

Introduction à l'Algèbre linéaire (MAT1741 WB)

EXAMEN PARTIEL I. (Été 2016)

Professeur: Joseph Khoury.

Durée: 80 minutes

Nom de famille: _____

Prénom: _____

Numéro d'étudiant: _____

Aucune note n'est permise.

Les calculatrices non programables sont permises.

Cet examen comporte 8 questions et 10 pages. Les questions à choix multiples (1 à 5) valent chacune 2 points sur les 26 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

1	2	3	4	5
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Les questions 6 à 8 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution. Vous pouvez utiliser le verso des pages et les pages additionnelles si vous manquez d'espace au recto.

1. Pour quelle(s) valeur(s) du nombre réel m , la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & m+1 \end{bmatrix}$$

est-elle **inversible**?

- A. Aucune des autres réponses B. $m = -3$
C. $m \neq 2$ D. $m \neq -3$
E. $m \neq 0$ F. $m = 2$

2. Considérer le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 3 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de a , le système admet-il une **infinité de solutions**.

- A. $a = -3, a = 2$ B. $a = 2$ seulement C. $a = 3$ seulement
D. $a = 2$ seulement E. $a = -3$ seulement F. $a = 3, a = -2$

3. Si le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

est égal à -1 , donner le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} -2a & -2g & -2d \\ b-4c & h-4i & e-4f \\ 3c & 3i & 3f \end{bmatrix}^2.$$

- A. 16 B. -64 C. 64 D. -16 E. 36 F. -36

4. La forme polaire du nombre complexe:

$$\frac{3 - 3\sqrt{3}i}{2 + 2i}$$

est:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$
C. Aucune des autres réponses D. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$
E. $\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ F. $\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

5. Les équations paramétriques de la droite d'intersection des plans $x - y + 2z = 1$ et $3x - z = -1$ sont:

- A. $x = t + 1, y = 7t + 8, z = 3t + 4; t \in \mathbb{R}$
- B. $x = -t + 1, y = 7t + 8, z = 3t + 4; t \in \mathbb{R}$
- C. $x = t + 1, y = 8, z = -3t + 4; t \in \mathbb{R}$
- D. $x = t + 1, y = -7t + 8, z = 3t + 4; t \in \mathbb{R}$
- E. $x = 1, y = -7t + 8, z = -3t + 4; t \in \mathbb{R}$
- F. $x = t + 1, y = 7t + 8, z = -3t + 4; t \in \mathbb{R}$

6. [5 points] Considérer la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Utiliser l'Algorithme de Gauss-Jordan pour trouver A^{-1} .
(b) Utiliser la réponse à la partie (a) pour trouver une matrice B qui satisfait

$$(2B^T + 4I_4)^{-1} = A^T$$

où I_4 est la matrice identité d'ordre 4.

7. [5 points]

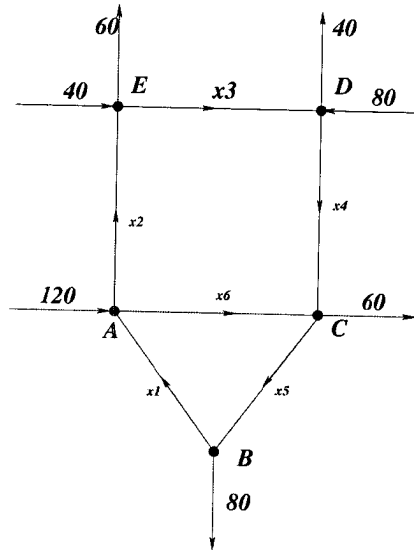
Considérer le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} 3x - 11y + (4a - 12)z = -9 + 5b \\ 5x - 19y + (4a - 10)z = 5b - 5 \\ 2x - 8y + (3a - 10)z = -a + 3b - 10 \end{cases}$$

où a et b sont deux nombres réels.

- (1) Trouver les valeurs de a et b telles que le système:
 - (i) admet une solution unique
 - (ii) admet une infinité de solutions,
 - (iii) est incompatible.
- (2) Dans le (ii),
 - (a) donner la solution générale du système,
 - (b) donner une description géométrique complète de cette solution.

8. [5 points] Le diagramme suivant représente un réseau routier où les lettres A , B , C , D et E représentent les intersections, les flèches indiquent le sens du trafic. Les nombres et les variables x_i autour des flèches indiquent le nombre de voitures qui passent par l'intersection durant la même période du temps.



- (1) Écrire le système (S) d'équations linéaires qui décrit le réseau. Indiquer aussi toutes les contraintes sur les variables x_i . **Pour cette partie, n'effectuer aucune réduction du système. Juste donner le système (S) avec les contraintes. La réduction de la matrice augmentée du système est faite pour vous à la partie suivante.**
- (2) Sachant que la **forme échelonnée réduite** de la matrice augmentée du système (S) est:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -80 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

donner la solution générale du Système (S) (Ignorer les contraintes sur les variables pour cette partie).

- (3) Si le chemin AC est fermé pour la construction, déterminer le flux minimal le long du chemin AE en utilisant vos réponses à la partie (2). Vous devez justifier vos réponses.

