln(3/2) + \frac{5}{4} = 2\ln(3) + 2 \ .$$

Si on connaît deux des intégrales, on peut déterminer la valeur de la troisième à l'aide des identités $\int_1^3 = \int_1^2 + \int_2^3$ (que l'on a utilisé ci-dessus) $\int_1^2 = \int_1^3 - \int_2^3$ et $\int_2^3 = \int_1^3 - \int_1^2$.

Question 6.25

Solution:

$$\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_5^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 1.7 - 2.5 = -0.8 \ .$$

Question 6.26

Solution:

a)

$$\int_1^5 \frac{5}{x^3}\,\mathrm{d}x = 5\int_1^5 x^{-3}\,\mathrm{d}x = 5\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)\Bigg|_{x=1}^{5} = -\frac{5}{2}\left(5^{-2} - 1^{-2}\right) = \frac{12}{5} \ .$$

b)

$$\int_1^8 \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3\right)\,\mathrm{d}x = 2\int_1^8 x^{-1/3}\,\mathrm{d}x + 3\int_1^8 \,\mathrm{d}x = 2\left(\frac{3}{2}x^{2/3}\right)\Bigg|_1^8 + 3x\Bigg|_1^8$$
$$= 3\left(8^{2/3} - 1^{2/3}\right) + 3(8-1) = 30 \ .$$

c)

$$\int_1^4 \left(e^x + \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \int_1^4 e^x\,\mathrm{d}x + \int_1^4 x^{-1}\,\mathrm{d}x = e^x\Bigg|_1^4 + \ln(x)\Bigg|_1^4$$
$$= e^4 - e + \ln(4) - \ln(1) = e^4 - e + \ln(4) \ .$$

d)

$$\int_0^\pi \left(2\sin(\theta) + 3\cos(\theta)\right)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^\pi \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta + 3\int_0^\pi \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = -2\cos(\theta)\Bigg|_0^\pi + 3\sin(\theta)\Bigg|_0^\pi$$
$$= -2\left(\cos(\pi) - \cos(0)\right) + 3\left(\sin(\pi) - \sin(0)\right) = 4 \ .$$

e)

$$\int_1^2 \frac{3}{t^4}\,\mathrm{d}t = 3\int_1^2 t^{-4}\,\mathrm{d}t = -t^{-3}\Bigg|_1^2 = -\left(2^{-3} - 1^{-3}\right) = \frac{7}{8} \ .$$

f)

$$\int_{-3}^{-1} \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = 2\int_{-3}^{-1} t^{-1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{-3}^{-1} t\,\mathrm{d}t = 2\ln|t|\Bigg|_{-3}^{-1} t^{-1} + \frac{1}{4}t^2\Bigg|_{-3}^{-1}$$

$$= 2\left(\ln|-1| - \ln|-3|\right) + \frac{1}{4}\left((-1)^2 - (-3)^2\right) = -2\ln(3) - 2 \; .$$

Question 6.27

Solution:
a) Si on pose $u = x/5$, on obtient $\mathrm{d}u = (1/5)\,\mathrm{d}x$, $u = 0$ lorsque $x = 0$ et $u = 1$ lorsque $x = 5$. Ainsi,

$$\int_0^5 3e^{x/5}\,\mathrm{d}x = 15\int_0^5 e^{x/5}(1/5)\,\mathrm{d}x = 15\int_0^1 e^u\,\mathrm{d}u = 15e^u\Big|_0^1 = 15e \; .$$

b) Si on pose $u = 1 + t/2$, on obtient $\mathrm{d}u = (1/2)\,\mathrm{d}t$, $u = 1$ lorsque $x = 0$ et $u = 3$ lorsque $x = 4$. Ainsi,

$$\int_0^4 \left(1 + \frac{t}{2}\right)^4 \mathrm{d}t = 2\int_0^4 \left(1 + \frac{t}{2}\right)^4 (1/2)\,\mathrm{d}t = 2\int_1^3 u^4\,\mathrm{d}u = \frac{2}{5}u^5\Big|_1^3 = \frac{2}{5}\left(3^5 - 1^5\right) = \frac{248}{5} \; .$$

c) Si on pose $u = 1 + 2t$, on obtient $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t$, $u = 3$ lorsque $x = 1$ et $u = 21$ lorsque $x = 10$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^{10} (1+2t)^{-4}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_1^{10} (1+2t)^{-4}(2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_3^{21} u^{-4}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{6}u^{-3}\Big|_3^{21} \\ &= -\frac{1}{6}\left((21)^{-3} - 3^{-3}\right) = -\frac{1}{6\times 3^3}\left(\frac{1}{7^3} - 1\right) = \frac{1}{2\times 3^4} \times \frac{2\times 3^2\times 19}{7^3} = \frac{19}{3^2\times 7^3}\end{aligned}$$

d) Si on pose $u = 1 + 4t$, on obtient $\mathrm{d}u = 4\,\mathrm{d}t$, $u = 1$ lorsuqe $x = 0$ et $u = 9$ lorsque $x = 2$. Ainsi,

$$\int_0^2 \frac{1}{1+4t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{1+4t}(4)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_1^9 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\ln(u)\Big|_1^9 = \frac{1}{4}\left(\ln(9) - \ln(1)\right) = \frac{1}{2}\ln(3) \; .$$

e) Avec la substitution $u = 1 + 2x^3$, on obtient que $\mathrm{d}u = 6x^2\,\mathrm{d}x$, $u = 1$ lorsque $x = 0$ et $u = 3$ lorsque $x = 1$. Ainsi,

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int_0^1 (1+2x^3)^5(6x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5\,\mathrm{d}u = \frac{1}{36}u^6\Big|_1^3 = \frac{182}{9} \; .$$

f) Si on pose $u = x^{1/2}$, on obtient $\mathrm{d}u = (1/2)x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$, $u = 1$ lorsque $x = 1$ et $u = 2$ lorsque $x = 4$. Ainsi,

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^2 e^u\,\mathrm{d}u == 2e^u\Big|_1^2 = 2(e^2 - e) = 2e(e-1) \; .$$

Question 6.28

Solution:
a) Si on pose $u = \sin(x)$, on obtient $\mathrm{d}u = \cos(x)\,\mathrm{d}x$, $u = 1$ lorsque $x = \pi/2$ et $u = 1/sqrt2$ lorsque $x = 3\pi/4$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin^5(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin^5(x)(1-\sin^2(x))\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{1/\sqrt{2}} u^5(1-u^2)\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_{1/\sqrt{2}}^1 (u^5-u^7)\,\mathrm{d}u = \left(-\frac{u^6}{6}+\frac{u^8}{8}\right)\Bigg|_{1/\sqrt{2}}^1 \\ &= -\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}-\frac{1}{128} = -\frac{11}{384}\ .\end{aligned}$$

b) on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1-\cos(2x))(1+\cos(2x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2(2x))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{1}{2}\left(1+\cos(4x)\right)\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos(4x)\right)\,\mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

Si on pose $u = 4x$. On obtient $u = 0$ lorsque $x = 0$, $u = 2\pi$ lorsque $x = \pi/2$ et $\mathrm{d}u = 4\,\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin^5(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x - \frac{1}{32}\int_0^{2\pi}\cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{x}{8}\bigg|_0^{\pi/2} - \frac{1}{32}\sin(u)\bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{16}\ .$$

Si vous interprétez l'intégrale en termes de l'aire entre la courbe et l'axe des x, il est facile de constater que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(x)\,\mathrm{d}x = 0$. L'aire en dessous de l'axe des x égale l'aire au dessus de l'axe des x.

c) Si on pose $u = \tan(x)$, on a $u = 0$ lorsque $x = 0$, $u = 1$ lorsque $x = \pi/4$ et $\mathrm{d}u = \sec^2(x)\,\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4}\tan^2(x)\sec^4(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4}\tan^2(x)\sec^2(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/4}\tan^2(x)\left(1+\tan^2(x)\right)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 u^2\left(1+u^2\right)\,\mathrm{d}u = \left(\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{15}\ .\end{aligned}$$

Question 6.29

Solution:

a)

$$\int_{-2}^{2}\left(y^4+5y^3\right)\,\mathrm{d}y = \left(\frac{1}{5}y^5+\frac{5}{4}y^4\right)\bigg|_{y=-2}^{2} = \left(\frac{2^5}{5}+20\right)-\left(-\frac{2^5}{5}+20\right) = \frac{2^6}{5}\ .$$

Puisque $y\mapsto 5y^3$ est une fonction impaire et que l'on intègre sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine, on a que $\displaystyle\int_{-2}^{2} 5y^3\,\mathrm{d}y = 0$. Puisque $y\mapsto y^4$ est une fonction paire et que l'on intègre sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine, on a que $\displaystyle\int_{-2}^{2} y^4\,\mathrm{d}y = 2\int_{0}^{2} y^4\,\mathrm{d}y$.

b)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(x^2-20\sin(x)\right)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3+20\cos(x)\right)\bigg|_{y=-\pi/2}^{\pi/2} = \left(\frac{\pi^3}{24}\right)-\left(-\frac{\pi^3}{24}\right) = \frac{\pi^3}{12}\ .$$

Puisque $x\mapsto 20\sin(x)$ est une fonction impaire et que l'on intègre sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine, on a que $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 20\sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Puisque $x\mapsto x^2$ est une fonction paire et que l'on intègre sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine, on a que $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi/2} x^2\,\mathrm{d}x$.

c) Si on pose $y=2\pi(x-2)$, on obtient $\mathrm{d}y = 2\pi\,\mathrm{d}x$, $y=0$ lorsque $x=2$ et $y=6\pi$ lorsque $x=5$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{2}^{5}\cos(2\pi(x-2))\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{2}^{5}\cos(2\pi(x-2))\,(2\pi)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{6\pi}\cos(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\sin(y)\right)\bigg|_{0}^{6\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\sin(6\pi)-\sin(0)\right) = 0\ .\end{aligned}$$

On aurait pu conclure sans faire de calcul que $\displaystyle\int_{2}^{5}\cos(2\pi(x-2))\,\mathrm{d}x = 0$. Sur l'intervalle $[2,5]$, on retrouve trois périodes de la fonction $\cos(2\pi(x-2))$ (tracer le graphe de $\cos(2\pi(x-2))$ pour vous en convaincre). Si on considère la région bornée qui est délimitée par l'axe des x et la courbe $\cos(2\pi(x-2))$, l'aire en dessous de l'axe des x est égale à l'aire au-dessus de l'axe des x.

d) Puisque $x\mapsto x\sqrt{x^2+a^2}$ est une fonction impaire et que l'on intègre sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine, on a que

$$\int_{-a}^{a} x\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = 0\ .$$

Question 6.30

Solution:
i) On a

$$L(t) = \int 6.48e^{-0.09t}\,\mathrm{d}t = -72e^{-0.09t} + C$$

Puisque $L(0) = 5$, on obtient $5 = -72 + C$. Donc, $C = 77$. On a $L(t) = -72e^{-0.09t} + 77$. Ainsi, $L(5) - L(1) \approx 19.89$ cm.

ii) Grâce au théorème fondamental du calcul, on a que

$$\begin{aligned} L(5) - L(1) &= \int_1^5 \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_1^5 6.48e^{-0.09t}\,\mathrm{d}t = -72e^{-0.09t}\Big|_1^5 \\ &= -72e^{-0.45} + 72e^{-0.09} \approx 19.89 \quad \text{cm} . \end{aligned}$$

Question 6.31

Solution:
i) On a

$$A(t) = \int 523.8(t-1981)^2\,\mathrm{d}t = 174.6(t-1981)^3 + C$$

Puisque $A(1981) = 13,400$, on obtient $C = 13,400$. On a $A(t) = 174.6(t-1981)^3 + 13,400$. Ainsi, $A(1987) - A(1985) \approx 26,539.2$.

ii) Grâce au théorème fondamental du calcul, on a que

$$\begin{aligned} A(1987) - A(1985) &= \int_{1985}^{1987} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{1985}^{1987} 523.8(t-1981)^2\,\mathrm{d}t = 174.6(t-1981)^3\Big|_{1985}^{1987} \\ &= 174.6 \times 6^3 - 174.6 \times 4^3 \approx 26,539.2 . \end{aligned}$$

Question 6.32

Solution:
i) On a

$$P(t) = \int 5.0e^{-2.0t}\,\mathrm{d}t = -2.5e^{-2t} + C$$

Puisque $P(0) = 2$, on obtient $2 = -2.5 + C$. Donc, $C = 4.5$. On a $P(t) = -2.5e^{-2t} + 4.5$. Ainsi, $P(10) - P(5) \approx 0.000113495$.

ii) Grâce au théorème fondamental du calcul, on a que

$$\begin{aligned} P(10) - P(5) &= \int_5^{10} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_5^{10} 5.0e^{-2.0t}\,\mathrm{d}t = -2.5e^{-2t}\Big|_5^{10} \\ &= -2.5e^{-20} + 2.5e^{-10} \approx 0.000113495 . \end{aligned}$$

Question 6.33

Solution:
On est intéressé à la variation d'une fonction (L, A et P) sur un intervalle de temps. On n'est pas intéressé à la valeur de la fonction.

Si $F(t) + C$ est une primitive de $f(t)$ où C est une constante quelconque, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (F(t) + C)\Big|_a^b = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) \ .$$

Donc l'intégrale ne dépend pas de la constante d'intégration choisie.

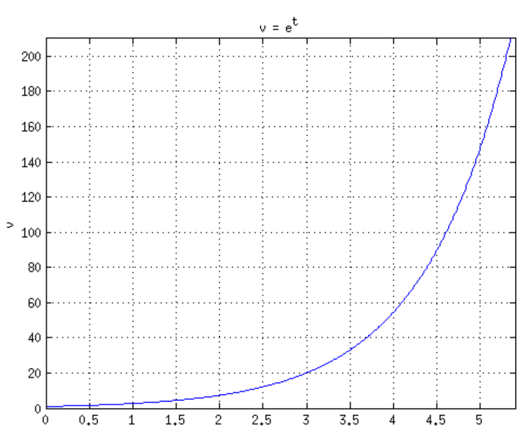
Question 6.34

Solution:
Si $x(t)$ est le nombre de moustiques au temps t, on donne dans la question que $x'(t) = 2200 + 10e^{0.8t}$. L'augmentation cherché est la différence entre le nombre de moustiques (au début) de la 9^e journée et le nombre de moustiques (au début) de la 5^e journée. On note que $\displaystyle\int_5^9 x'(t)\,\mathrm{d}t = x(9) - x(5)$ est la variation du nombre de moustiques entre $t = 5$ et $t = 9$ jours. Ainsi, l'augmentation cherché est de

$$\begin{aligned} x(9) - x(5) &= \int_5^9 x'(t)\,\mathrm{d}t = \int_5^9 \left(2200 + 10e^{0.8t}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \left(2200t + 12.5e^{0.8t}\right)\Big|_5^9 \approx 24860 \quad \text{moustiques} \ . \end{aligned}$$

Question 6.35

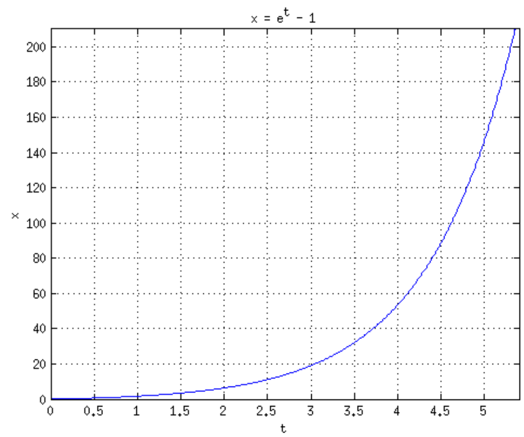
Solution:
a) Graphe de $v(t) = e^t$.



b) On a évidemment $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = v(t) = e^t$.

c) $x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int e^t\,\mathrm{d}t = e^t + C$ où C est une constante. Si on suppose que $x(0) = 0$, alors $0 = 1 + C$. Donc $C = -1$. On obtient $x(t) = e^t - 1$.

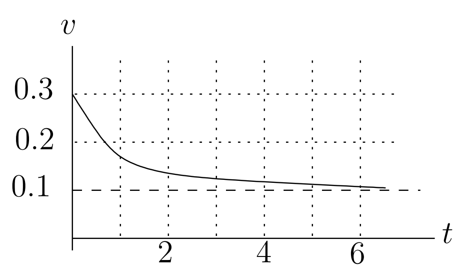
d) Graphe de $x(t) = e^c - 1$.



e) On cherche t tel que $x(t) = e^t - 1 = 200$. Donc, $t = \ln(201) \approx 5.3033$.

Question 6.36

Solution:
a)



$v(t) = 0.1 + 0.2e^{-t}$

b) Puisque $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = v(t)$, on a $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 0.1 + 0.2e^{-t}$.

c) On a

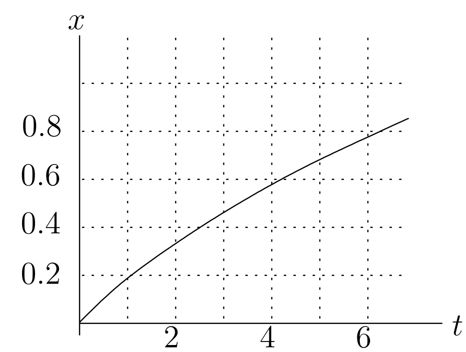
$$x(t) = \int \left(0.1 + 0.2e^{-t}\right)\,\mathrm{d}t = 0.1t - 0.2e^{-t} + C$$

car $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-t}\right) = -e^{-t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t) = 1$. La condition initiale $x(0) = 0$ donne $0 = x(0) = -0.2 + C$. Ainsi, $C = 0.2$. La position en mètres de l'escargot en fonction du temps en minutes est $x(t) = 0.1t - 0.2e^{-t} + 0.2$.

d) On a $x(t) = 0.1t - 0.2e^{-t} + 0.2$, $x'(t) = 0.1 + 0.2e^{-t}$ et $x''(t) = -0.2e^{-t}$. On obtient le tableau suivant :

t	0	$0 < t < +\infty$	$+\infty$
$x(t)$	0	$+$	$+\infty$
$x'(t)$	0.3	$+$	
$x''(t)$	-0.2	$-$	
	croît	croît	
	concave		

Le graphe de $x = x(t)$ aura donc l'allure suivante :



$$x(t) = 0.1t - 0.2e^{-t} + 0.2$$

e) On cherche t tel que $x(t) = 0.1t - 0.2e^{-t} + 0.2 = 1$. Le seul outil que l'on possède pour résoudre cette équation est la méthode de Newton. Posons

$$f(t) = x(t) - 1 = 0.1t - 0.2e^{-t} - 0.8 \ .$$

Le problème est maintenant de trouver t tel que $f(t) = 0$. On a $f'(t) = 0.1 + 0.2x^{-t}$. De plus, $f(8) < 0$ et $f(9) > 0$. Si on prend $t_0 = 8.5$, on obtient.

n	t_n	$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$
0	8.5	8.000610156811808
1	8.000610156811808	8.000670475566364
2	8.000670475566364	8.000670475567583
3	8.000670475567583	8.000670475567581
4	8.000670475567581	

Donc, il faut une petit peu plus de 8 minutes à l'escargot pour traverser le trottoir.

Question 6.37

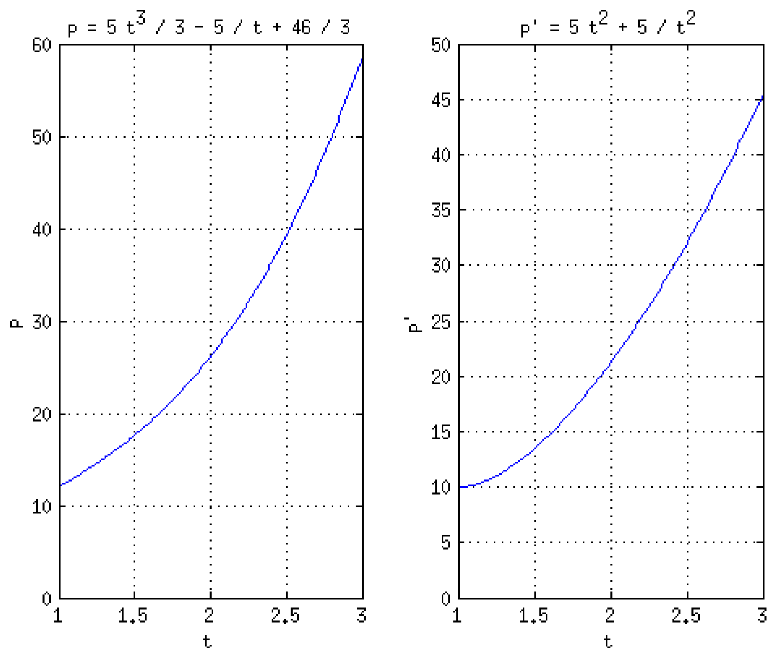
Solution:

$$p(t) = \int \left(5t^2 + 5t^{-2}\right)\, \mathrm{d}t = \frac{5}{3}\, t^3 - 5\, t^{-1} + C$$

Puisque $p(1) = 12$, on trouve

$$\frac{5}{3} - 5 + C = 12$$

et ainsi $C = 46/3$. On retrouve le graphe de $p(t) = \frac{5}{3}\, t^3 - 5\, t^{-1} + 46/3$ et celui de $p'(t) = 5t^2 + \frac{5}{t^2}$ ci-dessous.



Question 6.38

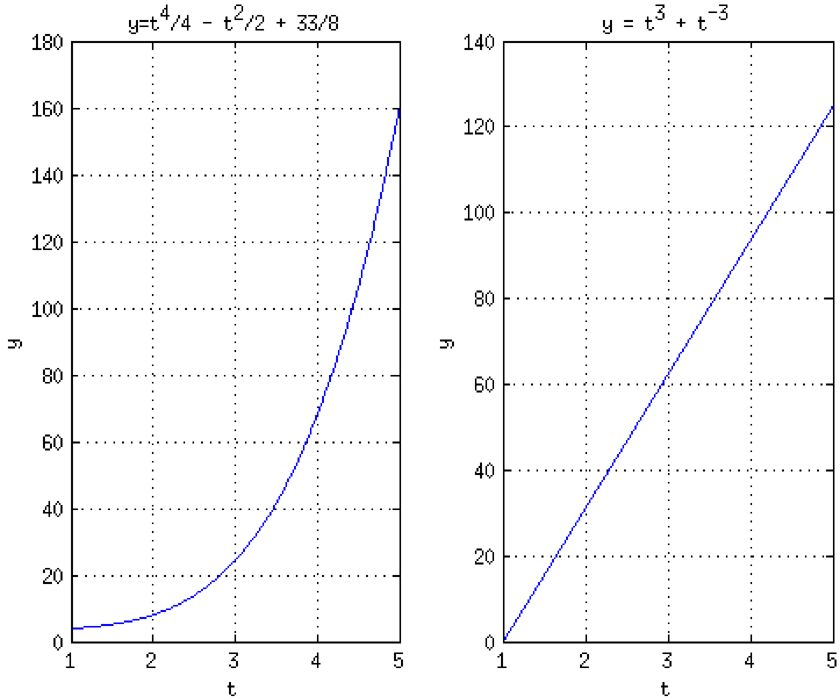
Solution:

$$M(t) = \int M'(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(t^3 + t^{-3}\right)\,\mathrm{d}t = \int t^3\,\mathrm{d}t + \int t^{-3}\,\mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + \frac{t^{-2}}{-2} + C\ .$$

Il découle de $M(2) = 8$ que $8 = \frac{2^4}{4} + \frac{2^{-2}}{-2} + C = \frac{31}{8} + C$. Donc, $C = 33/8$. On obtient la solution

$$M(t) = \frac{t^4}{4} + \frac{t^{-2}}{-2} + \frac{33}{8}\ .$$

Voici les graphes de M et M'.



Noter que le graphe de M' n'est pas une droite. Le graphe de M' semble être une droite parce que l'échelle pour l'axe des t est différente de l'échelle pour l'axe des y.

Question 6.39

Solution:
a) Il découle de (**??**) que

$$\text{mgr/jour} = (\text{unités de } \alpha) \times \text{jour}^3 \ .$$

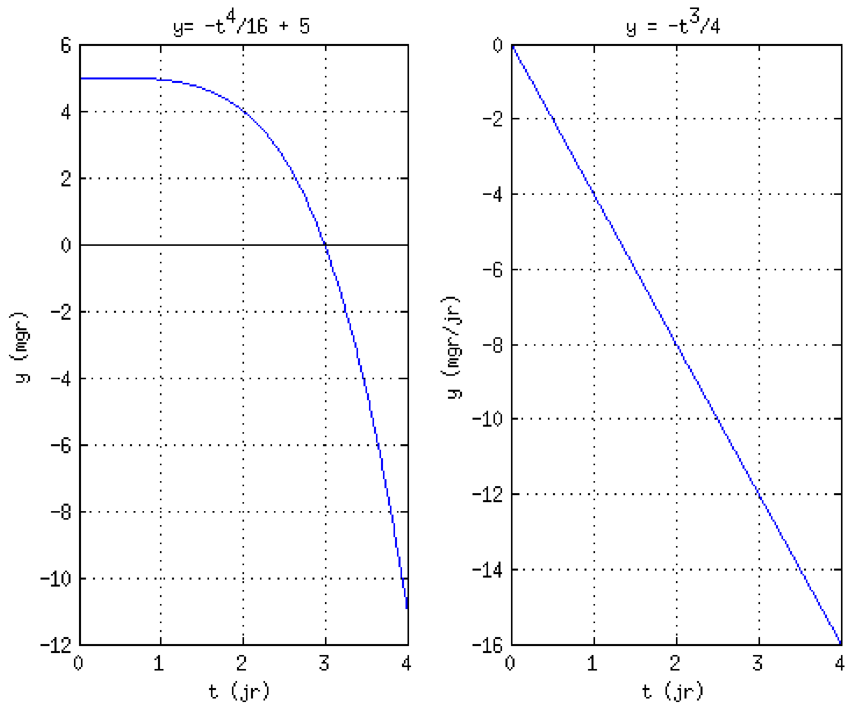
Donc, les unités de α sont les mgr/jour^4.

b) Avec $\alpha = -0.25$, (**??**) devient $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -0.25t^3$. Ainsi,

$$p(t) = \int p'(t)\,\mathrm{d}t = -0.25 \int t^3\,\mathrm{d}t = -\frac{t^4}{16} + C \ .$$

De plus, $p(0) = 5$ implique que $C = 5$. On trouve la solution $p(t) = -\dfrac{t^4}{16} + 5$.

c) Le graphe de p et celui de p' sont donnés ci-dessous.



Noter que le graphe de p' n'est pas une droite. Le graphe de p' semble être une droite parce que l'échelle pour l'axe des t est différente de l'échelle pour l'axe des y.

d) Puisque $p'(t) = -0.25t^3 < 0$ pour tout $t > 0$, on a que p est une fonction décroissante sur l'intervalle $]0, \infty[$. Naturellement, $p(t)$ perd son sens physique lorsque $t > 2\times 5^{1/4} \approx 2.9906976$ car $p(t) < 0$ pour $t > 2 \times 5^{1/4}$.

Question 6.40

Solution:

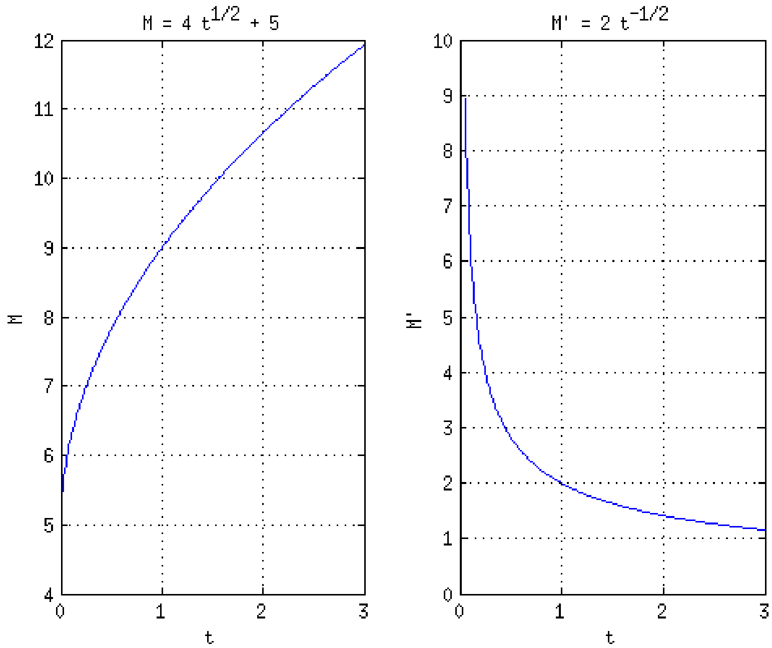
a) On a que $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$ est en g/jour et t est en jours. Donc, α est en g/jour^{n+1}. Pour $n = -1/2$, on obtient que les unités de α sont des g/jour$^{1/2}$.

b) On a que

$$M(t) = \int \alpha\, t^n \,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{n+1} t^{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1 \ ,$$

où C est une constante. Donc, pour $n = -1/2$ et $\alpha = 2$, on obtient $M(t) = 4t^{1/2} + C$. Il découle de $M(0) = 5$ que $C = 5$. Ainsi, $M(t) = 4t^{1/2} + 5$.

c)



Question 6.41

Solution:

a) On a

$$P(t) = \int \frac{5}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

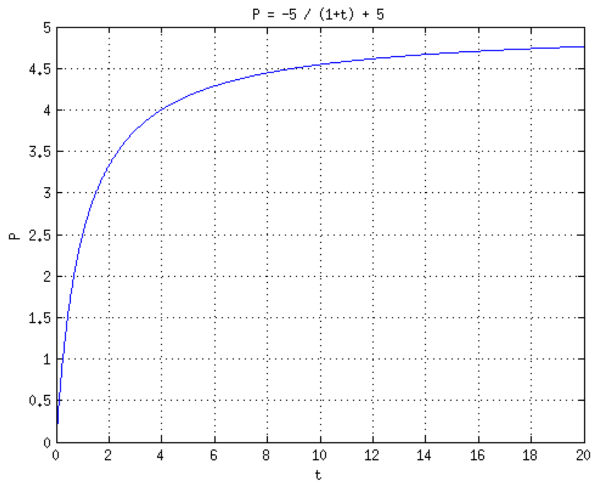
Si on pose $y = 1 + t$, on obtient $\mathrm{d}y = \mathrm{d}t$ et ainsi

$$P(t) = \int \frac{5}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{5}{y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{5}{y} + C = -\frac{5}{1+t} + C$$

La condition initiale $p(0) = 0$ donne $-5 + C = 0$. Donc, $C = 5$ et

$$P(t) = -\frac{5}{1+t} + 5$$

b) Voici le graphe de P sur l'intervalle $[0, 20]$



Notez que $P'(t) = 5/(1+t)^2 > 0$ pour tous t, donc la fonction est strictement croissante.

c)

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{5}{1+t}+5\right) = 5$$

Question 6.42

Solution:

Il faut remarquer que la formule pour la masse est valide seulement si $0 \leq t \leq 4$. Pour des valeurs de t plus grande que 4, on a $W(t) < 0$. Ce qui n'a pas de sens biologique. On peut supposer que cette espère de ver a une durée de vie de 4 unité de temps (ces unités ne sont malheureusement pas spécifiées).

a) Il faut trouver la valeur de $t \in [0,4]$ (s'il y en a une) à laquelle $W'(t)$ atteint son maximum absolu. On a

$$W''(t) = (4-2t)e^{-3t} - 3(4t-t^2)e^{-3t} = (3t^2-14t+4)e^{-3t} \ .$$

Les points critiques de W' sont les racines du polynôme $3t^2 - 14t + 4$. On trouve,

$$t_+ = \frac{14+\sqrt{14^2-4\times 3\times 4}}{2\times 3} \approx 4.3609 \quad \text{et} \quad t_- = \frac{14-\sqrt{14^2-4\times 3\times 4}}{2\times 3} \approx 0.3057 \ .$$

On ignore t_+ puisqu'il est plus grand que 4. Puisque

$$W'(0) = W'(4) = 0 \quad \text{et} \quad W'(t_-) \approx 0.4514 \ ,$$

on a que $W'(t)$ atteint son maximum à $t = t_- \approx 0.3057$.

b) Pour répondre à cette question, il faut trouver W. On a que

$$W(t) = \int W't\,\mathrm{d}t = \int (4t-t^2)e^{-3t}\,\mathrm{d}t \ .$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, on utilise la méthode d'intégration par parties. On a $f(t)g'(t) = (4t-t^2)e^{-3t}$ avec $f(t) = 4t-t^2$ et $g'(t) = e^{-3t}$. Donc, $f'(t) = 4-2t$, $g(x) = -e^{-3t}/3$ et

$$\begin{aligned} W(t) &= \int (4t-t^2)e^{-3t}\,\mathrm{d}t = \int f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{3}(4t-t^2)e^{-3t} + \frac{1}{3}\int (4-2t)e^{-3t}\,\mathrm{d}t \ . \end{aligned}$$

On utilise la méthode d'intégration par parties une deuxième fois pour évaluer l'intégrale de droite ci-dessus. On a $f(t)g'(t) = (4-2t)e^{-3t}$ avec $f(t) = (4-2t)$ et $g'(t) = e^{-3t}$. Donc, $f'(t) = -2$, $g(t) = -e^{-3t}/3$ et

$$\begin{aligned} \int (4-2t)e^{-3t}\,\mathrm{d}t &= \int f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{3}(4-2t)e^{-3t} - \frac{2}{3}\int e^{-3t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}(4-2t)e^{-3t} + \frac{2}{9}e^{-3t} + C \ . \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} W(t) &= -\frac{1}{3}(4t-t^2)e^{-3t} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}(4-2t)e^{-3t} + \frac{2}{9}e^{-3t} + C\right) \\ &= -\frac{1}{3}(4t-t^2)e^{-3t} - \frac{1}{9}(4-2t)e^{-3t} + \frac{2}{27}e^{-3t} + D \ , \end{aligned}$$

où $D = C/3$. Il découle de $W(0) = 0$ que

$$-\frac{4}{9} + \frac{2}{27} + D = 0 \ .$$

On obtient $D = 10/27$. Finalement, on a

$$W(t) = -\frac{1}{3}(4t-t^2)e^{-3t} - \frac{1}{9}(4-2t)e^{-3t} + \frac{2}{27}e^{-3t} + \frac{10}{27} \ ,$$

Ainsi, $W(2) = \dfrac{2}{27}e^{-6} + \dfrac{10}{27} \approx 0.37055$.

c) La masse serait $2 \times W'(t_-) \approx 2 \times 0.4514 = 0.9028$. Ce qui est beaucoup plus grand que la masse réelle à $t = 2$.

Question 6.43

Solution:

On a que $P(t) = \displaystyle\int \frac{5}{1+2t}\,\mathrm{d}t$. Si on pose $u = 1+2t$, on obtient $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t$ et

$$\begin{aligned} P(t) &= \int \frac{5}{1+2t}\,\mathrm{d}t = \frac{5}{2}\int \frac{1}{1+2t}(2)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\bigg|_{u=1+2t} \\ &= \frac{5}{2}\ln|u|\bigg|_{u=1+2t} + C = \frac{5}{2}\ln|1+2t| + C \ . \end{aligned}$$

À partir de $P(0) = 5$, on trouve que $C = 5$. Donc $P(t) = \dfrac{5}{2} \ln|1+2t|+5$. On a que $P(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$.

Question 6.44

Solution:
a) On a que $M(t) = \displaystyle\int (1+t^2)e^{-2t}\,\mathrm{d}t$. Si on pose $u = -2t$, alors $\mathrm{d}u = -2\,\mathrm{d}t$, $t^2 = u^2/4$ et

$$\begin{aligned} M(t) &= -\frac{1}{2}\int (1+t^2)e^{-2t}(-2)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int \left(1+\frac{u^2}{4}\right)e^u\,\mathrm{d}u\bigg|_{u=-2t} \\ &= -\frac{1}{2}\int e^u\,\mathrm{d}u\bigg|_{u=-2t} - \frac{1}{8}\int u^2e^u\,\mathrm{d}u\bigg|_{u=-2t} \end{aligned}$$

On a montrer à la question 8 (**g**) que

$$\int u^2e^u\,\mathrm{d}u = u^2e^u - 2ue^u + 2e^u + C\ .$$

Donc,

$$\begin{aligned} M(t) &= -\frac{1}{2}e^u\bigg|_{u=-2t} - \frac{1}{8}\left(u^2e^u - 2ue^u + 2e^u\right)\bigg|_{u=-2t} + C \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{8}\left((-2t)^2e^{-2t} - 2(-2t)e^{-2t} + 2e^{-2t}\right) + C \\ &= -\frac{1}{2}t^2e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{3}{4}e^{-2t} + C \end{aligned}$$

Il découle de la condition initiale $M(0) = 1$ que $C = 7/4$. Donc,

$$M(t) = -\frac{1}{2}t^2e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{7}{4}\ .$$

b) La masse du crapaud à $t = 1$ jour est $M(1) = -\dfrac{1}{2}e^{-2} - \dfrac{1}{2}e^{-2} - \dfrac{3}{4}e^{-2} + \dfrac{7}{4} \approx 1.51316$ g.

c) Il faut trouver le maximum absolu de $f(t) = M'(t) = (1+t^2)e^{-2t}$ pour $t \geq 0$. On a $f'(t) = -2(t^2-t+1)e^{-2t} < 0$ pour tout $t \geq 0$ car le polynôme $t^2 - t + 1$ n'a pas de racines réelles. Donc, $f = M'$ est une fonction décroissante. Ainsi, le maximum absolu de M' est à $t = 0$. On trouve $M'(0) = 1$ g/jour.

d) Si le taux de croissance du crapaud était de 1 g/jour, alors la masse du crapaud sera de 2 g à la fin du premier jour ; 1 gramme pour la masse initial plus 1 g provenant de la croissance pendant la première journée.

Question 6.45

Solution:
On a que

$$L(t) = \int L'(t)\,\mathrm{d}t = \int 10^{-6} t(365-t)\,\mathrm{d}t = \frac{365 \times 10^{-6}}{2} t^2 - \frac{10^{-6}}{3} t^3 + C\ .$$

La condition initiale est $L(151) = 0.1$ car le premier juin est le 151^e jour de l'année. Ainsi,

$$\frac{365 \times 10^{-6}}{2} \left(151^2\right) - \frac{10^{-6}}{3} \left(151^3\right) + C = 0.1$$

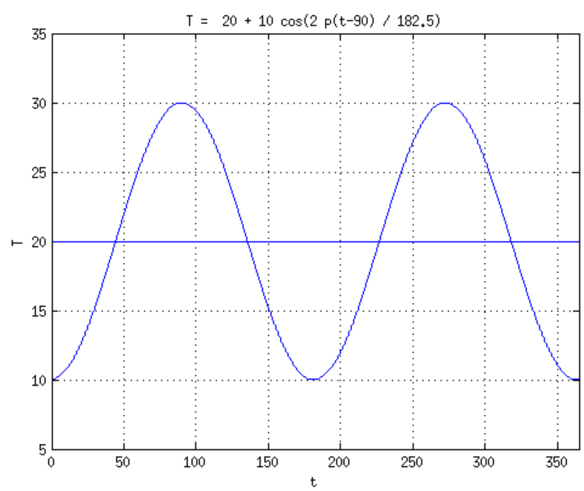
donne $C = -2.9135321\overline{6}$. On obtient

$$L(t) = \frac{365 \times 10^{-6}}{2} t^2 - \frac{10^{-6}}{3} t^3 - 2.9135321\overline{6}\ .$$

Comme le dernier jour de juin est le 181^e jour de l'année, on obtient que l'insecte mesure $M(181) = 1.08877$ cm à la fin de juin.

Question 6.46

Solution:
a)



b) Il faut déterminer $L(t)$. C'est-à-dire, il faut résoudre

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0.001\, T(t) = 0.02 + 0.01 \cos\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right)\ .$$

On a

$$L(t) = \int L'(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(0.02 + 0.01 \cos\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right)\right)\,\mathrm{d}t\ .$$

Si on pose, $y = 2\pi(t-90)/182.5$, on obtient $\mathrm{d}y = (2\pi/182.5)\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
L(t) &= \frac{182.5}{2\pi}\int\left(0.02+0.01\cos\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right)\right)\left(\frac{2\pi}{182.5}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{182.5}{2\pi}\int\left(0.02+0.01\cos(y)\right)\,\mathrm{d}y = \frac{182.5}{2\pi}\left(0.02y+0.01\sin(y)\right)+C \\
&= \frac{182.5}{2\pi}\left(0.02\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right)+0.01\sin\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right)\right)+C \\
&= 0.02\,(t-90)+\frac{1.825}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right)+C
\end{aligned}$$

Pour déterminer C, on utilise la condition initiale $L(0) = 0.1$ cm. On obtient

$$-1.8+\frac{1.825}{2\pi}\sin\left(-\frac{180\pi}{182.5}\right)+C = 0.1\ .$$

On trouve $C \approx 1.9125$. On a donc

$$L(t) = 0.02\,(t-90)+\frac{1.825}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right)+1.9125$$

et $L(30) = 0.4569$.

c) On a toujours

$$L(t) = 0.02\,(t-90)+\frac{1.825}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right)+C\ .$$

Pour déterminer C, on utilise la condition initiale $L(151) = 0.1$ cm. On obtient

$$1.22+\frac{1.825}{2\pi}\sin\left(-\frac{61\pi}{182.5}\right)+C = 0.1\ .$$

On trouve $C \approx -1.3707$. On a donc

$$L(t) = 0.02\,(t-90)+\frac{1.825}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right)-1.3707$$

et $L(300) = 3.0650$.

Question 6.47

Solution:

a) Soit $x(t)$ la distance entre le sol et l'objet au temps t. L'accélération est

$$x''(t) = -10.5\ .$$

La vitesse est $x'(t) = \displaystyle\int x''(t)\,\mathrm{d}t = -10.5t + C$ où C est une constante qui est déterminée à l'aide de la vitesse initiale. En effet, puisque $x'(0) = 5$, on obtient $C = 5$. Donc,

$$x'(t) = -10.5t + 5\ .$$

La distance entre l'objet et le sol est donnée par $x(t) = \int x'(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{10.5}{2}\,t^2 + 5t + D$ où D est une constante qui est déterminé par la hauteur initiale de l'objet lorsqu'il est lancé. Puisque $x(0) = 100$, on obtient $D = 100$. La distance entre l'objet et le sol est donc

$$x(t) = -\frac{10.5}{2}\,t^2 + 5t + 100\ .w$$

b) La hauteur maximale atteint par l'objet est lorsque $x'(t) = -10.5t + 5 = 0$. Donc, après $t = 5/10.5 \approx 0.47619$ s, l'objet sera à sa hauteur maximale de $x(5/10.5) \approx 101.1905$ m.

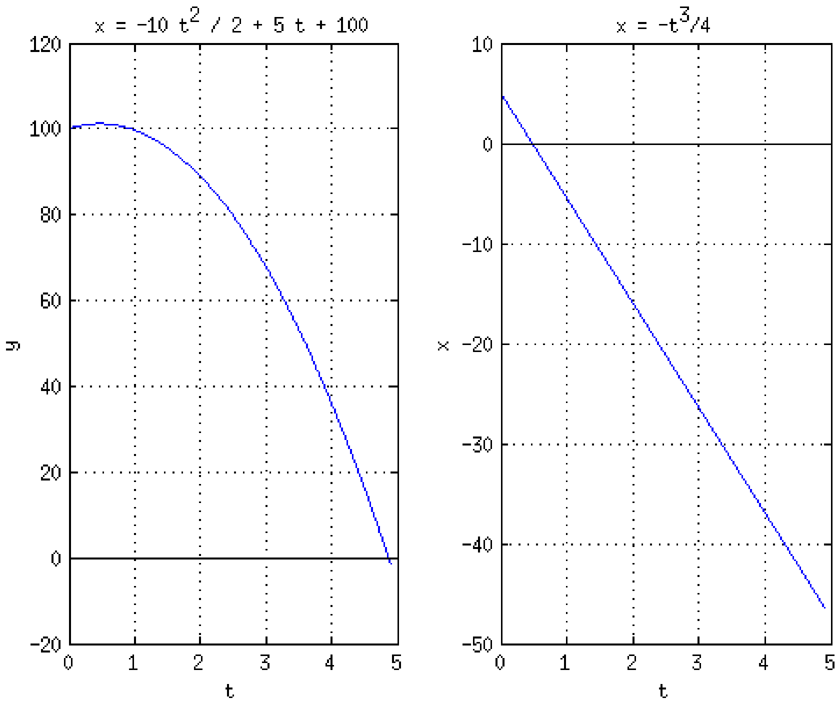
c) Il faut trouver $t > 0$ tel que $x(t) = 100$. Or,

$$x(t) = -\frac{10.5}{2}\,t^2 + 5t + 100 = 100 \Rightarrow -\frac{10.5}{2}\,t^2 + 5t = 0 \Rightarrow -\frac{10.5}{2}\,t + 5 = 0$$

car on peut ignorer le cas où $t = 0$ qui correspond au moment où l'objet est lancé vers le haut. Ainsi, ou trouve qu'à $t = 10/10.5 \approx 0.95238$ s l'objet sera à une hauteur de 100 m. Sa vitesse à ce moment sera $x'(10/10.5) = -5$ m/s. Le signe négatif indique que l'objet se dirige vers le sol.

d) L'objet frappe le sol au temps t où $x(t) = 0$. Or, $-\dfrac{10.5}{2}\,t^2 + 5t + 100$ a une seul racine positive, c'est $t_s = \dfrac{-5 - \sqrt{5^2 - 4 \times (-10.5/2) \times 100}}{2(-10.5/2)} \approx 4.8664497$. Donc, l'objet frappe le sol après t_s s à une vitesse de $x'(t_s) \approx -46.097722$ m/s.

e) Le graphe de la position x et celui de la vélocité x' sont tracés dans la figure suivante :



Question 6.48

Solution:
Puisque

$$\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^x (5s+1)^7\,\mathrm{d}s = \left.\frac{(5s+1)^8}{40}\right|_a^x = \frac{(5x+1)^8}{40} - \frac{(5a+1)^8}{40}\ ,$$

on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(5x+1)^8}{40} - \frac{(5a+1)^8}{40}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(5x+1)^8}{40}\right) = (5x+1)^7 = f(x)\ .$$

Question 6.49

Solution:
On utilise la deuxième version du théorème fondamental pour résoudre ces problèmes.

a)

$$g'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\int_2^y t^2\sin(t)\,\mathrm{d}t\right) = \left.t^2\sin(t)\right|_{t=y} = y^2\sin(y)\ ,$$

b) On a que $h(x) = h_1(h_2(y))$, où $h_1(z) = \displaystyle\int_2^z \arctan(t)\,\mathrm{d}t$ et $h_2(x) = 1/x$. Ainsi, $h'(x) = h_1'(h_2(x))h_2'(x)$. Or,

$$h_1'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\int_2^z \arctan(t)\right) = \left.\arctan(t)\right|_{t=z} = \arctan(z) \quad \text{et} \quad h_2'(x) = -\frac{1}{x^2}\ .$$

Donc,

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2}\arctan(\frac{1}{x})\ .$$

Question 6.50

Solution:
a) On a

$$\int_0^\infty \frac{1}{(2+5x)^4}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to\infty}\int_0^q \frac{1}{(2+5x)^4}\,\mathrm{d}x\ .$$

Or, pour $u = 2+5x$, on a $u = 2$ lorsque $x = 0$, $u = 2+5q$ lorsque $x = q$, et $\mathrm{d}u = 5\,\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^q \frac{1}{(2+5x)^4}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{5}\int_0^q \frac{1}{(2+5x)^4}\,5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_2^{2+5q}\frac{1}{u^4}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{15}\left.u^{-3}\right|_2^{2+5q} = -\frac{1}{15}\left((2+5q)^{-3} - 2^{-3}\right)\ .\end{aligned}$$

Finalement,
$$\int_0^\infty \frac{1}{(2+5x)^4}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to\infty} -\frac{1}{15}\left(\frac{1}{(2+5q)^3}-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{120}\ .$$
L'intégrale converge.

b) On remarque qu'en plus d'être une intégrale sur un domaine infini, l'intégrande $1/\sqrt[3]{x}$ n'est pas borné lorsque x approche l'origine. Il faut donc diviser l'intégrale en deux.
$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x\ .$$
On aurait pu choisir une autre valeur que 1 pour diviser l'intégrale, cela ne changerait pas le résultat final. On a
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to 0^+}\int_q^1 x^{-1/3}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to 0^+}\left(\frac{3}{2}x^{2/3}\right)\bigg|_q^1 = \lim_{q\to 0^+}\frac{3}{2}\left(1-q^{2/3}\right) = \frac{3}{2}\ .$$
La première intégrale impropre converge. Par contre,
$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to\infty}\int_1^q x^{-1/3}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to\infty}\left(\frac{3}{2}x^{2/3}\right)\bigg|_1^q = \lim_{q\to\infty}\frac{3}{2}\left(q^{2/3}-1\right) = \infty\ .$$
La second intégrale impropre diverge. Donc, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ diverge.

c) On a
$$\int_1^e \frac{2}{x\sqrt{\ln(x)}}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to 1^+}\int_q^e \frac{2}{x\sqrt{\ln(x)}}\,\mathrm{d}x\ .$$
Or, si on pose $y=\ln(x)$, on obtient $\mathrm{d}y = (1/x)\,\mathrm{d}x$, $y=\ln(q)$ lorsque $x=q$ et $y=1$ lorsque $x=e$. Ainsi,
$$\int_q^e \frac{2}{x\sqrt{\ln(x)}}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln(q)}^1 \frac{2}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \int_{\ln(q)}^1 2y^{-1/2}\,\mathrm{d}y = 4y^{1/2}\bigg|_{\ln(q)}^1 = 4-4\sqrt{\ln(q)}\ .$$
Donc,
$$\int_1^e \frac{2}{x\sqrt{\ln(x)}}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to 1^+}\left(4-4\sqrt{\ln(q)}\right) = 4-4\sqrt{\ln(1)} = 4\ .$$
L'intégrale converge.

d) On a
$$\int_{-\infty}^0 3x^2e^{-x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to-\infty}\int_q^0 3x^2e^{-x^3}\,\mathrm{d}x\ .$$
Or, si on pose $y=-x^3$, on obtient $\mathrm{d}y = -3x^2\,\mathrm{d}x$, $y=-q^3$ lorsque $x=q$ et $y=0$ lorsque $x=0$. Ainsi,
$$\int_q^0 3x^2e^{-x^3}\,\mathrm{d}x = -\int_{-q^3}^0 e^y\,\mathrm{d}y = -e^y\bigg|_{-q^3}^0 = e^{-q^3}-1\ .$$

Donc,

$$\int_{-\infty}^{0} 3x^2 e^{-x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to-\infty}\left(e^{-q^3}-1\right) = +\infty\ .$$

L'intégrale diverge.

Question 6.51

Solution:
a)

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-3x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{q\to\infty}\int_0^q e^{-3x}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^q\right) = \lim_{q\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3q}\right)\\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\lim_{q\to\infty} e^{-3q} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

car $\displaystyle\lim_{q\to\infty} e^{-3q} = 0$.

b)

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+3x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{q\to\infty}\int_0^q \frac{1}{(1+3x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to\infty} -\frac{2}{3(1+3x)^{1/2}}\Big|_0^q\\ &= \lim_{q\to\infty}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3(1+3q)^{1/2}}\right) = \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\lim_{q\to\infty}\frac{1}{(1+3q)^{1/2}} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

car $\displaystyle\lim_{q\to\infty}\frac{1}{(1+3q)^{1/2}} = 0$.

c)

$$\begin{aligned}\int_0^{0.001}\frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{q\to 0^+}\int_q^{0.001}\frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to 0^+}\frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_q^{0.001}\\ &= \lim_{q\to 0^+}\frac{3}{2}\left(0.001^{2/3}-q^{2/3}\right) = \frac{3}{2}\times 0.001^{2/3} = \frac{3}{200}\end{aligned}$$

car $\displaystyle\lim_{q\to 0^+} q^{2/3} = 0$; la fonction $q\mapsto q^{2/3}$ est continue à l'origine.

d) On a $\dfrac{1}{x^2+x-6} = \dfrac{1}{(x+3)(x-2)}$. Donc, l'intégrande n'est pas borné au voisinage du point $x=2$ de l'intervalle $[0,4]$. On doit donc diviser l'intégrale en deux intégrales impropres.

$$\int_0^4 \frac{1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x + \int_2^4 \frac{1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x\ .$$

La méthode des fractions partielles donne $\dfrac{1}{x^2+x-6} = \dfrac{1}{5(x-2)} - \dfrac{1}{5(x+3)}$. Ainsi,

$$\lim_{q\to 2^-}\int_0^q \frac{1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to 2^-}\frac{1}{5}\int_0^q\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = \lim_{q\to 2^-}\frac{1}{5}\left(\ln|x-2|-\ln|x+3|\right)\Big|_0^q$$

$$= \lim_{q\to 2^-} \frac{1}{5} \left(\ln|q-2| - \ln(2) - \ln|q+3| + \ln(3)\right) = -\infty$$

car $\displaystyle\lim_{q\to 2^-} \ln|q+3| = \ln(5)$ et $\displaystyle\lim_{q\to 2^-} \ln|q-2| = \lim_{q\to 0^+} \ln(q) = -\infty$. Donc, $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$ diverge. Ce qui implique que $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$ diverge.

Question 6.52

Solution:
Soit $C(t)$ la concentration en μmol/l au temps t en secondes. On donne dans l'énoncé du problème que $C(0) = 10$ et

$$C'(t) = 50\,e^{-2t}$$

Donc.

$$C(s) - C(0) = \int_0^s C'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^s 50\,e^{-2t}\,\mathrm{d}t = -25\,e^{-2t}\Big|_0^s = 25(1-e^{-2s}) \ .$$

En substituant la condition initiale dans cette équation, on obtient

$$C(s) = 10 + 25\left(1 - \frac{1}{e^{2s}}\right)$$

pour $s \geq 0$.

Notons que C est un fonction croissante car $C'(t) = 50\,e^{-2t} > 0$ pour tout t. La concentration maximale de toxine dans la cellule, si elle pouvait vivre indéfiniment, est

$$\lim_{s\to\infty} \left(10 + 25\left(1 - \frac{1}{e^{2s}}\right)\right) = 10 + 25 = 35 \ .$$

Donc la cellule va mourir empoisonné après un certain temps t donné par

$$30 = 10 + 25\left(1 - \frac{1}{e^{2t}}\right) \ .$$

Si on résout pour t, on trouve $t = \dfrac{1}{2}\ln(5) \approx 0.8047$ seconde.

Bibliographie

[1] F. R. Adler, **Modeling the Dynamics of Life : Calculus and Probability for Life Scientists**, Brooks/Cole, 2005.

[2] D. Betounes, **Partial Differential Equations for Computational Science**, Springer-Verlag, 1998.

[3] R. L. Borelli et C. S. Coleman, **Differential Equations, a Modeling Perspective**, Wiley, 1998.

[4] L. Carroll, **Alice's Adventures in Wonderland**,

[5] R. Illner, C. S. Bohun, S. McCollum et T. an Roode, **Mathemtical Modelling : A Case Studies Approach**, AMS, 2005.

[6] S. Lipschutz, **Linear Alegebra**, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1968.

[7] J. D. Murray, **Mathematical Biology, 1 : An Introduction, 3^{th} edition**, Springer-Verlag, 2002.

[8] C. Newhouser, **Calculus for Biology and Medecine 2^{nd} Edition**, Prentice Hall, 2004

[9] B. Noble and J. W. Daniel, **Applied Linear Algebra**, 3^{rd} edition, Prentice-Hall, 1988.

[10] M. Olinick, **An Introduction to Mathematical Models in the Social and Life Sciences**, Addison-Wesley, 1978

[11] D. A. Roff, **The Evolution of Life Histories**, Chapman and Hall, 1992