Introduction à l'Algèbre linéaire (MAT1741 WB)

EXAMEN PARTIEL I. (Été 2016)

Professeur: Joseph Khoury. **Durée: 80 minutes**

Nom de famille: Solutions

Prénom:

Numéro d'étudiant:

Aucune note n'est permise.

Les calculatrices non programables sont permises.

Cet examen comporte 8 questions et 10 pages. Les questions à choix multiples (1 à 5) valent chacune 2 points sur les 26 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

1	2	3	4	5

Les questions 6 à 8 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution. Vous pouvez utiliser le verso des pages et les pages additionnelles si vous manquez d'espace au recto.

1. Pour quelle(s) valeur(s) du nombre réel m, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & m+1 \end{bmatrix}$$

est-elle **inversible**?

A. Aucune des autres réponses
B. $m = -3$
C. $m \neq 2$
D. $m \neq -3$
E. $m \neq 0$
F. $m = 2$

$$\det A \underset{\substack{3L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\overset{-2L_1+L_2\to L_2}{=}} \det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & m+2 \end{bmatrix} \overset{-L_2+L_4\to L_4}{=} \det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & m+1 \end{bmatrix} \overset{-L_3+L_4\to L_4}{=}$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & m-2 \end{bmatrix} = 1\times 1\times 1\times(m-2) = m-2$$

A est inversible $\iff \det(A) \neq 0 \iff m-2 \neq 0 \iff m \neq 2$

2. Considérer le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 3 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de a, le système admet-il une **infinité de solutions**.

A. $a = -3$, $a = 2$
B. $a = 2$ seulement
C. $a = 3$ seulement
D. $a = 2$ seulement
E. $a = -3$ seulement
F. $a = 3$, $a = -2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & -3 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_3\to L_3}{\overset{-2L_1+L_2\to L_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & -4 \end{array}\right] \overset{-(a-1)L_2+L_3\to L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2-a+6 & -a-3 \end{array}\right]$$

Le système admet une infinité de solutions $\iff rg(A) = rg[A|B] < 3 \iff$
$-a^2 - a + 6 = 0$ et $-a-3 = 0 \Rightarrow -(a+3)(a-2) = 0$ et $a+3 = 0$
$\iff \boxed{a = -3}$ seulement.

3. Si le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

est égal à -1, donner le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} -2a & -2g & -2d \\ b-4c & h-4i & e-4f \\ 3c & 3i & 3f \end{bmatrix}^2.$$

A. 16 **B.** -64 **C.** 64 **D.** -16 **E.** 36 **F.** -36

$$\det\begin{bmatrix} -2a & -2g & -2d \\ b-4c & h-4i & e-4f \\ 3c & 3i & 3f \end{bmatrix} = -6\det\begin{bmatrix} a & g & d \\ b-4c & h-4i & e-4f \\ c & i & f \end{bmatrix} \overset{4L_3+L_2\to L_2}{=\!=} -6\det\begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$$

$$= -6\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix} \overset{L_2\leftrightarrow L_3}{=\!=} 6\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 6(-1) = -6. \text{ Alors}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -2a & -2g & -2d \\ b-4c & h-4i & e-4f \\ 3c & 3i & 3f \end{bmatrix}^2\right) = (-6)^2 = \boxed{36}$$

4. La forme polaire du nombre complexe:

$$\frac{3-3\sqrt{3}i}{2+2i}$$

est:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\left(i\frac{7\pi}{12}\right)}$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{2}}e^{\left(i\frac{5\pi}{12}\right)}$

C. Aucune des autres réponses **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\left(i\frac{\pi}{12}\right)}$

E. $\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{\left(-i\frac{7\pi}{12}\right)}$ **F.** $\frac{2}{\sqrt{2}}e^{\left(-i\frac{\pi}{12}\right)}$

$$|3-3\sqrt{3}i| = \sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow 3-3\sqrt{3}i = 6\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 6\left[\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)\right]$$

$$= 6e^{-i\pi/3}$$

$$|2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\right) = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

$$\frac{3-3\sqrt{3}i}{2+2i} = \frac{6e^{-i\pi/3}}{2\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{i(-\pi/3-\pi/4)} = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$$

5. Les équations paramétriques de la droite d'intersection des plans $x - y + 2z = 1$ et $3x - z = -1$ sont:

A. $x = t + 1,\ y = 7t + 8,\ z = 3t + 4;\ t \in \mathbb{R}$
B. $x = -t + 1,\ y = 7t + 8,\ z = 3t + 4;\ t \in \mathbb{R}$
C. $x = t + 1,\ y = 8,\ z = -3t + 4;\ t \in \mathbb{R}$
D. $x = t + 1,\ y = -7t + 8,\ z = 3t + 4;\ t \in \mathbb{R}$
E. $x = 1,\ y = -7t + 8,\ z = -3t + 4;\ t \in \mathbb{R}$
F. $x = t + 1,\ y = 7t + 8,\ z = -3t + 4;\ t \in \mathbb{R}$

$\vec{n_1} = (1, -1, 2)$ normal au plan $x - y + 2z = 1$
$\vec{n_2} = (3, 0, -1)$ " " " $3x - z = -1$

$$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, 7, 3)$$

C'est un vecteur directeur de la droite d'intersection des deux plans.

Seule la réponse A représente une droite ayant $(1, 7, 3)$ comme vecteur directeur.

6. [**5 points**] Considérer la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Utiliser l'Algorithme de Gauss-Jordan pour trouver A^{-1}.

(b) Utiliser la réponse à la partie (a) pour trouver une matrice B qui satisfait

$$\left(2B^T + 4I_4\right)^{-1} = A^T$$

où I_4 est la matrice identité d'ordre 4.

Solution (a)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_3 \to L_3}{\overset{-L_1+L_2\to L_2}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{-L_3\to L_3}{\overset{-L_2+L_3\to L_3}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \underset{\substack{-3L_4+L_2\to L_2 \\ -3L_4+L_3\to L_3}}{\overset{-2L_4+L_1\to L_1}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \underset{-2L_3+L_2\to L_2}{\overset{-5L_3+L_1\to L_1}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 9 & 5 & -5 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{L_2+L_1\to L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 & 8 & -7 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Alors A est inversible et $A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -7 & -16 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $(2B^T + 4I_4)^{-1} = A^T \Rightarrow 2B^T + 4I_4 = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \Rightarrow B^T = \frac{1}{2}\left[(A^{-1})^T - 4I_4\right]$

$\Rightarrow B = \frac{1}{2}\left((A^{-1})^T - 4I_4\right)^T = \frac{1}{2}\left(A^{-1} - 4I_4\right)$ Comme $((A^{-1})^T)^T = A^{-1}$ et $I_4^T = I_4$.

D'où $B = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 9 & 8 & -7 & -16 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5/2 & 4 & -7/2 & -8 \\ 0 & -1/2 & -1 & -3/2 \\ -1 & -1/2 & -3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -5/2 \end{bmatrix}$

7. [5 points]
Considérer le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} 3x - 11y + (4a-12)z = -9+5b \\ 5x - 19y + (4a-10)z = 5b-5 \\ 2x - 8y + (3a-10)z = -a+3b-10 \end{cases}$$

où a et b sont deux nombres réels.

(1) Trouver les valeurs de a et b telles que le système:

(i) admet une solution unique

(ii) admet une infinité de solutions,

(iii) est incompatible.

(2) Dans le (ii),

(a) donner la solution générale du système,

(b) donner une description géométrique complète de cette solution.

(1) La matrice augmentée du système est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -11 & 4a-12 & -9+5b \\ 5 & -19 & 4a-10 & 5b-5 \\ 2 & -8 & 3a-10 & -a+3b-10 \end{array}\right] \underset{-L_3+L_1 \to L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & a-2 & a+2b+1 \\ 5 & -19 & 4a-10 & 5b-5 \\ 2 & -8 & 3a-10 & -a+3b-10 \end{array}\right] \underset{-2L_1+L_3 \to L_3}{\overset{-5L_1+L_2 \to L_2}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & a-2 & a+2b+1 \\ 0 & -4 & -a & -5a-5b-10 \\ 0 & -2 & a-6 & -3a-b-12 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & a-2 & a+2b+1 \\ 0 & -2 & a-6 & -3a-b-12 \\ 0 & -4 & -a & -5a-5b-10 \end{array}\right] \underset{-2L_2+L_3 \to L_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & a-2 & a+2b+1 \\ 0 & -2 & a-6 & -3a-b-12 \\ 0 & 0 & -3a+12 & a-3b+14 \end{array}\right] \quad (*)$$

(i) solution unique $\iff rg(A) = rg[A|B] = 3 \iff -3a+12 \neq 0 \Rightarrow a \neq 4$.
Alors le système admet une solution unique $\iff a \neq 4,\ b \in \mathbb{R}$.

(ii) infinité de solutions $\iff rg(A) = rg[A|B] < 3 \iff -3a+12 = 0$ et
$a - 3b + 14 = 0 \Rightarrow a = 4,\ b = 6$

(iii) Système incompatible $\iff rg(A) \neq rg[A|B] \Rightarrow rg(A) = 2$ et
$rg[A|B] = 3 \Rightarrow -3a+12 = 0$ et $a - 3b + 14 \neq 0 \Rightarrow a = 4$ et $b \neq 6$.

(2) Dans le cas (ii), $a = 4$, $b = 6$. La forme (*) devient:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 17 \\ 0 & -2 & -2 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{2}L_2 \to L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{3L_2 + L_1 \to L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 62 \\ 0 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

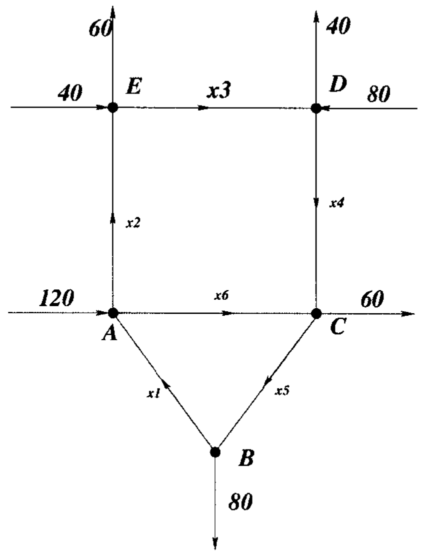
Alors $z = t$ est une variable libre, $x = -5t + 62$, $y = -t + 15$

(a) La solution générale du système est

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5t+62 \\ -t+15 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 62 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) La solution est une droite qui passe par le point $(62, 15, 0)$ et dont le vecteur directeur est $\vec{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8. **[5 points]** Le diagramme suivant représente un réseau routier où les lettres A, B, C, D et E représentent les intersections, les flèches indiquent le sens du traffic. Les nombres et les variables x_i autour des flèches indiquent le nombre de voitures qui passent par l'intersection durant la même période du temps.



(1) Écrire le système (S) d'équations linéaires qui décrit le réseau. Indiquer aussi toutes les contraintes sur les variables x_i. **Pour cette partie, n'effectuer aucune réduction du système. Juste donner le système (S) avec les contraintes. La réduction de la matrice augmentée du système est faite pour vous à la partie suivante.**

(2) Sachant que la **forme échelonnée réduite** de la matrice augmentée du système (S) est:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -80 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

donner la solution générale du Système (S) (Ignorer les contraintes sur les variables pour cette partie).

(3) Si le chemin AC est fermé pour la construction, déterminer le flux minimal le long du chemin AE **en utilisant vos réponses à la partie (2)**. Vous devez justifier vos réponses.

(1) Pour chaque jonction, tour rentrant = tour sortant

$$\begin{array}{ll} \underline{A}: & x_1 + 120 = x_2 + x_6 \\ \underline{B}: & x_5 = x_1 + 80 \\ \underline{C}: & x_4 + x_6 = x_5 + 60 \\ \underline{D}: & x_3 + 80 = x_4 + 40 \\ \underline{E}: & x_2 + 40 = x_3 + 60 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_6 = -120 \\ x_1 - x_5 = -80 \\ x_4 - x_5 + x_6 = 60 \\ x_3 - x_4 = -40 \\ x_2 - x_3 = 20 \end{cases}$$

<u>Contraintes</u>: Chaque variable x_i est un entier ≥ 0.

(2) Selon la forme échelonnée réduite donnée, les variables x_5, x_6 sont libres. On pose $x_5 = s$, $x_6 = t$. Alors $x_1 - s = -80$; $x_2 - s + t = 40$; $x_3 - s + t = 20$; $x_4 - s + t = 60$. Alors la solution générale est

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-80 \\ s-t+40 \\ s-t+20 \\ s-t+60 \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -80 \\ 40 \\ 20 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

(3) Chemin AC fermé $\Rightarrow x_6 = t = 0$. Le flux le long du chemin AE est représenté par la variable x_2. Comme $t = 0$, $x_2 = s - t + 40$ $\Rightarrow x_2 = s + 40$. Comme $x_1 \geq 0 \Rightarrow s - 80 \geq 0 \Rightarrow s \geq 80$. Alors, $x_2 = s + 40 \geq 80 + 40 = 120$. Le flux minimal le long de AE est alors 120.