Abdourahamane

SOW

300036301

Université d'Ottawa

CVG2581

Méthodes Numérique en Génie C

Traité du devoir 5

Question #2 :

Soit $y = \sin x$; $x = \frac{\pi}{4}$; $h = \frac{\pi}{12}$

Différence avant pour $O(h)$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

Valeur analytique : $f'(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071$

Ainsi $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{f(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}) - f(\pi/4)}{\frac{\pi}{12}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}) - \sin(\pi/4)}{\frac{\pi}{12}}$

$$f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sin(\frac{4\pi}{12}) - \sqrt{2}/2}{\frac{\pi}{12}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}/2 - \sqrt{2}/2}{\frac{\pi}{12}}$$

$f'(\frac{\pi}{4}) = 0{,}607$

L'erreur relative est :

$$\varepsilon = \frac{|0{,}7071 - 0{,}607|}{0{,}707} = 14{,}15\%$$

Différence arrière pour $O(h)$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{4} - \pi/12)}{\frac{\pi}{12}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}/2 - \sin(\frac{2\pi}{12})}{\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}/2 - \sin(\pi/6)}{\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}/2 - 1/2}{\frac{\pi}{12}}$$

$f'(x) = 0{,}7911$

L'erreur relative est

$$\varepsilon = \frac{|0{,}7071 - 0{,}7911|}{0{,}7071} = 11{,}88\%$$

Question #2 : Interpollation de Richardson

$Y = \sin(x)$; $x = \frac{\pi}{4}$; $h_1 = \frac{\pi}{3}$; $h_2 = \pi/6$

Soit : $I_{better} \stackrel{?}{=} \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1)$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + \pi/6\right) - f\left(\frac{\pi}{4} - \pi/6\right)}{2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \sin\left(\pi/12\right)}{2\left(\pi/6\right)}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{0{,}9659 - 0{,}2588}{\pi/3} = 0{,}6752 \Rightarrow \boxed{f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}6752} \Rightarrow$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) - f\left(\pi/4 - \pi/12\right)}{2\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\pi/6\right)}{\frac{\pi}{6}}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}/2 - 1/2}{\pi/6} = 0{,}6991 \Rightarrow \boxed{I(h_2) = 0{,}6991}$$

Alors $I_{better} = \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1) = \frac{4}{3}(0{,}6991) - \frac{1}{3}(0{,}6752) = 0{,}707$

On remarque que la précision est bonne car les valeurs obtenues sont à peu près pareil.

Question #3

Soit $\int_0^2 \frac{e^x \cdot \sin(x)}{1+x^2}\,dx$

Méthode de trapèze

$$I_1 = \frac{2-0}{2}\left(\frac{e^0 \cdot \sin(0)}{1+0^2} + \frac{e^2 \sin(2)}{1+4}\right) = \underline{1,34377}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(f(0) + 2f(1) + f(2)\right) = \frac{1}{2}\left(0 + 2\left(\frac{e^1 \sin(1)}{1+1^2}\right) + \frac{e^2 \sin(2)}{5}\right)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(2(1,14368) + 1,343769\right) = \underline{1,81556}$$

$$I_3 = \frac{0,5}{2}\left(f(0) + 2f(0,5) + 2f(1) + 2f(1,5) + f(2)\right)$$

$$= \frac{0,5}{2}\left(0 + 2\left(\frac{e^{0,5}\sin(0,5)}{1+(0,5)^2}\right) + 2(1,14368) + 2\left(\frac{e^{1,5}\sin(1,5)}{1+(1,5)^2}\right) + 1,343769\right)$$

$$= 0,25\left(2(0,63235) + 2(1,14368) + 2(1,37553) + 1,343769\right) = \underline{1,91172}$$

$$I_4 = \frac{0,25}{2}\left(f(0) + 2\left[f(0,25) + f(0,5) + f(0,75) + f(1) + f(1,25) + f(1,5) + f(1,\right.\right.$$
$$\left.\left. + f(2)\right)\right.$$

$$I_4 = 0,125\left(0 + 2\left[\frac{e^{0,25}\sin(0,25)}{1+(0,25)^2} + \frac{e^{0,5}\sin(0,5)}{1+(0,5)^2} + \frac{e^{0,75}\sin(0,75)}{1+(0,75)^2} + 1,14368 + \frac{e^{1,25}\sin(1}{1+(1,}\right.\right.$$
$$\left.\left. + 1,37553 + \frac{e^{1,75}\sin(1,75)}{1+(1,75)^2}\right] + 1,343769\right)$$

$$I_4 = 0,125\left(2\left[0,29899 + 0,63235 + 0,92354 + 1,14368 + 1,29260 + 1,37553\right.\right.$$
$$\left.\left. + 1,39383\right] + 1,343769\right) = \underline{1,93310}$$

Question #4

	J=1	J=2	J=3	J=4	
h	2	1	0,5	0,25	
Trapèze	1,34377	1,81556	1,91172	1,93310	$K=1 \; O(h^2)$
		1,97289	1,94377	1,94023	$K=2 \; O(h^4)$
			1,94183	1,93999	$K=3 \; O(h^6)$
				1,93996	$K=4 \; O(h^8)$

Pour l'estimation $O(h^4)$ $K=2$

$$I_{J,2} = \frac{[4 \cdot I_{J+1;1}] - I_{J,1}}{3}$$

$$I_{1,2} = \frac{[4 \cdot I_{2,1}] - I_{1,1}}{3} = \frac{4[1,81556] - 1,34377}{3} = 1,97282 \checkmark$$

$$I_{2,2} = \frac{[4 \cdot I_{3;1}] - I_{2,1}}{3} = \frac{4[1,91172] - 1,81556}{3} = 1,94377 \checkmark$$

$$I_{3,2} = \frac{4(1,93310) - 1,91172}{3} = 1,94023$$

Pour l'estimation $O h^6$ $K=3$

$$I_{J,3} = \frac{[4^2 \cdot I_{J+1,2}] - I_{J,2}}{4^2 - 1}$$

$$I_{1,3} = \frac{16 \cdot I_{2,2}] - I_{1,2}}{4^2 - 1} = \frac{16 \cdot 1,94377 - 1,97282}{15} = 1,94183$$

Pour l'estimation $O(h^8)$ $K=4$

$$I_{1,4} = \frac{[4^3 \cdot I_{J+1,3}] - I_{J,3}}{4^3 - 1} = \frac{4^3 \cdot 1,93999 - 1,94183}{63} = \underline{\underline{1,9399}}$$

Question #6

Soit : valeur analytique = 1,94013 (obtenue par la méthode trapèze

Pour la question #3, la valeur approximée est de : 1,9331 après utilisation de la méthode de trapèze (4 itérations)

Alors, l'erreur est donc : $\dfrac{|1,94013 - 1,93310|}{1,94013} = 0,36\%$

Ensuite la méthode simpson 1/3 a donné une approximation de : 1,94023 avec un h = 0,25

L'erreur estimée est donc : $\dfrac{|1,94013 - 1,94023|}{1,94013} = 0,005\%$

* Pour la méthode Romberg, la valeur approximée est de : 1,93996 avec une précision d'ordre $(O(h^8))$. L'erreur est donc : $\dfrac{|1,94013 - 1,93996|}{1,94013} = 0,009\%$

Finalement, la quadrature de Gauss donne une approxim de 1,940123 avec une erreur de : $\dfrac{|1,94013 - 1,940123|}{1,94013} = 0,00$

Ainsi, en comparant les erreurs dûes à chaque méthode, on peut dire que la méthode de quadrature de Gauss est la plus précise suivi de la méthode simpson 1/3. La moins précise est la méthode du trapèze.

Question #7 :

l'aire transversale d'un cours d'eau peut être estimée à l'aide de :

$$A_c = \int_0^B H(Y)\,dY$$

Et le débit peut être estimé avec :

$$Q = \int_0^B U(Y)\,H(Y)\,dY$$

où B est la largeur du cours d'eau (m) et Y est : la distance de la berge (m).

Y, m	0	2	4	5	6	9
H, m	0,5	1,3	1.25	1,7	1	0.25
U, m/s	0,03	0,06	0.05	0.12	0.11	0.02

Aire : Méthode de trapèze

$$I_1 = (2-0)\,\frac{1,3+0,5}{2} = 1,8\,m^2$$

$$I_2 = (4-2)\,\frac{1,25+1,3}{2} = 2,55\,m^2$$

$$I_3 = (5-4)\left(\frac{1,7+1,25}{2}\right) = 1,475\,m^2$$

$$I_4 = (6-5)\,\frac{1+1,7}{2} = 1,35\,m^2$$

$$I_5 = (9-6)\,\frac{0,25+1}{2} = 1,875\,m^2$$

Alors Aire $= 1,8 + 2,55 + 1,475 + 1,35 + 1,875 = \boxed{9,05\,m^2}$

Calcul du débit

$$I_1 = (2-0)\,\frac{1,3\times 0,06 + (0,5\times 0,03)}{2} = 0,093$$

$$I_2 = (4-2)\,\frac{1,25\times 0,05 + (1,3\times 0,06)}{2} = 0,1405$$

$$I_3 = (5-4)\,\frac{1,7\times 0,12 + (1,25\times 0,05)}{2} = 0,13325$$

$$I_4 = \frac{(6-5)}{2}\left(1\cdot 0,11 + 1,7\times 0,12\right) = 0,1$$

$$I_5 = (9-6)\,\frac{0,25\times 0,02 + (1\cdot 0,11)}{2} = 0,1725$$

Alors $Q = 0,093 + 0,1405 + 0,13325 + 0,157 + 0,1725$

$$\boxed{Q = 0,69625\ m^3/s}$$