Faculté des sciences »
Département de mathématiques et de statistique

MAT 1741 A – Test 2 – V.2

Professeur : Abdelkrim El basraoui

5 octobre 2017

Nom :______________________________ **Prénom** :______________________________

Numéro d'étudiant :____________________

Instructions :

- La durée de cet examen est de **80 minutes**.
- Cet examen est un examen à livre fermé.
- Les questions 1 et 2 sont à choix multiples et valent 1 point chacune. Il n'y a pas de points partiels. Inscrivez vos réponses dans le tableau fourni à la deuxième page.
- Les questions 3 et 4 valent 5 points chacune et les questions 5 et 6 valent 4 points chacune. **Pour obtenir tous les points pour ces questions, vos réponses doivent être justifiées et écrites de façon claire, logique et lisible.**
- La question 7 est une question bonus qui vaut 1 points. Pour obtenir les points pour cette question, votre solution doit être totalement correcte.
- Il est interdit de se servir de vos appareils électroniques. Vous devez les étteindre et les ranger dans votre sac : vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées dont le résultat pourrait être un 0 (zéro) pour l'examen.
- Bonne chance ! ! !

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature : ______________________________

Inscrivez vos réponses pour les questions à choix multiples dans ce tableau.

Question 1	Question 2

Ne rien inscrire dans le tableau suivant.

Total QCM	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Question 7	Total sur 20

1. Considérez un système d'équations linéaires homogène avec 2017 équations et 2000 variables dont la matrice échelonnée possède 2000 positions pivots. Lequel des énoncés suivants est vrai pour ce système ?

A. Le système peut être incompatible.

B. Le système ne peut jamais avoir une infinité de solutions.

C. Le système a entre 1 et 2000 solutions.

D. Le système a toujours une infinité de solutions .

E. Le système a toujours une solution unique.

Solution: E

2. Parmi les matrices suivantes il y a seulement **deux** sous forme échelonnée réduite. Déterminez lesquelles le sont.

I. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; II. $\begin{bmatrix} 1 & -21 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; III. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; IV. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; V. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A. I. et II.
B. I. et III.
C. II. et III.
D. II. et V.
E. III. et IV.
F. I. et V.

Solution: D.

3. Soient les paramètres p et q dans $\mathbb{R}$ et soit le système d'équations linéaires Ãă trois variables, x, y et z, suivant :

$$\begin{cases} x-2y+2z &= p \\ -x \quad -qz &= 1 \\ 2x-6y+2z &= -8 \end{cases}$$

a) Si $[A\,|\,b]$ est la matrice augmentée du système ci-dessus, trouvez $rg(A)$ et $rg([A\,|\,b])$ pour <u>toutes</u> les valeurs de p et q.

Solution: Pour cela on trouve la M.E. de la M.A. suivante

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & p \\ -1 & 0 & -q & 1 \\ 2 & -6 & 2 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3\to L_3-2L_1]{L_2\to L_2+L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & p \\ 0 & -2 & 2-q & p+1 \\ 0 & -2 & -2 & -8-2p \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3\to L_3-L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & p \\ 0 & -2 & 2-q & 1 \\ 0 & 0 & -4+q & -9-3p \end{array}\right]$$

De cette M.E. on peut lire que :

- Si $-4+q=0,\ -9-3p\neq 0 \iff q=4,\ p\neq -3$, alors $rg(A)=2$ et $rg(\,[A\,|\,b]\,)=3$;
- Si $-4+q=0,\ -9-3p=0 \iff q=4,\ p=-3$, alors $rg(A)=2$ et $rg(\,[A\,|\,b]\,)=2$;
- Si $-4+q\neq 0,\ -9-3p$quelconque $\iff q\neq 4,\ p$ quelconque, alors $rg(A)=3$ et $rg(\,[A\,|\,b]\,)=3$.

(Voir la page suivante pour la question (3b) ...)

3 (suite).

b) En utilisant votre réponse en a), trouvez toutes les valeurs de p et q telles que le système possède

(i) une solution unique,

Solution: On veut $rg(A) = rg([A\,|\,b]) = \#$ de variables. Ceci n'arrive que si $q \neq 4$ et p quelconque.

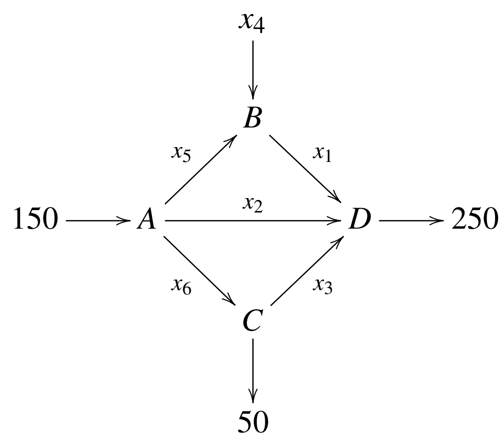
(ii) une infinité de solutions,

Solution: On veut $rg(A) = rg([A\,|\,b]) < \#$ de variables. Ceci n'arrive que si $q = 4,\ p = -3$.

(iii) aucune solution.

Solution: On veut $rg(A) < rg([A\,|\,b])$. Ceci n'arrive que si $q = 4,\ p \neq -3$.

4. Considérez le réseau routier décrit par le diagrame suivant. Les lettres A à D dénotent les intersections, les flèches indiquent le sens du trafic routier et les *nombres* et les *variables* indiquent le nombre de voitures par minute qui circulent sur ce réseau. Notez que la circulation se fait à sens unique.



(a) Donnez le systéme linéaire décrivant le trafic sur ce réseau routier et les contraintes sur les variables. **Ne pas résoudre** ce système.

Solution:

$$\begin{cases} A: & 150 = x_2 + x_5 + x_6 \\ B: & x_4 + x_5 = x_1 \\ C: & x_6 = x_3 + 50 \\ D: & x_1 + x_2 + x_3 = 250 \end{cases}$$

(b) Supposons que la matrice échelonnée réduite du système représentant ce réseau est :

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 150 \end{array}\right]$$

Donnez la solution générale de ce système sous forme vectorielle.

Solution: La solution générale est

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_5 + 150 \\ -x_5 - x_6 + 150 \\ x_6 - 50 \\ 150 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \; x_5,\; x_6 \text{ libres.}$$

(c) Si dû à des travaux la circulation le long $\overline{AC}$ est limitée à 60 voitures par minute, quel est le flux maximal le long $\overline{BD}$?

Solution: La circulation sur $\overline{AB}$ est limitée à $x_6 \leq 60$. Mais $x_3 = x_6 - 50 \geq 0$ et donc $50 \leq x_6 \leq 60$. Maintenant, on a de $x_2 = -x_5 - x_6 + 150$ que $x_5 = -x_2 - x_6 + 150$ est maximal pour x_2 et x_6 minimals, soit $x_2 = 0$ et $x_6 = 50$ et alors $x_5 = 100$. Maintenant, le long de $\overline{BD}$ circulent $x_1 = x_5 + 150$ voitures par minutes et donc x_1 est maximal pour $x_5 = 100$. Donc le flux maximal le long $\overline{BD}$ est $x_1 = 150 + 100 = 250$ voitures par minutes.

5. Indiquez si chacun des énoncés suivants est (toujours) VRAI ou est (possiblement) FAUX, dans la case spécifiée.

- Si vous indiquez qu'un énoncé est (possiblement) FAUX, vous devez **donner un contre-exemple explicite.** Vous pouvez utiliser un exemple soit numérique, soit avec des matrices !
- Si vous indiquez que l'énoncé est (toujours) VRAI, vous devez expliquer clairement votre raisonnement.

a) Un système linéaire avec n équations et n variables admet toujours une inifinté de solutions.

Solution: Faux. Un système linéaire, dans ce cas, peut aussi bien être incompatible ou compatible avec solution unique.
Par exemple, le suivant admet une solution unique

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= -1 \end{aligned}$$

.

RÉPONSE :

b) Le rang de la matrice échelonnée réduite d'un système linéaire dont la matrice augmentée est de type 2017×1741 est égale à 2017.

Solution: Faux. Car un pivot fixe à la fois une ligne et une colonne. Le rang maximal et la plus petite valeur entre le nombre de lignes et celui des colonnes, soit 1741.

RÉPONSE :

(*Voir page suivante pour les questions c) et d) ...*)

5 (suite).

c) Pour tous vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ de $\mathbb{R}^3$, le vecteur $-2\mathbf{u} - 3\mathbf{w}$ appartient toujours à $\text{Vect}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

Solution: Vrai. Par définition d'une combinason linéaire.

RÉPONSE :

d) Si le rang d'une matrice A de type 5×4 est 4, alors pour tout vecteur $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^5$ l'équation matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet toujours une solution unique.

Solution: Faux. Voici un contre exemple. Pour

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

l'équation $Ax = b$ n'a pas de solutions.

RÉPONSE :

Question 6. Trouvez la valeur de t pour laquelle $(1,t,1)$ est contenu dans l'ensemble $\text{Vect}\{(1,1,0),\ (1,-1,1),\ (3,1,1)\}$.

Solution: On trouve la M.E. de la M.A. suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & t \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & t-1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 + \frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & t-1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t+1}{2} \end{array}\right]$$

Donc pour que $(1,t,1)$ est contenu dans $\text{Vect}\{(1,1,0),\ (1,-1,1),\ (3,1,1)\}$ il faut que la M.E. soit compatible et ceci n'arrive que si $t = -1$.

Question 7. **(Bonus - 1 point)** Si A est une matrice de type $m \times n$ et B est une matrice de type $n \times p$ dont les colonnes sont notées $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \cdots, \mathbf{b_p}$, le produit de A par B est la matrice dont les colonnes sont $A\mathbf{b_1}, A\mathbf{b_2}, \cdots, A\mathbf{b_p}$.

Soit maintenant $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ et soit $B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$ la matrice de type 2×3. Quelle est la deuxième ligne de AB ?

Solution: On a si $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}$ alors on a

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & A\mathbf{b}_3 \end{bmatrix}$$

Donc la deuxième ligne de AB est le multiple par 2 de la première ligne de B.

Page supplémentaire. V.2